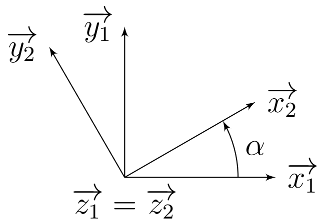
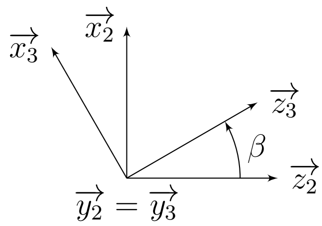
Applications de calcul vectoriel

— *Éléments de correction du TD* —

1 Centrifugeuse de laboratoire

Avec la description du sujet, il vient les figures géométrales :





Question 1. Par relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{O_1A_3} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} + \overrightarrow{O_3A_3} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\overrightarrow{O_1A_3} = h\overrightarrow{z_1} + R\overrightarrow{x_2} + \ell\overrightarrow{x_3}}$$

Question 2. Par définition, on a :

$$\left\|\overrightarrow{O_1A_3}\right\|^2 = \overrightarrow{O_1A_3} \cdot \overrightarrow{O_1A_3} = h^2 + R^2 + \ell^2 + 2hR\overrightarrow{z_1} \cdot \overrightarrow{x_2} + 2h\ell\overrightarrow{z_1} \cdot \overrightarrow{x_3} + 2R\ell\overrightarrow{x_2} \cdot \overrightarrow{x_3}$$

avec

$$\overrightarrow{z_1} \cdot \overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{z_2} \cdot \overrightarrow{x_2} = 0, \qquad \overrightarrow{z_1} \cdot \overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{z_2} \cdot \overrightarrow{x_3} = -\sin(\beta), \qquad \overrightarrow{x_2} \cdot \overrightarrow{x_3} = \cos(\beta)$$

il vient :

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{O_1A_3}\right\| = \sqrt{h^2 + R^2 + \ell^2 + 2\ell\left(R\cos(\beta) - h\sin(\beta)\right)}}$$

Question 3. Avec la figure géométrale reliant les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, il vient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{x_1} &= -\sin(\alpha)\overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{y_2} &= \cos(\alpha)\overrightarrow{z_1} \end{aligned}$$

Dans la base $\mathcal{B}_2$, on a :

$$\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{z_2} = -\overrightarrow{y_2}$$

Avec la figure géométrale reliant les bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$, il vient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x_3} \wedge \overrightarrow{z_1} &= \overrightarrow{x_3} \wedge \overrightarrow{z_2} = -\cos(\beta)\overrightarrow{y_2} \\ \overrightarrow{z_3} \wedge \overrightarrow{z_1} &= \overrightarrow{z_3} \wedge \overrightarrow{z_2} = -\sin(\beta)\overrightarrow{y_2} \end{aligned}$$

Sachant que $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{x_3}$ ne sont pas deux vecteurs dont les bases sont reliées par une figure géométrale, il y a deux possibilités pour faire le calcul :

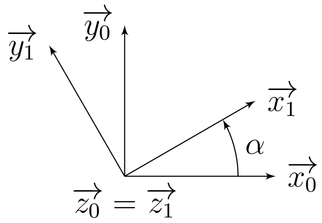
1. exprimer $\overrightarrow{x_3}$ dans $\mathcal{B}_2$
$$\overrightarrow{x_3} = \cos(\beta)\overrightarrow{x_2} - \sin(\beta)\overrightarrow{z_2}$$
   et utiliser la figure géométrale reliant les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Dans ce cas, il vient :
$$\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{x_1} \wedge (\cos(\beta)\overrightarrow{x_2} - \sin(\beta)\overrightarrow{z_2})$$
   Par linéarité du produit vectoriel et avec
$$\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_2} = \sin(\alpha)\overrightarrow{z_1}, \qquad \overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{z_2} = \overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{z_1} = -\overrightarrow{y_1}$$
   il vient :
$$\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_3} = \sin(\beta)\overrightarrow{y_1} + \cos(\beta)\sin(\alpha)\overrightarrow{z_1}$$
2. exprimer $\overrightarrow{x_1}$ dans $\mathcal{B}_2$
$$\overrightarrow{x_1} = \cos(\alpha)\overrightarrow{x_2} - \sin(\alpha)\overrightarrow{y_2}$$
   et utiliser la figure géométrale reliant les bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$. Dans ce cas, il vient :
$$\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_3} = (\cos(\alpha)\overrightarrow{x_2} - \sin(\alpha)\overrightarrow{y_2}) \wedge \overrightarrow{x_3}$$
   Par linéarité du produit vectoriel et avec
$$\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{x_3} = \sin(\beta)\overrightarrow{y_2}, \qquad \overrightarrow{y_2} \wedge \overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{y_3} \wedge \overrightarrow{x_3} = -\overrightarrow{z_3}$$
   il vient :
$$\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_3} = \cos(\alpha)\sin(\beta)\overrightarrow{y_2} + \sin(\alpha)\overrightarrow{z_3}$$

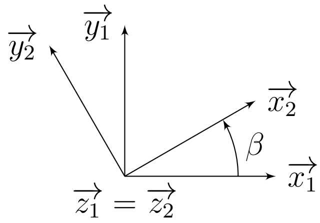
Ce sont deux expressions du même vecteur. En effet, partant de :
$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{y_2} = \cos(\alpha)\overrightarrow{y_1} \\
&\overrightarrow{z_3} = \cos(\beta)\overrightarrow{z_2} + \sin(\beta)\overrightarrow{x_2} = \cos(\beta)\overrightarrow{z_1} + \sin(\beta)\left(\cos(\alpha)\overrightarrow{x_1} + \sin(\alpha)\overrightarrow{y_1}\right)
\end{aligned}$$
on retrouve bien la première expression trouvée dans la base $\mathcal{B}_1$.

On peut procéder de la même façon pour $\overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{z_3}$; soit :
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{z_3} &= \overrightarrow{y_1} \wedge (\cos(\beta)\overrightarrow{z_2} + \sin(\beta)\overrightarrow{x_2}) \\
&= \cos(\beta)\overrightarrow{x_1} - \sin(\beta)\sin(\alpha)\overrightarrow{z_1} \\
&\text{ou} \\
&= (\cos(\alpha)\overrightarrow{y_2} + \sin(\alpha)\overrightarrow{x_2}) \wedge \overrightarrow{z_3} \\
&= \cos(\alpha)\overrightarrow{x_3} - \sin(\alpha)\cos(\beta)\overrightarrow{y_2}
\end{aligned}$$

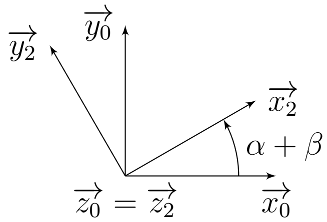
2 Robot Ericc3

Question 4. Avec la description du sujet, il vient les figures géométrales :





qui sont toutes deux coplanaires et nous autorisent donc à réaliser une troisième figure géométrale permettant de relier directement les bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_2$:



Question 5. Par relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \ell_1 \overrightarrow{x_1} + \ell_2 \overrightarrow{x_2}$$

d'où

$$\left\| \overrightarrow{OB} \right\|^2 = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} = \ell_1^2 + \ell_2^2 + 2\ell_1 \ell_2 \overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{x_2}$$

avec $\overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{x_2} = \cos(\beta)$, il vient :

$$\boxed{\left\| \overrightarrow{OB} \right\| = \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2 + 2\ell_1 \ell_2 \cos(\beta)}}$$

Question 6. La hauteur (direction $\overrightarrow{y_0}$) du point B par rapport au point O est définie comme la coordonnée :

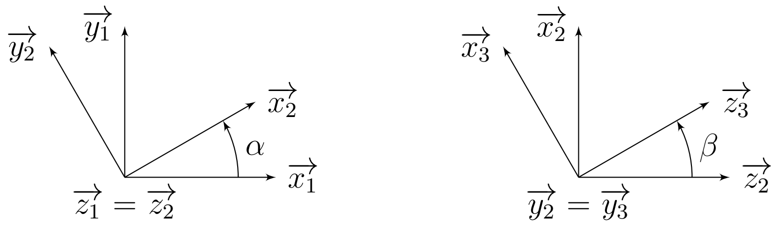
$$h = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{y_0} = (\ell_1 \overrightarrow{x_1} + \ell_2 \overrightarrow{x_2}) \cdot \overrightarrow{y_0}$$

d'où

$$\boxed{h = \ell_1 \sin(\alpha) + \ell_2 \sin(\alpha + \beta)}$$

3 « Robot de peinture »

Question 7. Avec la description du sujet, on constate que les bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$ sont confondues. Il vient les figures géométrales :



Question 8. Par relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{y_1} + H\overrightarrow{z_1} + L\overrightarrow{z_3}$$

On remarque que pour exprimer ce vecteur dans la base $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_1$, il est nécessaire d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{z_3}$ dans la base $\mathcal{B}_2$ puis dans la base $\mathcal{B}_1$, ce qui fait successivement apparaitre les angles α et β :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{z_3} &= \cos(\beta)\overrightarrow{z_2} + \sin(\beta)\overrightarrow{x_2} \\ &= \cos(\beta)\overrightarrow{z_1} + \sin(\beta)\left(\cos(\alpha)\overrightarrow{x_1} + \sin(\alpha)\overrightarrow{y_1}\right)\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = L\sin(\beta)\cos(\alpha)\overrightarrow{x_1} + \left(\lambda + L\sin(\beta)\sin(\alpha)\right)\overrightarrow{y_1} + \left(H + L\cos(\beta)\right)\overrightarrow{z_1}}$$

Soit avec les composantes dans $\mathcal{B}_0$:

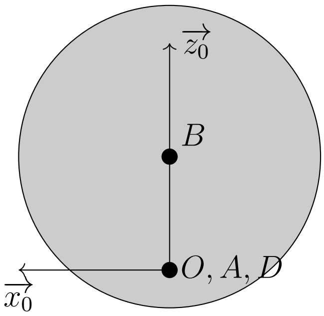
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{x_0} &= L\sin(\beta)\cos(\alpha) \\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{y_0} &= \lambda + L\sin(\beta)\sin(\alpha) \\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{z_0} &= H + L\cos(\beta)\end{aligned}$$

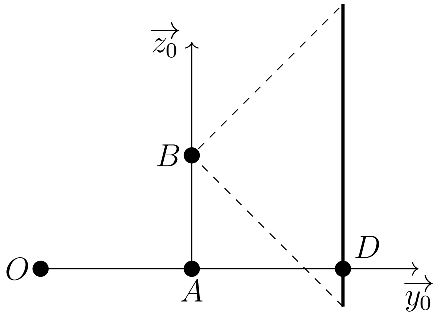
Question 9. Par composition des mobilités, on constate que le point P peut décrire librement la surface d'une sphère de centre B et de rayon L dans **1**. En ajoutant la mobilité en translation de **1** par rapport à **0**, l'ensemble des points accessibles par le point P est contenu dans un cylindre d'axe $(B, \overrightarrow{y_0})$ et de rayon L.

Ainsi, en limitant ses déplacements au plan de normale $\overrightarrow{y_0}$ passant par le point D, tel que

$$\overrightarrow{OD} = b\overrightarrow{y_0}$$

il vient que l'ensemble des positions accessibles est limité par le cercle de centre C tel que $\overrightarrow{DC} = H\overrightarrow{z_0}$ et de rayon L (défini comme l'intersection du plan et du cylindre). Il vient alors les figures :





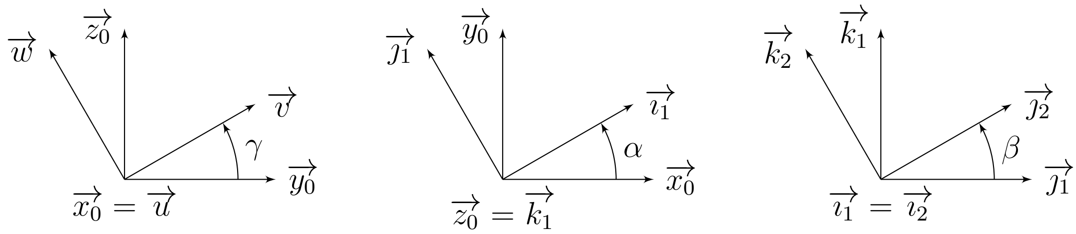
Enfin, on note que ces mouvements sont caractérisés par la contrainte :

$$\overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{y_0} = 0 \iff b = \lambda + L \sin(\beta) \sin(\alpha)$$

qui signifie que les trois paramètres λ, α et β ne sont plus indépendants et donc qu'il ne reste que deux mobilités (dans le plan).

4 « Fixie »

Question 10. Avec la description du sujet, il vient les figures géométrales :



Question 11. Par relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = d\,\overrightarrow{u} + e\,\overrightarrow{v} + f\,\overrightarrow{u}$$

d'où

$$\boxed{\overrightarrow{AF} = (d+f)\,\overrightarrow{u} + e\,\overrightarrow{v}}$$

Question 12. Sachant que, par anti-symétrie du produit vectoriel, on a

$$\overrightarrow{V_F} = \overrightarrow{FA} \wedge \omega_P \overrightarrow{x_0} = \omega_P \overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{AF}$$

et avec $\overrightarrow{x_0} = \overrightarrow{u}$:

$$\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$$

il vient :

$$\boxed{\overrightarrow{V_F} = e\omega_P \overrightarrow{w}}$$

Question 13. Partant de

$$\overrightarrow{V_H} = \overrightarrow{HO_2} \wedge (\omega_F \overrightarrow{z_0} + \omega_r \overrightarrow{\imath_1})$$

avec $\overrightarrow{HO_2} = -r\overrightarrow{\jmath_2}$, il vient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\jmath_2} \wedge \overrightarrow{z_0} &= \overrightarrow{\jmath_2} \wedge \overrightarrow{k_1} = \cos(\beta)\overrightarrow{\imath_1} \\ \overrightarrow{\jmath_2} \wedge \overrightarrow{\imath_1} &= \overrightarrow{\jmath_2} \wedge \overrightarrow{\imath_2} = -\overrightarrow{k_2}\end{aligned}$$

il vient :

$$\boxed{\overrightarrow{V_H} = r\left(\omega_r \overrightarrow{k_2} - \omega_F \cos(\beta)\overrightarrow{\imath_1}\right)}$$