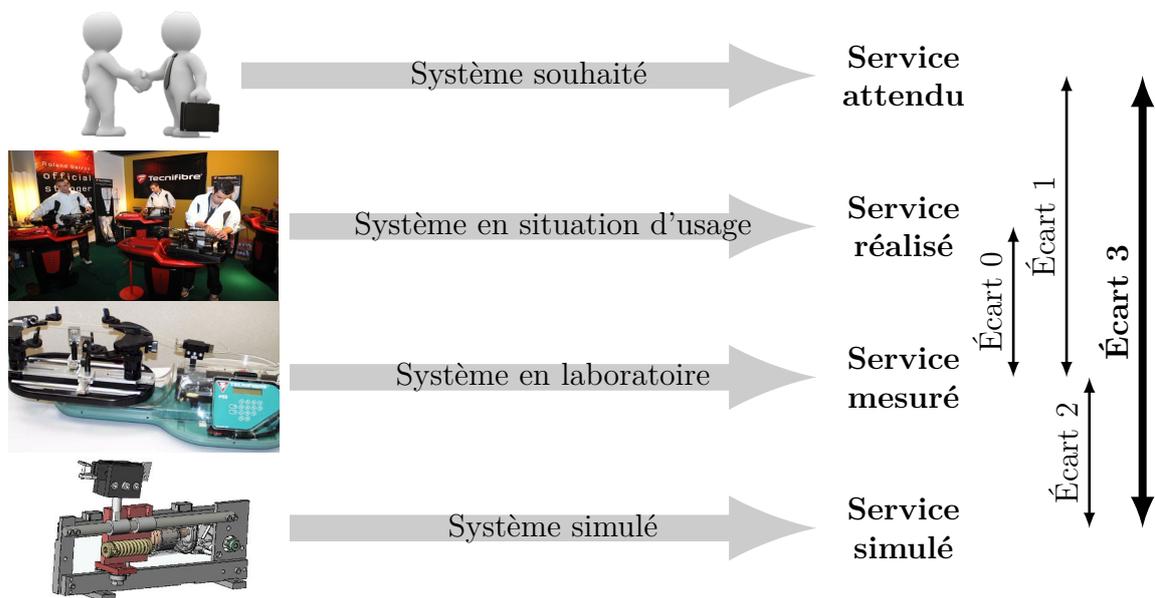


# Modélisation des systèmes et paramétrage cinématique

— *Éléments de correction des TDs* —



**Écart 0** – évalue la fiabilité et la fidélité du système de laboratoire didactisé par rapport au système réel. Il répond aux questions « le système de laboratoire est-il représentatif du système réel ? Permet-il de l'étudier de manière fiable ? »

**Écart 1** – évalue le respect du CDCF par le système réel sur prototype instrumenté en laboratoire. Il répond à la question « le système réalisé, répond-il au CDCF ? ».

**Écart 2** – évalue la fiabilité du modèle et de ses hypothèses. Il répond à la question « le modèle est-il correct ? ».

**Écart 3** – évalue, en phase de conception, le respect du CDCF à partir d'un modèle simulé. Il répond à la question « le modèle du système satisfait-il les exigences du CDCF ? ».

*Activités de TD*

## Exercices

Exercice 1 – Modélisation cinématique de trois systèmes .....	3
Exercice 2 – Extracteur de pièces de fonderie .....	7
Exercice 3 – Mécanisme de levage .....	10
Exercice 4 – Échelle Pivotante Automatique à commande Séquentielle .....	12
Exercice 5 – Pompe hydraulique à pistons radiaux .....	14
Exercice 6 – Modélisation du système de distribution VTEC .....	16
Exercice 7 – Système d'aide à la navigation .....	18



Nicolas Mesnier, lycée Jean Perrin, Lyon  
Compléments & mises à jour sur le site des PCSI

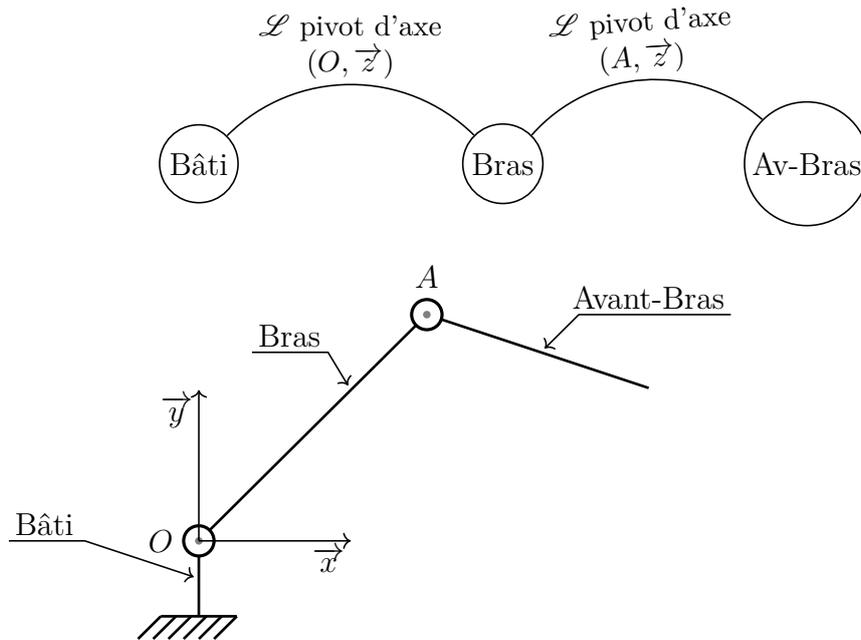
<https://cahier-de-prepa.fr/pcsi-perrin>

— Version du 8 janvier 2024 —

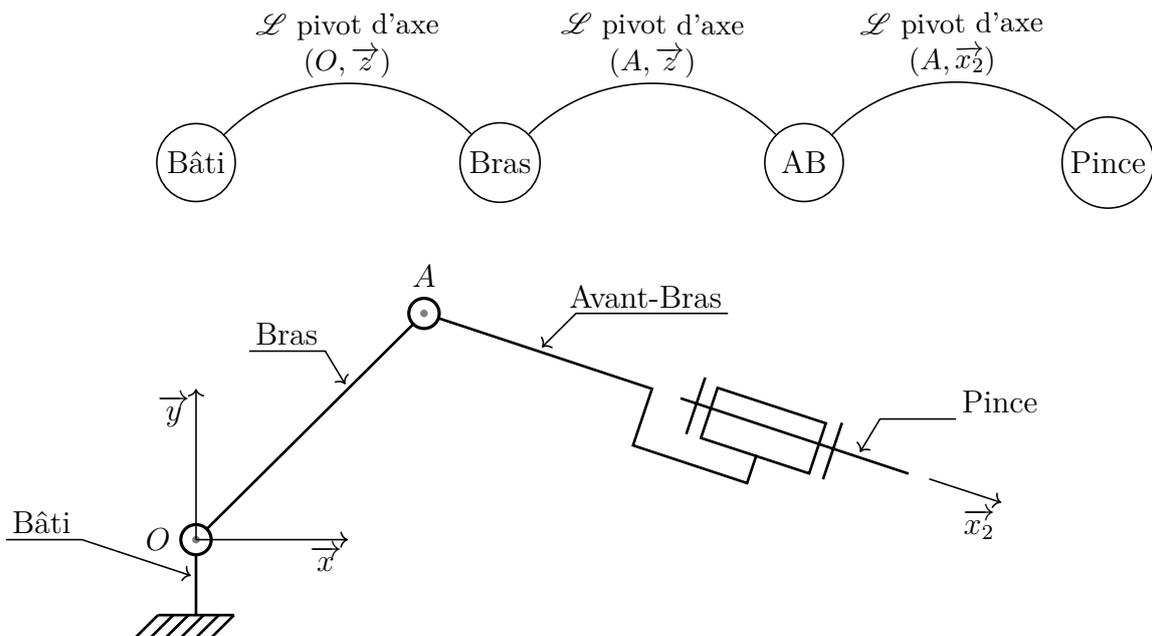
## Modélisation cinématique de trois systèmes

### 1.1 Robot Ericc3

#### Sous-système 1



#### Sous-système 2



### Sous-système 3

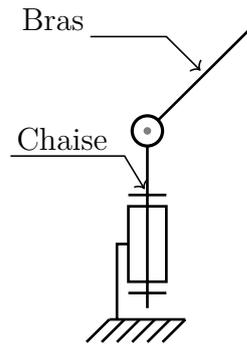
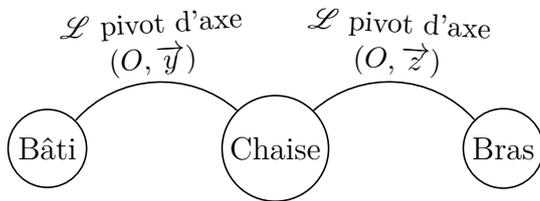
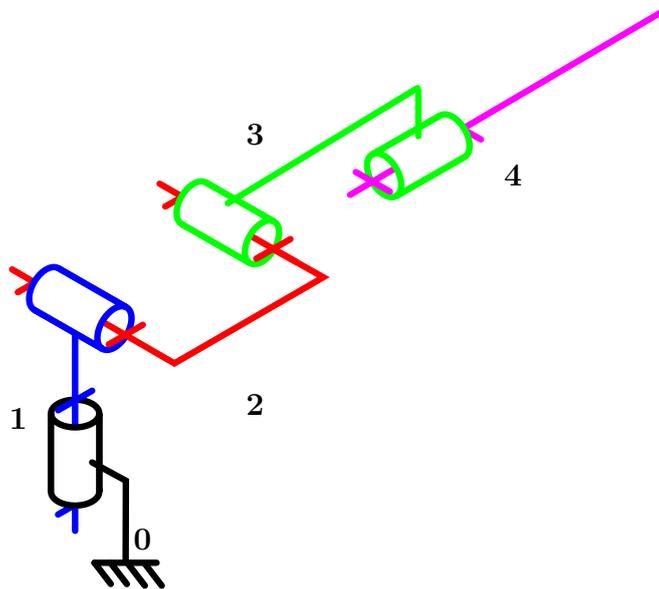
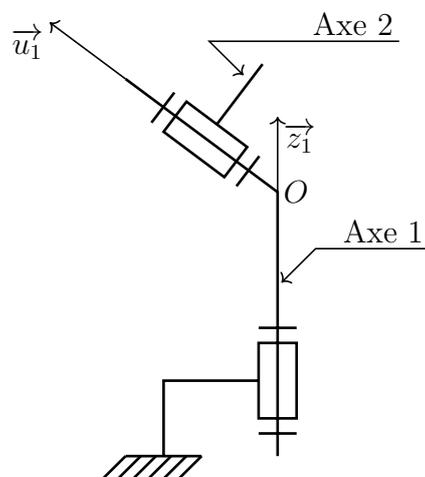
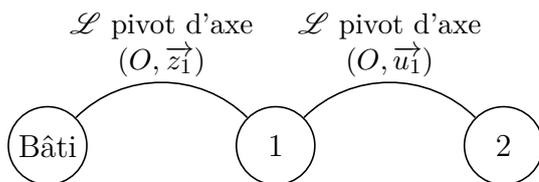
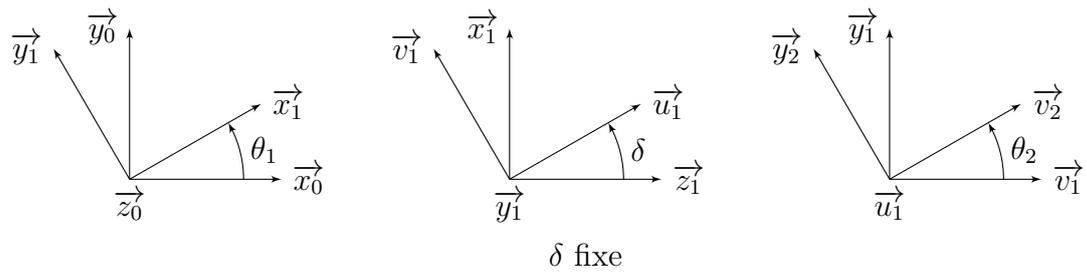


Schéma cinématique de l'ensemble du robot :

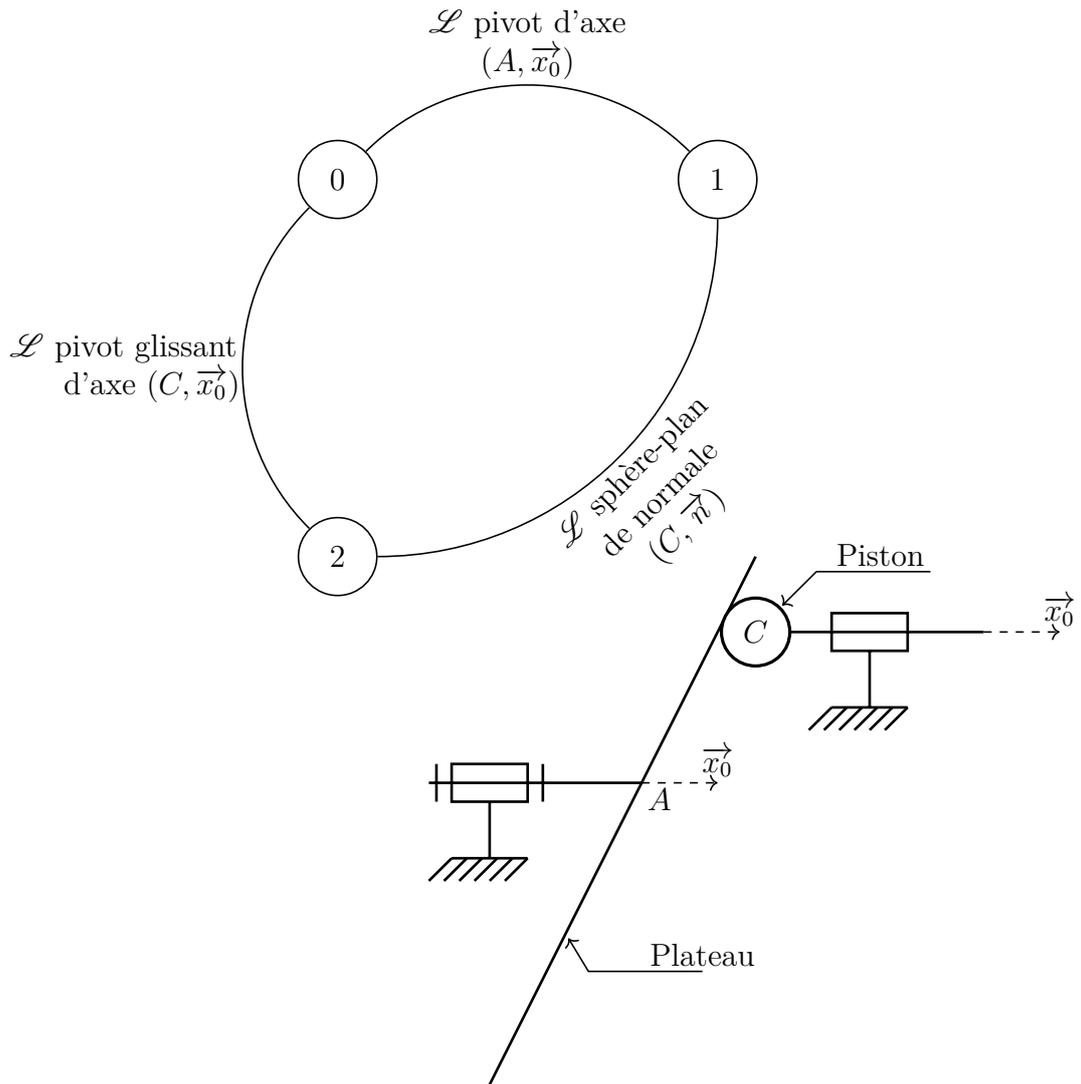


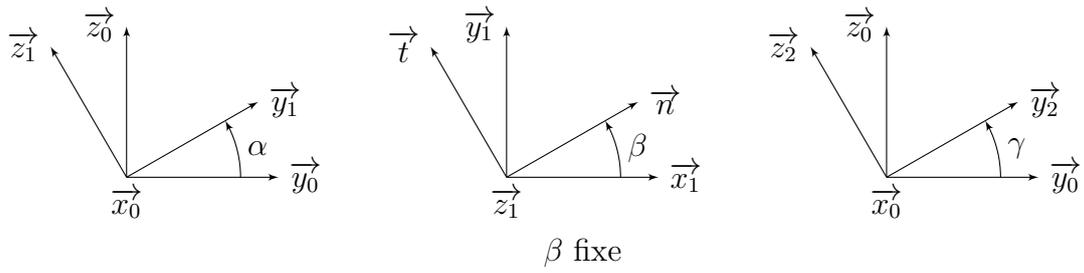
### 1.2 Tête de fraise Huron





### 1.3 Pompe à pistons axiaux





Le mouvement d'entrée est associé à l'angle  $\alpha$ .

Le mouvement de sortie est associé à la position  $\lambda$  telle que

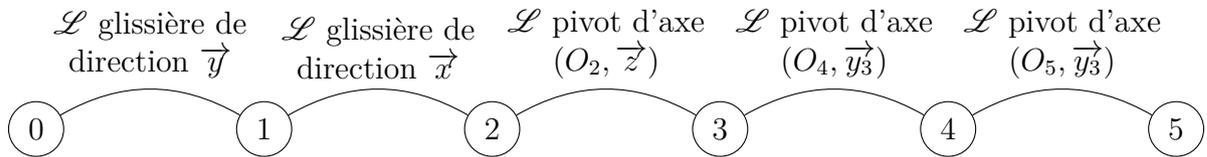
$$\overrightarrow{AC'} = \lambda \overrightarrow{x_0} + h \overrightarrow{y_0}, \quad \lambda \text{ variable.}$$

L'angle  $\gamma$  est une mobilité interne.

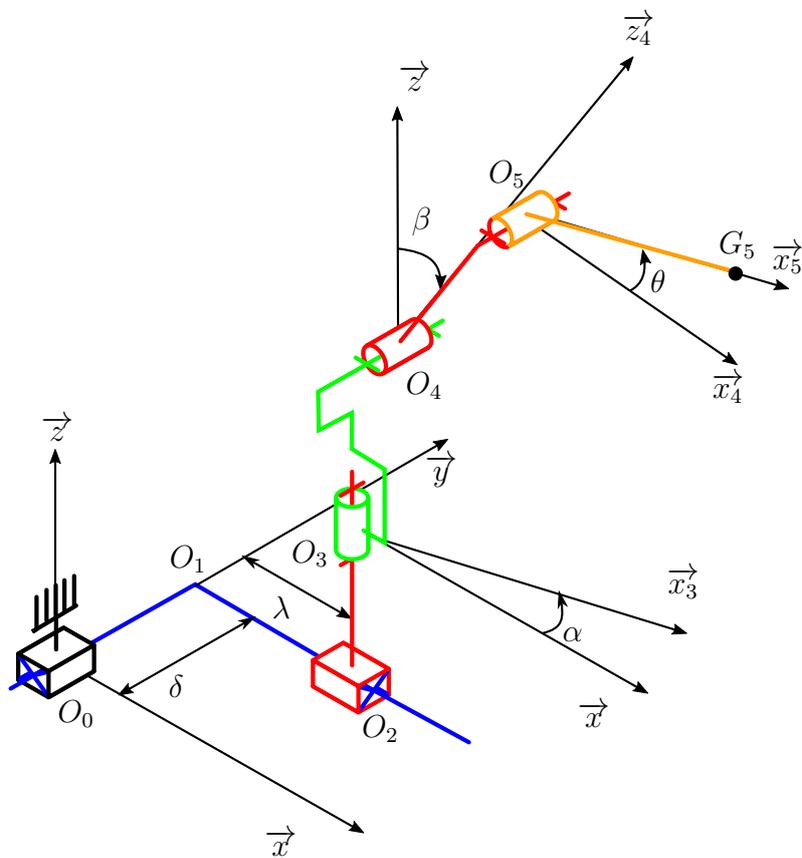
— EXERCICE 2 —

## Extracteur de pièces de fonderie

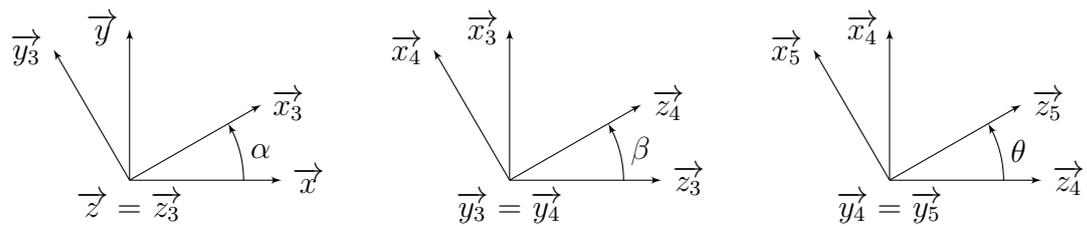
Question 2.1.



Question 2.2.



Question 2.3.



**Question 2.4.** Par relation de Chasles, il vient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O_0G_5} &= \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} + \overrightarrow{O_3O_4} + \overrightarrow{O_4O_5} \\ &= \delta \vec{y} + \lambda \vec{x} + (c+d) \vec{z} + h \vec{z}_4 + b \vec{x}_5\end{aligned}$$

**Question 2.5.** D'après la figure géométrale reliant les bases  $\mathcal{B}_4$  et  $\mathcal{B}_5$ , on a :

$$\vec{x}_5 = \cos(\theta) \vec{x}_4 - \sin(\theta) \vec{z}_4$$

**Question 2.6.** Comme les bases  $\mathcal{B}_0$  et  $\mathcal{B}_2$  sont confondues, on a  $\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \vec{0}$ .

D'après la première figure géométrale de normale  $\vec{z}$  et de variation d'angle  $\dot{\alpha}$ , il vient :

$$\overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \dot{\alpha} \vec{z}$$

De même, avec les deux autres figures géométrales, on trouve :

$$\overrightarrow{\Omega_{4/3}} = \dot{\beta} \vec{y}_3 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\Omega_{5/4}} = \dot{\theta} \vec{y}_3$$

Il vient alors par composition des taux de rotation :

$$\overrightarrow{\Omega_{4/0}} = \overrightarrow{\Omega_{4/3}} + \overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \dot{\beta} \vec{y}_3 + \dot{\alpha} \vec{z}$$

et

$$\overrightarrow{\Omega_{5/0}} = \overrightarrow{\Omega_{5/4}} + \overrightarrow{\Omega_{4/0}} = (\dot{\beta} + \dot{\theta}) \vec{y}_3 + \dot{\alpha} \vec{z}$$

**Question 2.7.**

$$\begin{aligned}\vec{z} \wedge \vec{z}_4 &= \vec{z}_3 \wedge \vec{z}_4 = \sin(\beta) \vec{y}_3 \\ \vec{y}_3 \wedge \vec{z}_4 &= \vec{y}_4 \wedge \vec{z}_4 = \vec{x}_4 \\ \vec{z} \wedge \vec{x}_5 &= \vec{z}_3 \wedge \vec{x}_5 = \cos(\theta + \beta) \vec{y}_3 \\ \vec{y}_3 \wedge \vec{x}_5 &= \vec{y}_5 \wedge \vec{x}_5 = -\vec{z}_5\end{aligned}$$

**Question 2.8.** Par définition, la vitesse du point  $G_5$  appartenant à  $\mathbf{5}$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  est

$$\overrightarrow{V_{G_5,5/0}} = \left. \frac{d\overrightarrow{O_0G_5}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = \dot{\delta} \vec{y} + \dot{\lambda} \vec{x} + h \left. \frac{d\vec{z}_4}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} + b \left. \frac{d\vec{x}_5}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0}$$

Avec, par formule de dérivation vectorielle :

$$\left. \frac{d\vec{z}_4}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = \underbrace{\left. \frac{d\vec{z}_4}{dt} \right|_{\mathcal{B}_4}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega_{4/0}} \wedge \vec{z}_4 = (\dot{\beta} \vec{y}_3 + \dot{\alpha} \vec{z}) \wedge \vec{z}_4 = \dot{\beta} \vec{x}_4 + \dot{\alpha} \sin(\beta) \vec{y}_3$$

$$\left. \frac{d\vec{x}_5}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = \underbrace{\left. \frac{d\vec{x}_5}{dt} \right|_{\mathcal{B}_5}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega_{5/0}} \wedge \vec{x}_5 = ((\dot{\beta} + \dot{\theta}) \vec{y}_3 + \dot{\alpha} \vec{z}) \wedge \vec{x}_5 = -(\dot{\beta} + \dot{\theta}) \vec{z}_5 + \dot{\alpha} \cos(\theta + \beta) \vec{y}_3$$

il vient finalement

$$\boxed{\overrightarrow{V_{G_5,5/0}} = \dot{\delta} \vec{y} + \dot{\lambda} \vec{x} + h (\dot{\beta} \vec{x}_4 + \dot{\alpha} \sin(\beta) \vec{y}_3) + b (\dot{\alpha} \cos(\theta + \beta) \vec{y}_3 - (\dot{\beta} + \dot{\theta}) \vec{z}_5)}$$

Si seules les liaisons  $\mathcal{L}_{1/0}$  et  $\mathcal{L}_{4/3}$  sont actives, alors on a  $\dot{\lambda} = 0$  et  $\dot{\alpha} = \dot{\theta} = 0$ . Avec de plus  $\alpha = \theta = 0$ , il vient :

$$\overrightarrow{V_{G_5,5/0}} = \dot{\delta} \overrightarrow{y} + \dot{\beta} (h \overrightarrow{x}_4 - b \overrightarrow{z}_5)$$

**Question 2.9.** Par définition, l'accélération du point  $G_5$  appartenant à **5** dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  est :

$$\overrightarrow{\Gamma_{G_5,5/0}} = \left. \frac{d\overrightarrow{V_{G_5,5/0}}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = \ddot{\delta} \overrightarrow{y} + \ddot{\beta} (h \overrightarrow{x}_4 - b \overrightarrow{z}_5) + \dot{\beta} \left( h \left. \frac{d\overrightarrow{x}_4}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} - b \left. \frac{d\overrightarrow{z}_5}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} \right)$$

Avec  $\ddot{\beta} = 0$  et

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\overrightarrow{x}_4}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} &= \underbrace{\left. \frac{d\overrightarrow{x}_4}{dt} \right|_{\mathcal{B}_4}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{\Omega}_{4/0} \wedge \overrightarrow{x}_4 = \dot{\beta} \overrightarrow{y}_3 \wedge \overrightarrow{x}_4 = -\dot{\beta} \overrightarrow{z}_4 \\ \left. \frac{d\overrightarrow{z}_5}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} &= \underbrace{\left. \frac{d\overrightarrow{z}_5}{dt} \right|_{\mathcal{B}_5}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{\Omega}_{5/0} \wedge \overrightarrow{z}_5 = \dot{\beta} \overrightarrow{y}_3 \wedge \overrightarrow{z}_5 = \dot{\beta} \overrightarrow{x}_5 \end{aligned}$$

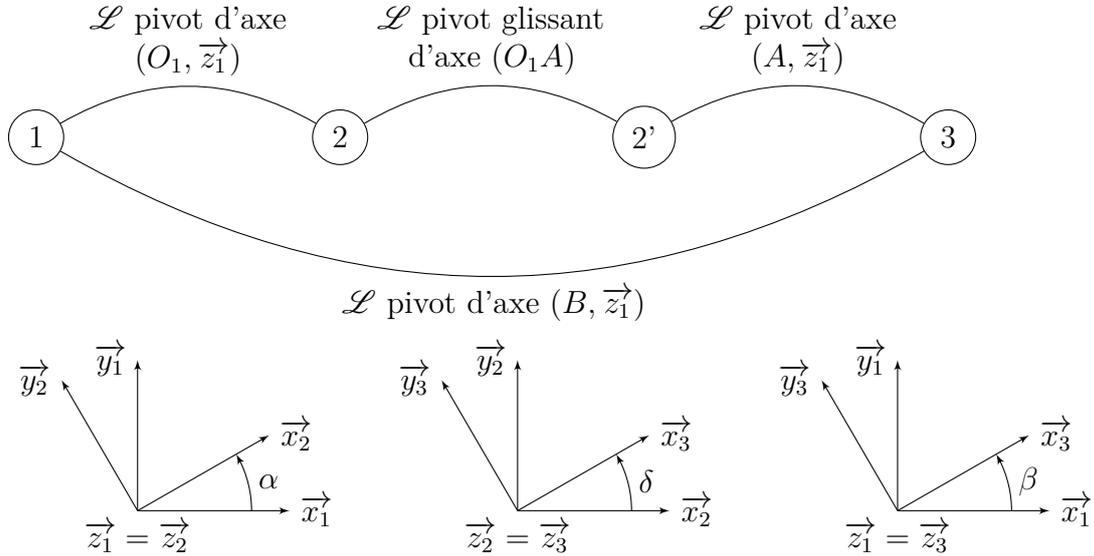
il vient finalement

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_{G_5,5/0}} = \dot{\delta} \overrightarrow{y} - \dot{\beta}^2 (h \overrightarrow{z}_4 + b \overrightarrow{x}_5)}$$

**Question 2.10.** Pour conclure quant au respect du cahier des charges, il est nécessaire que calculer la norme de la vitesse et de l'accélération, mais il manque les valeurs maximales de  $\dot{\delta}$ ,  $\ddot{\delta}$  et  $\dot{\beta}$ .

## Mécanisme de levage

Question 3.1.



Question 3.2. Par relation de Chasles, il vient :

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO_1} \\ &= \lambda \vec{x}_2 + b \vec{x}_3 - a \vec{x}_1 \end{aligned}$$

Pour faire apparaître la mesure d'angle  $\beta$ , il est nécessaire de projeter cette expression dans la base  $\mathcal{B}_1$  ou dans la base  $\mathcal{B}_3$ . Dans les deux cas il y a aura une mesure d'angle en plus à faire disparaître. Dans la base  $\mathcal{B}_1$ , il vient :

$$\begin{cases} / \vec{x}_1 : & 0 = \lambda \cos(\alpha) + b \cos(\beta) - a \\ / \vec{y}_1 : & 0 = \lambda \sin(\alpha) + b \sin(\beta) \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda \cos(\alpha) = a - b \cos(\beta) \\ \lambda \sin(\alpha) = -b \sin(\beta) \end{cases}$$

En élevant au carré les deux expressions, il vient par somme :

$$\lambda^2 = (a - b \cos(\beta))^2 + b^2 \sin^2(\beta)$$

Prenant  $b < a$ , il vient dans la configuration  $\alpha \equiv 0 [2\pi]$ ,  $\lambda = a - b > 0$  d'où

$$\boxed{\lambda = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\beta)}}$$

Question 3.3. Notant  $\lambda : \beta \mapsto \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\beta)}$ , il vient par dérivation de fonctions composées

$$\lambda \frac{d\lambda}{d\beta} \times \frac{d\beta}{dt} = \frac{ab \sin(\beta)}{\lambda(\beta)} \dot{\beta}$$

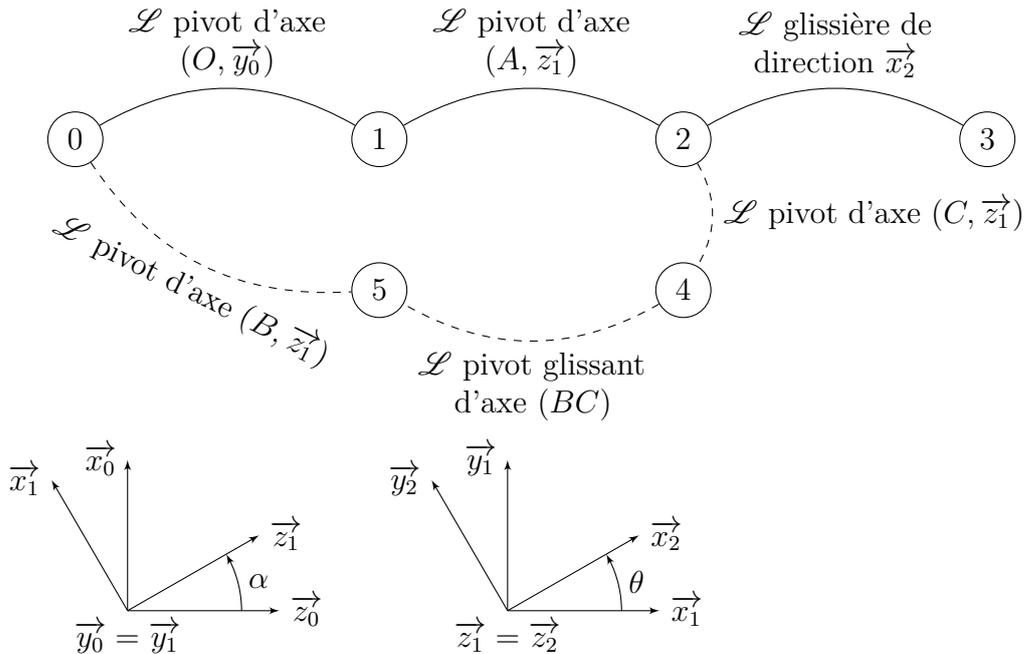
d'où

$$\dot{\beta} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\beta)}}{ab \sin(\beta)} \dot{\lambda}$$

C'est une relation cinématiquement linéaire mais géométriquement non-linéaire.

## Échelle Pivotante Automatique à commande Séquentielle

Question 4.1.



Par définition, avec la première figure géométrale de normale  $\vec{y}_0$  et de variation d'angle  $\dot{\alpha}$ , il vient :

$$\overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha} \vec{y}_0$$

De même avec la deuxième, on trouve :

$$\overrightarrow{\Omega}_{2/1} = \dot{\theta} \vec{z}_1$$

**Question 4.2.** Par composition des mouvements, la trajectoire du point  $D$  de la nacelle liée à l'échelle **3** dans son mouvement par rapport au châssis **0** dépend de trois contributions :

$T_{D/2}$  Comme  $\{\mathcal{V}_{3/2}\}$  est une translation de direction  $\vec{x}_2$ , le point  $D \in S_3$  décrit dans  $\mathcal{R}_2$  un segment sur la droite  $(AD)$  ;

$T_{D \in 2/1}$  Comme  $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$  est une rotation d'axe  $(A, \vec{z}_1)$ , le point  $D \in S_2$  décrit dans  $\mathcal{R}_1$  un arc de cercle de centre  $O$ , de rayon  $AD = c + d$ , dans le plan de normale  $\vec{z}_1$  ;

$T_{D \in 1/0}$  Comme  $\{\mathcal{V}_{1/0}\}$  est une rotation d'axe  $(O, \vec{y}_1)$ , le point  $D \in S_1$  décrit dans  $\mathcal{R}_0$  un arc de cercle de centre  $H$ , le projeté orthogonal du point  $D$  sur la droite  $(O, \vec{y}_1)$ , de rayon  $\|\overrightarrow{OD} \wedge \vec{y}_0\|$ , dans le plan de normale  $\vec{y}_0$ .

**Question 4.3.** Par définition, la position du point  $D$  par rapport au bâti  $\mathcal{R}_0$  d'origine  $O$  est définie par le vecteur  $\overrightarrow{OD}$ . Par relation de Chasles, il vient :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = a\vec{y}_0 - b\vec{x}_1 + (c+d)\vec{x}_2$$

Définissant la hauteur comme

$$h = \overrightarrow{OD} \cdot \vec{y}_0 = a + (c+d)\sin(\theta)$$

il vient avec les données du sujet que la hauteur maximale atteignable est :

$$h_{\max} = a + (c + d_{\max}) \sin(\theta_{\max}) = 0,5 + (1 + 25) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1 + 26\sqrt{3}}{2} \approx 23 \text{ m}$$

**Question 4.4.** Par définition, la vitesse du point  $D$  appartenant à l'échelle  $\mathbf{3}$  dans son mouvement par rapport au châssis  $\mathbf{0}$  est

$$\overrightarrow{V}_{D,3/0} = \left. \frac{d\overrightarrow{OD}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = -b \left. \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} + \dot{d}\vec{x}_2 + (c+d) \left. \frac{d\vec{x}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0}$$

avec, par formule de dérivation vectorielle,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} &= \left. \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right|_{\mathcal{B}_1} + \overrightarrow{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{x}_1 = -\dot{\alpha} \vec{z}_1 \\ \left. \frac{d\vec{x}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} &= \left. \frac{d\vec{x}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_2} + \overrightarrow{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{x}_2 = (\dot{\alpha} \vec{y}_0 + \dot{\theta} \vec{z}_1) \wedge \vec{x}_2 = -\dot{\alpha} \cos(\theta) \vec{z}_1 + \dot{\theta} \vec{y}_2 \end{aligned}$$

il vient finalement

$$\boxed{\overrightarrow{V}_{D,3/0} = \underbrace{\dot{\alpha} (b - (c+d) \cos(\theta)) \vec{z}_1}_{\overrightarrow{V}_{D,1/0}} + \underbrace{\dot{\theta} (c+d) \vec{y}_2}_{\overrightarrow{V}_{D,2/1}} + \underbrace{\dot{d} \vec{x}_2}_{\overrightarrow{V}_{D,3/2}}}$$

**Question 4.5.** Considérant la liaison  $\mathcal{L}_{1/0}$  bloquée, c'est-à-dire avec  $\dot{\alpha} = 0$ , et sachant que  $\overrightarrow{V}_{D,3/0}$  est directement exprimée dans la base orthonormale  $\mathcal{B}_2$ , il vient :

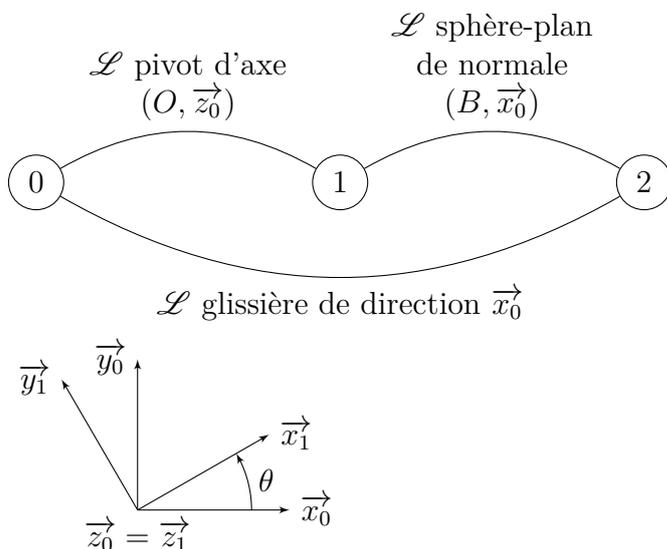
$$\boxed{\|\overrightarrow{V}_{D,3/0}\| = \sqrt{\dot{\theta}^2 (c+d)^2 + \dot{d}^2} \leq 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

**Question 4.6.** En faisant l'hypothèse d'une vitesse  $\dot{d}$  constante, il vient

$$\sqrt{\dot{\theta}^2 (c+d)^2 + \dot{d}^2} \leq v_{\max} \iff \boxed{|\dot{\theta}| \leq \sqrt{\frac{v_{\max}^2 - \dot{d}^2}{c+d}}}$$

## Pompe hydraulique à pistons radiaux

Question 5.1.



L'entrée du mécanisme est le mouvement de rotation continue de 1 par rapport à 0. Le mouvement de sortie est la translation alternative de 2 par rapport à 0.

Question 5.2. Par relation de Chasles, il vient :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \iff X\vec{x}_0 = e\vec{x}_1 + R\vec{x}_0 + \lambda\vec{y}_0$$

Il vient en projection dans la base  $\mathcal{B}_0$

$$\begin{cases} /x_0 : & X = e \cos(\theta) + R \\ /y_0 : & 0 = e \sin(\theta) + \lambda \end{cases}$$

Question 5.3. Par dérivation, il vient

$$\dot{X} = -e \sin(\theta) \dot{\theta}$$

Question 5.4. Le débit instantané correspond au flux sortant. Il faut donc distinguer l'admission en fluide à comprimer du refoulement de celui qui vient d'être comprimé.

$$Q_i = \max(0; S \dot{X}(t)) = \frac{S}{2} (\dot{X} + |\dot{X}|)$$

où pour ne garder que l'alternance positive de la translation, nous avons fait sa moyenne avec sa valeur absolue.

**Question 5.5.** On a, à vitesse constante  $\dot{\theta} = \omega > 0$ , l'expression du débit instantané

$$Q_i = \frac{eS}{2} (\sin(\theta) + |\sin(\theta)|) \omega$$

**Question 5.6.** En tenant compte du fait que la pompe comporte trois pistons équi-répartis angulairement, il vient l'expression du débit instantané total

$$Q = \sum_{i=0}^2 Q_i = \frac{eS}{2} \sum_{i=0}^2 \left( \sin\left(\theta + \frac{2i\pi}{3}\right) + \left| \sin\left(\theta + \frac{2i\pi}{3}\right) \right| \right) \dot{\theta}$$

Le débit moyen par piston est défini par :

$$\bar{Q}_i = \int_0^{2\pi} \frac{eS}{2} \omega (\sin(\theta) + |\sin(\theta)|) d\theta = eS\omega \left( \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} 0 d\theta \right) = 2eS\omega$$

conduisant, par somme, au débit moyen avec 3 pistons

$$\boxed{\bar{Q} = 6eS\omega}$$

**Question 5.7.** Avec des pistons de section circulaire de diamètre  $D = 5$  mm et  $e = 10$  mm, il vient :

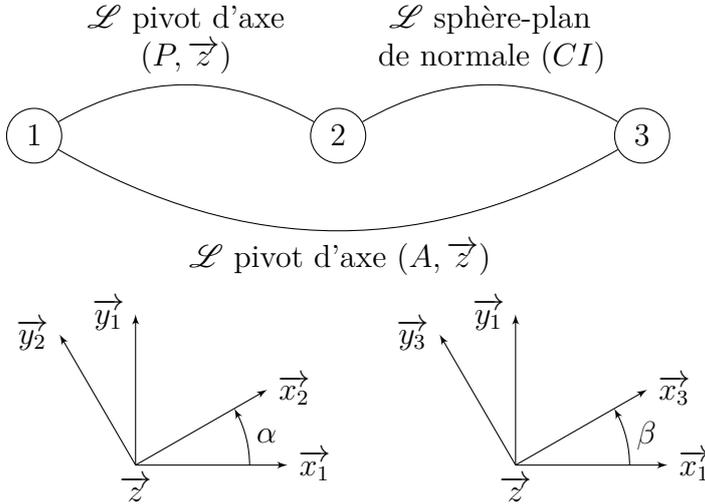
$$0,5 \text{ L/min} = \frac{1}{120 \times 10^3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \leq \bar{Q} = \frac{6\pi e D^2}{4} \omega \leq 20 \text{ L/min}$$

d'où la vitesse de rotation minimale permettant de respecter le cahier des charges :

$$\boxed{\omega \geq \frac{1}{180 \times 10^3 \pi e D^2} \approx 7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$$

## Modélisation du système de distribution VTEC

**Question 6.1.**



**Question 6.2.** Par définition d'une liaison sphère-plan, la normale au contact dans le plan  $(I, \vec{z}, \vec{x}_3)$  est la droite  $(CI) = (I, \vec{y}_3)$ . Avec  $CI = R$ , il vient

$$\boxed{\overrightarrow{CI} = R\vec{y}_3}$$

Pour montrer qu'il doit y avoir nécessairement glissement en  $I$  entre les pièces **2** et **3** lors du fonctionnement du mécanisme, il suffit de constater que :

- le point  $I \in S_2$  est en rotation autour de l'axe  $(P, \vec{z})$  et donc que la vitesse  $\overrightarrow{V}_{I,2/1}$  est colinéaire à  $\overrightarrow{IP} \wedge \vec{z}$  ;
- le point  $I \in S_3$  est en rotation autour de l'axe  $(A, \vec{z})$  et donc que la vitesse  $\overrightarrow{V}_{I,3/1}$  est colinéaire à  $\overrightarrow{IA} \wedge \vec{z}$ .

Or, comme  $\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{IP} \neq \vec{0}$ , alors par somme vectorielle, il vient que la vitesse de glissement  $\overrightarrow{V}_{I,3/2} \neq \vec{0}$  est nécessairement non nulle.

**Question 6.3.** Par relation de Chasles, il vient :

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA} \\ &= \lambda\vec{x}_3 - R\vec{y}_3 - e\vec{x}_2 - a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1 \end{aligned}$$

Il vient en projection dans la base  $\mathcal{B}_1$

$$\boxed{\begin{cases} / \vec{x}_1 : & 0 = \lambda \cos(\beta) + R \sin(\beta) - e \cos(\alpha) - a \\ / \vec{y}_1 : & 0 = \lambda \sin(\beta) - R \cos(\beta) - e \sin(\alpha) + b \end{cases}}$$

**Question 6.4.** Par relation de changement de point, on a :

$$\overrightarrow{V_{I,2/1}} = \underbrace{\overrightarrow{V_{P,2/1}}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{PI} = \dot{\alpha} \vec{z} \wedge (e\vec{x}_2 + R\vec{y}_3) = \dot{\alpha} (e\vec{y}_2 - R\vec{x}_3)$$

et

$$\overrightarrow{V_{I,3/1}} = \underbrace{\overrightarrow{V_{A,3/1}}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega_{3/1}} \wedge \overrightarrow{AI} = \dot{\beta} \vec{z} \wedge (\lambda\vec{x}_3) = \dot{\beta}\lambda\vec{y}_3$$

Comme la vitesse de glissement  $\overrightarrow{V_{I,3/2}}$  est, par définition, colinéaire à  $\vec{x}_3$ , il vient par composition des vitesses au point  $I$  dans la direction  $\vec{y}_3$

$$\overrightarrow{V_{I,3/1}} \cdot \vec{y}_3 = \underbrace{\overrightarrow{V_{I,3/2}} \cdot \vec{y}_3}_{=0} + \overrightarrow{V_{I,2/1}} \cdot \vec{y}_3 \iff \dot{\beta}\lambda = \dot{\alpha}e \cos(\beta - \alpha) \iff \boxed{\dot{\beta} = \frac{e \cos(\beta - \alpha)}{\lambda} \dot{\alpha}}$$

## Système d'aide à la navigation

### 7.1 Modélisation du comportement de la pompe

**Question 7.1.** On note  $H$  le point intersection du plateau de normale  $\vec{n}$  avec la droite  $(O, \vec{x}_0)$  tel que  $\overrightarrow{HI} = \mu \vec{t}$ , avec  $\vec{t} \cdot \vec{n} = 0$  et on note  $\delta = \overrightarrow{HC} \cdot \vec{x}_0$ . Par relation de Chasles, il vient :

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HO} \\ &= r\vec{y}_1 + \delta\vec{x}_0 + R\vec{n} - \mu\vec{t} \end{aligned}$$

**Question 7.2.** La caractéristique invariante d'une liaison sphère-plan est l'absence de translation suivant la normale au contact, soit :

$$\overrightarrow{CI} \cdot \vec{n} = R$$

En exploitant la relation de Chasles en projection dans la direction  $\vec{n}$ ,

$$R = -\delta\vec{x}_0 \cdot \vec{n} - r\vec{y}_1 \cdot \vec{n} = -\delta \cos(\beta) + r \cos(\theta_{1/0}) \sin(\beta)$$

il vient la loi entrée sortie du mécanisme :

$$\delta = \frac{R}{\cos(\beta)} + r \cos(\theta_{1/0}) \tan(\beta)$$

### 7.2 Vérification du débit moyen de la pompe

**Question 7.3.** La course du piston est définie comme la différence des positions maximale et minimale de  $\delta$ , respectivement atteintes pour  $\theta_{1/0} \equiv 0 [2\pi]$  et  $\theta_{1/0} \equiv \pi [2\pi]$ . Il vient alors par différence :

$$c = 2r \tan(\beta)$$

Avec  $n = 6$  pistons de diamètre  $d$ , on en déduit la cylindrée totale

$$\text{Cyl} = nc \frac{\pi d^2}{4} = 3r \tan(\beta) \pi d^2$$

**Question 7.4.** Le débit moyen est défini comme le produit de la cylindrée et de la vitesse de rotation, soit

$$\bar{Q} = \text{Cyl} \omega_{1/0} = 3r \tan\left(\frac{25,6 \times \pi}{180}\right) \pi d^2 \times \frac{1\,800 \times \pi}{30} \approx 270,9 r d^2$$

Faire l'application numérique avec les valeurs de  $r$  et  $d$ ...

**Question 7.5.** Reste à comparer avec la spécification du constructeur.