

Applications

Exercice 1 (★). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$(x, y) \mapsto (x + y, x - y, x) \quad \text{et} \quad (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x + y) .$$

- Déterminer les images par f de $A = (-1, 0)$ et $B = (1, 2)$.
- Déterminer les images par g de $F = (2, 0, 1)$ et $G = (-3, 1, 2)$.
- Déterminer les antécédents par f de F et G .
- Déterminer les antécédents par g de A et B .
- f et g sont-elles injectives ? surjectives ?
- Définir les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 2 (★). Les applications suivantes sont-elles bien définies ? injectives ? surjectives ?

- $f_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $x \mapsto \frac{x}{2}$
- $f_2 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$
 $x \mapsto \frac{x}{2}$
- $f_3 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $x \mapsto 2x$
- $f_4 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$
 $x \mapsto 2x$
- $f_5 : \mathbb{N} \times \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $(a, s) \mapsto s \times a$
- $f_6 : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$
 $(a, b) \mapsto \frac{a}{b}$

Exercice 3 (★★). Pour chacune des fonctions f suivantes, montrer que f est bijective pour un ensemble J à déterminer. Expliciter ensuite sa réciproque f^{-1} .

- $f : \mathbb{R} \rightarrow J$
 $t \mapsto 1 + e^t$
- $f : \mathbb{R} \rightarrow J$
 $s \mapsto \frac{-1}{2}s - 1$
- $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow J$
 $x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}$
- $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow J$
 $t \mapsto t + t^2$

Exercice 4 (★). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$(x, y) \mapsto (2x + y, x - y) .$$

La fonction f est-elle bijective ? Si oui, définir f^{-1} .

Exercice 5 (★★). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$:

$$x \mapsto \frac{x}{1 + |x|} .$$

Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} .

Exercice 6 (★★). On pose la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$x \mapsto e^{x^2} + 1 .$$

Note : ici, e^{x^2} désigne le nombre $\exp(x^2)$ et pas $(\exp(x))^2$.

- Montrer que f n'est ni injective, ni surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle J à préciser, ainsi qu'une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans J . On explicitera les applications réciproques de ces deux bijections.

Exercice 7 (★★). Soit a une application définie de E dans F et b une application définie de F dans G .

- Prouver que : $b \circ a$ injective sur $E \implies a$ injective sur E .
- Prouver que : $b \circ a$ surjective de E dans $G \implies b$ surjective de F dans G .

Exercice 8 (Type DS). On s'intéresse à l'application $h : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$x \mapsto 1 - x^2 .$$

- La fonction h est-elle injective ? surjective ?
- Soit $h_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$
 $x \mapsto 1 - x^2$. Montrer que h_1 est bijective et déterminer h_1^{-1} .
- Soit $h_1 : [-1, 0] \rightarrow [0, 1]$
 $x \mapsto 1 - x^2$. Montrer que h_2 est bijective et déterminer h_2^{-1} .