Exercices PCSI
É.Bouchet

Petits systèmes et inégalités

Exercice 1 (★). Déterminer l'ensemble des solutions $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de l'équation $x + 2y = 3$. On l'écrira de deux façons, en utilisant deux paramétrages différents.

Exercice 2 (★). Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre à l'aide des opérations élémentaires les systèmes d'inconnues (x, y, z) :

1. $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-2z & = & -5 \\ x+2y+z & = & 3 \\ x-5y-3z & = & -2 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-3z & = & 1 \\ 3x-y+2z & = & 0 \\ x-5y+8z & = & -2 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-3z & = & 13 \\ 2x-5y-3z & = & -7 \\ -x+2y+z & = & 3 \end{array}\right.$

Exercice 3 (★).

1. Déterminer l'ensemble des $t \in \mathbb{R}^*$ tels que $\dfrac{1}{t} \leqslant -2$.
2. Déterminer l'ensemble des $t \in \mathbb{R}^*$ tels que $\dfrac{1}{t} \leqslant 2t$.

Exercice 4 (★★). Montrer que :

1. Pour tout $x \leqslant 0$, $\dfrac{e^x - x^2}{1 + x^2} \leqslant 1$.
2. Pour tout $x \geqslant 2$, $\dfrac{x^2 - 2}{x - 1} \geqslant 2$.

Exercice 5 (★). Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b \neq 0$. Encadrer au mieux $\dfrac{a}{b}$ (lorsque c'est possible, sinon on justifiera l'impossibilité), sachant que :

1. $\left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant a \leqslant 2 \\ 3 \leqslant b \leqslant 5 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{l} 1 < a \leqslant 2 \\ 3 < b \leqslant 5 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{l} -1 \leqslant a \leqslant 2 \\ 3 \leqslant b \leqslant 5 \end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant a \leqslant 2 \\ -3 \leqslant b \leqslant 5 \end{array}\right.$
5. $\left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant a \leqslant 2 \\ 0 < b \leqslant 5 \end{array}\right.$

Exercice 6 (★★). Soit $a > 0$. Sans étudier les variations des fonctions suivantes, déterminer pour chacune un majorant et un minorant :

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} [1, 10] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\ln(t)}{t} \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\sin(t)}{1 + t^2} \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} [0, 3] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{1 - at}{2e^t - 1} \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \ln(t^2 + 1) + \dfrac{3t}{a + t^2} \end{array}$
5. $f_5 : \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{at^2}{1 + e^t} - \dfrac{t^2}{a^2} \end{array}$

Exercice 7 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $S = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} |i - j|$.

Exercice 8 (★). Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $7 - 4x \leqslant |x + 5|$.

Exercice 9 (★★★). Trouver toutes les solutions réelles de l'inéquation $\sqrt{2x + 22} \geqslant 1 - x$.

Exercice 10 (★★). Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left\lfloor (2x + 1)^2 \right\rfloor = 3$.

Exercice 11 (★). Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$.

Exercice 12 (Type DS)**.** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{4 + u_n}}$.

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant \dfrac{3}{2^n}$.
2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.