

Rudiments de logique

Cours de É. Bouchet – PCSI

7 septembre 2023

Table des matières

1	Généralités et rappels	2
1.1	Propositions, négations et connecteurs	2
1.2	Implication, équivalence	3
1.3	Quantificateurs	3
2	Les différents modes de raisonnement	4
2.1	Raisonnement par disjonction des cas	4
2.2	Raisonnement par récurrence	5
2.2.1	Récurrence simple	5
2.2.2	Récurrence double	5
2.2.3	Récurrence forte	5
2.3	Raisonnement par contraposition	6
2.4	Raisonnement par analyse-synthèse	6
2.5	Raisonnement par l'absurde	7

1 Généralités et rappels

1.1 Propositions, négations et connecteurs

Définition 1.1 (Proposition)

Une **proposition** (ou **assertion**) est une phrase mathématique qui est soit vraie (V) soit fausse (F).

Exemple. La proposition P_1 : « $3 \geq 10$ » est fausse.

La proposition P_2 : « la fonction $x \mapsto x^2$ est positive sur $\mathbb{R}$ » est vraie.

Définition 1.2 (Négation d'une proposition)

Soit P une proposition. On appelle **négation de P** , notée $\text{non}(P)$, la proposition définie par :

- $\text{non}(P)$ est vraie si P est fausse,
- $\text{non}(P)$ est fausse si P est vraie.

Remarque. Cette définition se résume par la table de vérité suivante :

P	$\text{non}(P)$
V	F
F	V

Exemple. $\text{non}(P_1)$ est « $3 < 10$ », ce qui est vrai.

$\text{non}(P_2)$ est « la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas positive sur $\mathbb{R}$ », ce qui est faux.

Définition 1.3 (P et Q , P ou Q)

Soit P et Q deux propositions.

- la proposition (P et Q) est vraie quand les phrases P et Q sont toutes les deux vraies ;
- la proposition (P ou Q) est vraie quand au moins l'une des phrases P ou Q est vraie.

Remarque. Ces définitions se résument par les tables de vérité suivantes :

P	Q	P et Q	P ou Q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Exemple. La proposition (P_1 et P_2) est fausse, alors que (P_1 ou P_2) est vraie.

Remarque. Attention : le « ou » mathématique diffère du « ou » utilisé habituellement en français. Si un restaurant propose « fromage ou dessert », on a rarement le droit de choisir les deux...

Proposition 1.4 (Négation de et/ou)

Si P et Q sont des propositions, alors :

- la négation de (P et Q) est ($\text{non}(P)$ ou $\text{non}(Q)$),
- la négation de (P ou Q) est ($\text{non}(P)$ et $\text{non}(Q)$).

Démonstration. On vérifie que les tables de vérité sont les mêmes. □

Exercice 1. Déterminer la négation de « on est lundi et c'est le matin ».

Solution : C'est « on n'est pas lundi ou ce n'est pas le matin ».

1.2 Implication, équivalence

Définition 1.5 (Implication, réciproque)

Soit P et Q des propositions, on définit la proposition $(P \Rightarrow Q)$ par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

On appelle **réciproque** de l'implication $P \Rightarrow Q$ l'implication $Q \Rightarrow P$.

Exercice 2. Soit x un réel, déterminer si les implications suivantes sont vraies ou fausses :

1. $(x \geq 0 \Rightarrow x + 1 \geq 0)$,
2. $(x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0)$.

Solution :

1. Soit x un réel. On suppose que $x \geq 0$, alors $x + 1 \geq 1 \geq 0$. Donc $(x \geq 0 \Rightarrow x + 1 \geq 0)$ est vraie.
2. Soit $x = -\frac{1}{2}$, on a $x + 1 \geq 0$, mais pas $x \geq 0$. Donc $(x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0)$ est fausse dans le cas général.

Remarque. La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P \text{ et non}(Q))$.

Remarque. Attention à ne pas confondre $(P \Rightarrow Q)$ et $(P \text{ donc } Q)$. Dans le premier cas, on dit que si P est vrai, alors Q le sera aussi. Dans le second cas, on affirme que P est vrai et on en déduit que Q l'est aussi.

Définition 1.6 (Condition nécessaire ou suffisante)

Soit P et Q des propositions, si $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que :

- P est une **condition suffisante** pour avoir Q ,
- Q est une **condition nécessaire** pour avoir P .

Définition 1.7 (Équivalence)

Soit P et Q des propositions. On note $P \Leftrightarrow Q$ la proposition $((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P))$.

Elle se lit « P si et seulement si Q », souvent abrégé « P ssi Q ».

Remarque. Lorsque $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, P est une condition nécessaire et suffisante pour avoir Q (et inversement).

Remarque. Le raisonnement par équivalence est particulièrement utile quand on cherche à déterminer l'ensemble des solutions d'un problème (alors qu'on raisonne par déductions quand on cherche juste à montrer quelque chose).

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des solutions x réelles de l'équation $x^2 - x = 0$.

Solution : Soit x un réel,

$$x^2 - x = 0 \iff x(x - 1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\{0, 1\}$.

1.3 Quantificateurs

Définition 1.8 ($\forall, \exists$)

Soit E un ensemble et P une propriété.

On écrit $\forall x \in E, P(x)$ quand P est vraie pour tout objet mathématique x .

On écrit $\exists x \in E, P(x)$ quand il existe au moins un x pour lequel P est vraie.

On écrit $\exists! x \in E, P(x)$ quand il existe exactement un x pour lequel P est vraie.

Remarque. Les symboles $\forall$ et $\exists$ ne sont en aucun cas des abréviations. Ils ne doivent jamais être utilisés dans une phrase en français pour remplacer « pour tout » ou « il existe ».

Exemple. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq -1$ car le carré d'un réel est toujours positif.
Par contre, $\exists z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = -1$ car par exemple $i^2 = -1$.

Exercice 4. Montrer que : $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 \geq 3$ et $\frac{1}{x} \leq 0,1$.

Solution : $x = 10$ convient, car $100 \geq 3$ et $0,1 \leq 0,1$.

Remarque. On peut permuter les quantificateurs $\forall$ entre eux et les quantificateurs $\exists$ entre eux. Dans le cas général, il est cependant interdit de permuter un $\forall$ et un $\exists$.

Exemple. $\forall y \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = y$ est une assertion vraie : pour tout $y \in \mathbb{R}_+, x = \sqrt{y}$ convient.
 $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}_+, x^2 = y$ est une assertion fautive par contre : il faudrait que ce soit le même réel x qui, mis au carré, vaille plusieurs valeurs de y différentes, c'est impossible.

Proposition 1.9 (Négation des quantificateurs)

Soit E un ensemble, on a :

$$\text{non}(\forall x \in E, P(x)) \iff \exists x \in E, \text{non}(P(x)),$$

et

$$\text{non}(\exists x \in E, P(x)) \iff \forall x \in E, \text{non}(P(x)).$$

Démonstration. On vérifie que les tables de vérité sont les mêmes. □

Exercice 5. On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 9x + 20$. Montrer que f n'est pas une fonction positive.

Solution : « la fonction f est une fonction positive » s'écrit : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$. En passant à la négation, « la fonction f n'est pas une fonction positive » s'écrit donc : $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) < 0$. Or, on trouve par calcul :

$$f(4,5) = f\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{81}{4} - \frac{81}{2} + 20 = \frac{81 - 162 + 80}{4} = -\frac{1}{4} < 0.$$

Donc la fonction f n'est pas positive.

2 Les différents modes de raisonnement

2.1 Raisonnement par disjonction des cas

Définition 2.1 (Principe du raisonnement par disjonction de cas)

Raisonner par **disjonction de cas** pour démontrer une propriété P consiste en la décomposer en un nombre fini de cas vérifiés séparément.

Exercice 6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$,

- Si n est pair, alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Donc $\frac{n(n+1)}{2} = k(2k+1)$, qui est bien un entier.
- Si n est pair, alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Donc $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = (2k+1)(k+1)$, qui est bien un entier.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

Exercice 7. Soit x et y deux réels fixés. Montrer que $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$.

Solution :

- Si $x \geq y$, alors $\max(x, y) = x$ et $|x-y| = x-y$. Donc $\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = x = \max(x, y)$.
- Si $x < y$, alors $\max(x, y) = y$ et $|x-y| = y-x$. Donc $\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+y-x}{2} = y = \max(x, y)$.

Comme $x \geq y$ et $x < y$ couvrent toutes les valeurs possibles de x et y , $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$.

2.2 Raisonnement par récurrence

2.2.1 Récurrence simple

Proposition 2.2 (Principe de récurrence)

Soit n un entier, et $P(n)$ une propriété dépendant de n . Si $P(n_0)$ est vraie (initialisation) et si $\forall n \geq n_0, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (hérédité) alors pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Démonstration. Admis. □

Exercice 8. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P(n) : \ll 0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \gg$.

- Initialisation : $0 = \frac{0 \times 1}{2}$ donc $P(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$0 + 1 + 2 + \dots + n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, 0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2.2.2 Récurrence double

Proposition 2.3 (Récurrence double)

Soit n un entier, et $P(n)$ une propriété dépendant de n . Si $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies (initialisation) et si $\forall n \geq n_0, (P(n) \text{ et } P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$ (hérédité) alors pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Démonstration. On montre par récurrence simple sur $n \geq n_0$ la propriété « $P(n)$ et $P(n+1)$ ». □

Exercice 9. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$.

Solution : On remarque que $u_2 = 9, u_3 = 27$. On conjecture alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P(n) : \ll u_n = 3^n \gg$.

- On a $u_0 = 3^0$ donc $P(0)$ est vraie, et $u_1 = 3^1$ donc $P(1)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies. Alors :

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n = 2 \cdot 3^{n+1} + 3 \cdot 3^n = 3^n(6 + 3) = 3^{n+2}.$$

Donc $P(n+2)$ est vraie.

On conclut que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n$.

2.2.3 Récurrence forte

Proposition 2.4 (Récurrence forte)

Soit n un entier, et $P(n)$ une propriété dépendant de n . Si $P(n_0)$ est vraie (initialisation) et si $\forall n \geq n_0, (\forall k \in \llbracket n_0, n \rrbracket, P(k)) \Rightarrow P(n+1)$ (hérédité) alors pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Démonstration. On montre par récurrence simple sur $n \geq n_0$ la propriété « $\forall k \in \llbracket n_0, n \rrbracket, P(k) \gg$. □

Exercice 10. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} (u_0 + u_1 + \dots + u_n)$.

Solution : On remarque que $u_1 = 1$, puis que $u_2 = 1$. On conjecture alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P(n) : \ll u_n = 1 \gg$.

— On a $u_0 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(k)$ est vraie. Alors :

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} (u_0 + u_1 + \dots + u_n) = \frac{1}{n+1} (1 + 1 + \dots + 1) = \frac{n+1}{n+1} = 1.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.

2.3 Raisonnement par contraposition

Définition 2.5 (Contraposée)

Soit P et Q deux propositions. La **contraposée** de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$.

Exemple. La contraposée de « si on est en hiver, le professeur porte des chaussettes » est « si le professeur ne porte pas de chaussettes, on n'est pas en hiver ».

Proposition 2.6 (Principe du raisonnement par contraposition)

Soit P et Q deux propositions, on a alors :

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)).$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que $(P \Rightarrow Q)$ et $(\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P))$ ont les mêmes tables de vérité. $\square$

Exercice 11. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $(n^2 \text{ est pair}) \Rightarrow (n \text{ est pair})$.

Solution : Soit $n \in \mathbb{Z}$. On suppose qu'il est impair. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Ce qui donne :

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Comme k est entier, $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$, on en déduit que n^2 est impair. D'où $(n \text{ est impair}) \Rightarrow (n^2 \text{ est impair})$.

Par contraposition, on obtient $(n^2 \text{ est pair}) \Rightarrow (n \text{ est pair})$.

2.4 Raisonnement par analyse-synthèse

Définition 2.7 (Principe du raisonnement par analyse-synthèse)

Le raisonnement par analyse-synthèse sert à déterminer l'ensemble des solutions d'un problème. Il se rédige en deux étapes :

- **L'analyse** : correspond au sens direct d'un raisonnement par équivalences. On étudie une solution, en supposant son existence. Le but est d'obtenir un maximum d'informations à son sujet, pour se ramener à un nombre limité de candidats.
- **La synthèse** : correspond à la réciproque d'un raisonnement par équivalences. On étudie séparément chacun des candidats de l'analyse pour vérifier s'ils sont solution ou non du problème.

Remarque. L'analyse permet de déterminer des conditions nécessaires à la résolution du problème, la synthèse permet ensuite de vérifier si ces conditions sont suffisantes.

Remarque. Le plus souvent, on raisonne par analyse-synthèse quand on cherche toutes les solutions d'un problème mais qu'un raisonnement par équivalences est impossible (ou compliqué).

Exercice 12. Déterminer les solutions réelles x de l'équation $(E) : \sqrt{6+x} = x$.

Solution : Première méthode : par analyse-synthèse.

- Analyse : on suppose que (E) admet une solution $x \in \mathbb{R}$. Alors $\sqrt{6+x} = x$. En passant au carré, on trouve $6+x = x^2$, et donc $x^2 - x - 6 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$. Donc $x = \frac{1+5}{2} = 3$ ou $x = \frac{1-5}{2} = -2$.
- Synthèse :
 - $\sqrt{6+3} = \sqrt{9} = 3$, donc $x = 3$ est une solution de (E) .
 - $\sqrt{6-2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$, donc $x = -2$ n'est pas une solution de (E) .

Ainsi, l'équation (E) admet $x = 3$ pour unique solution.

Deuxième méthode : par équivalences. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sqrt{6+x} = x &\iff \sqrt{6+x} = x \text{ et } x \geq 0 && \text{car une racine est toujours positive} \\ &\iff 6+x = x^2 \text{ et } x \geq 0 && \text{car la fonction carré est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ &\iff (x = -2 \text{ ou } x = 3) \text{ et } x \geq 0 && \text{par calcul du discriminant} \\ \sqrt{6+x} = x &\iff x = 3.\end{aligned}$$

Donc $x = 3$ est l'unique solution de l'équation.

Exercice 13. Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) - f(x-y) = 4xy.$$

Solution :

- Analyse : On suppose que f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie la relation. Alors en particulier, pour $x \in \mathbb{R}$ et $y = x$:

$$f(2x) - f(0) = 4x^2 = (2x)^2.$$

Donc pour tout $z \in \mathbb{R}$, ($z = 2x$, qui parcourt bien l'ensemble des réels), $f(z) = f(0) + z^2$.

- Synthèse : Soit $C \in \mathbb{R}$ une constante fixée et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(z) = C + z^2$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) - f(x-y) = (x+y)^2 + C - (x-y)^2 - C = 4xy.$$

Donc f est bien solution du problème.

Les solutions du problème sont les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall z \in \mathbb{R}$, $f(z) = C + z^2$.

Variante : dans l'analyse, on pouvait aussi faire apparaître un taux d'accroissement pour montrer $f'(x) = 2x$ et en déduire f par calcul de primitive.

2.5 Raisonnement par l'absurde

Proposition 2.8 (Principe du raisonnement par l'absurde)

Soit P une proposition. Si en supposant que P est fausse, on déduit une contradiction, alors P est vraie.

Démonstration. C'est une variante du raisonnement par contraposition. □

Exercice 14. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$, dont on admet qu'elle est bien définie et à valeurs strictement positives. Montrer qu'elle diverge.

Solution : On suppose que la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors la suite (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ . Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. En passant à la limite dans cette égalité, on trouve :

- Si $\ell \neq 0$, alors $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$, donc $\frac{1}{\ell} = 0$: absurde.
- Si $\ell = 0$, comme la suite (u_n) est positive, alors $(\frac{1}{u_n})$ diverge vers $+\infty$. Le passage à la limite donne donc $\ell = +\infty$: absurde.

Donc la suite (u_n) diverge.

Variante : on pouvait aussi utiliser la positivité de u pour montrer que la suite est croissante. Or $u_0 = 1$, donc $\ell \geq 1$, ce qui permet d'éviter la disjonction de cas.