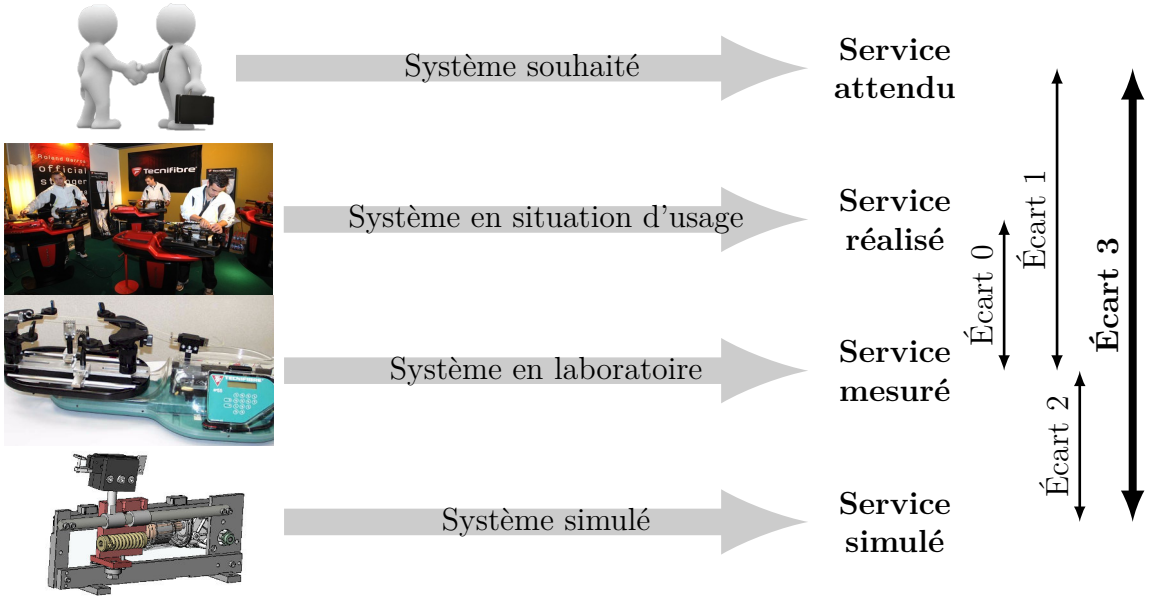
Analyse harmonique des SLCI

— Éléments de correction des TDs —



Écart 0 – évalue la fiabilité et la fidélité du système de laboratoire didactisé par rapport au système réel. Il répond aux questions « le système de laboratoire est-il représentatif du système réel ? Permet-il de l'étudier de manière fiable ? »

Écart 1 – évalue le respect du CDCF par le système réel sur prototype instrumenté en laboratoire. Il répond à la question « le système réalisé, répond-il au CDCF ? ».

Écart 2 – évalue la fiabilité du modèle et de ses hypothèses. Il répond à la question « le modèle est-il correct ? ».

Écart 3 – évalue, en phase de conception, le respect du CDCF à partir d'un modèle simulé. Il répond à la question « le modèle du système satisfait-il les exigences du CDCF ? ».

Activités de TD

Exercices

Exercice 1 – Tracés de réponses harmoniques dans le plan de Bode 3
Exercice 2 – Identification d'un axe de bras de robot en fonction du réglage de son correcteur 16
Exercice 3 – Suspension anti-plongée de BMW 20
Exercice 4 – Station spatiale d'observation par interférométrie 23
Exercice 5 – Suspension automobile active 25
Exercice 6 – Étude de la stabilité d'un système dans le plan de Bode 28
Exercice 7 – Étude de la stabilité d'un système 29
Exercice 8 – Précision d'un moteur pneumatique asservi 32
Exercice 9 – Étude de la sensibilité aux perturbations d'un système 33
Exercice 10 – Réglage graphique des marges de stabilité par correction proportionnelle 34
Exercice 11 – Réglage des marges de stabilité par correction proportionnelle 37
Exercice 12 – Réglage du correcteur d'un système d'orientation du mat d'une éolienne 40
Exercice 13 – Asservissement de position d'un système de préhension de lamelle 42

Nicolas Mesnier, lycée Jean Perrin, Lyon
Compléments & mises à jour sur le site des PCSI
https://cahier-de-prepa.fr/pcsi-perrin

— Version du 13 mars 2024 —

— Exercice 1 —

Tracés de réponses harmoniques dans le plan de Bode

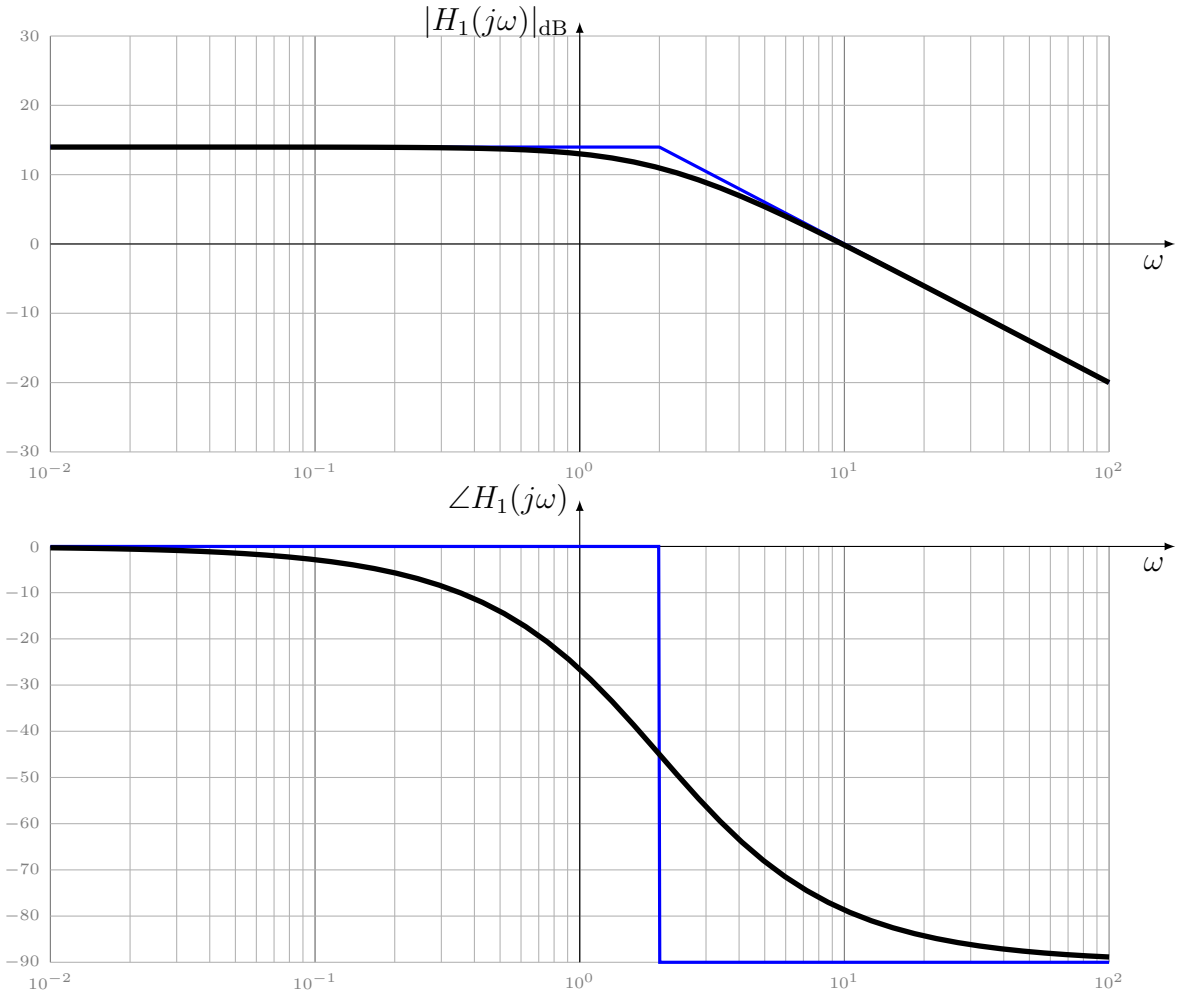
Question 1.1. En faisant attention de bien mettre la fonction de transfert sous forme canonique

$$H_1(p) = \frac{10}{2+p} = \frac{5}{1+\frac{p}{2}}$$

il vient

$$K = 5 \implies 20\log(K) = 20\log(10) - 20\log(2) = 14\,\text{dB}$$

et une pulsation de cassure $\omega_k = 2\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

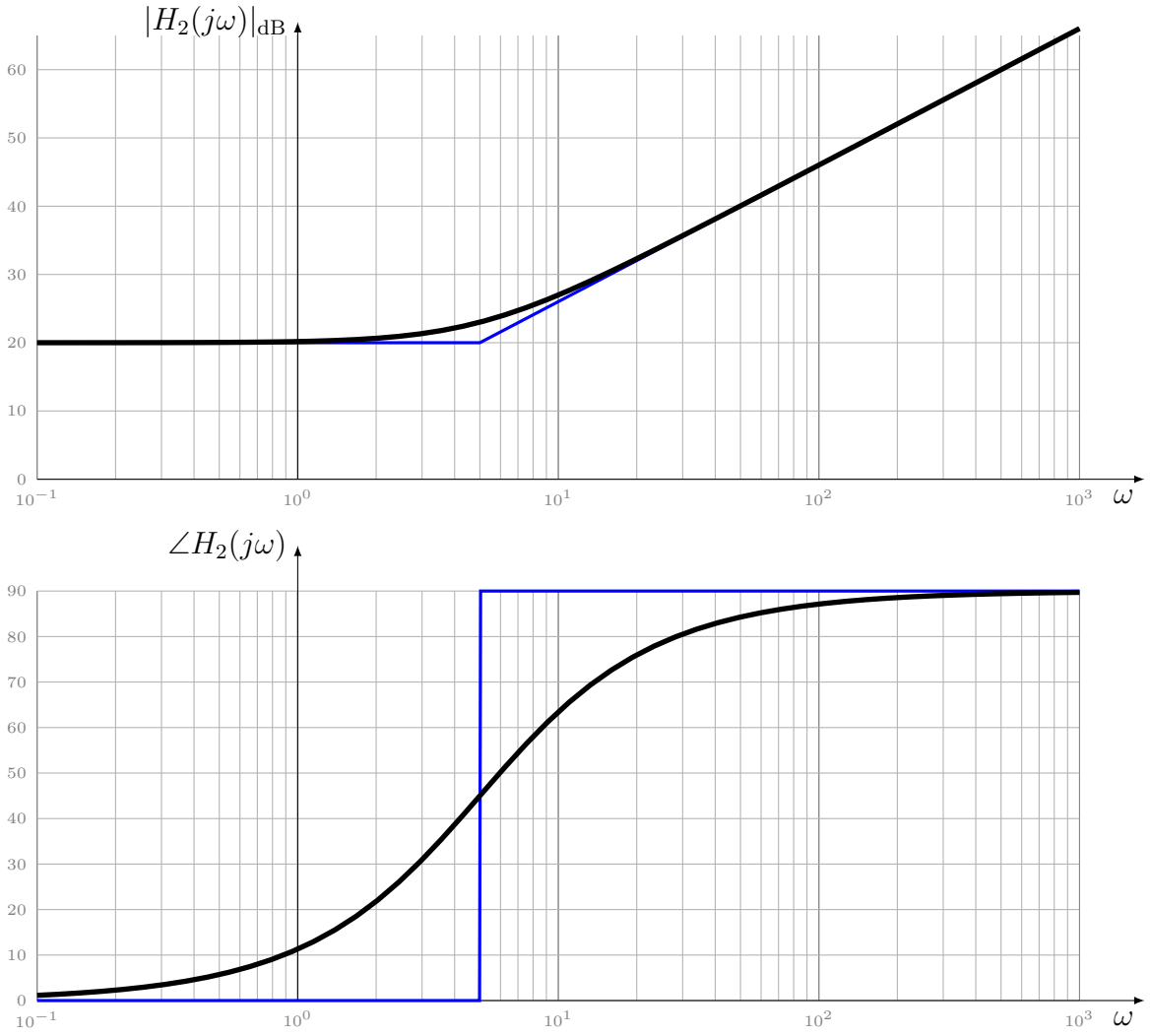


$$H_2(p) = 10\,(1 + 0{,}2p) = 10\left(1 + \frac{p}{5}\right)$$

il vient

$$K = 10 \implies 20\log(K) = 20\,\text{dB}$$

et une pulsation de cassure $\omega_k = 5\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

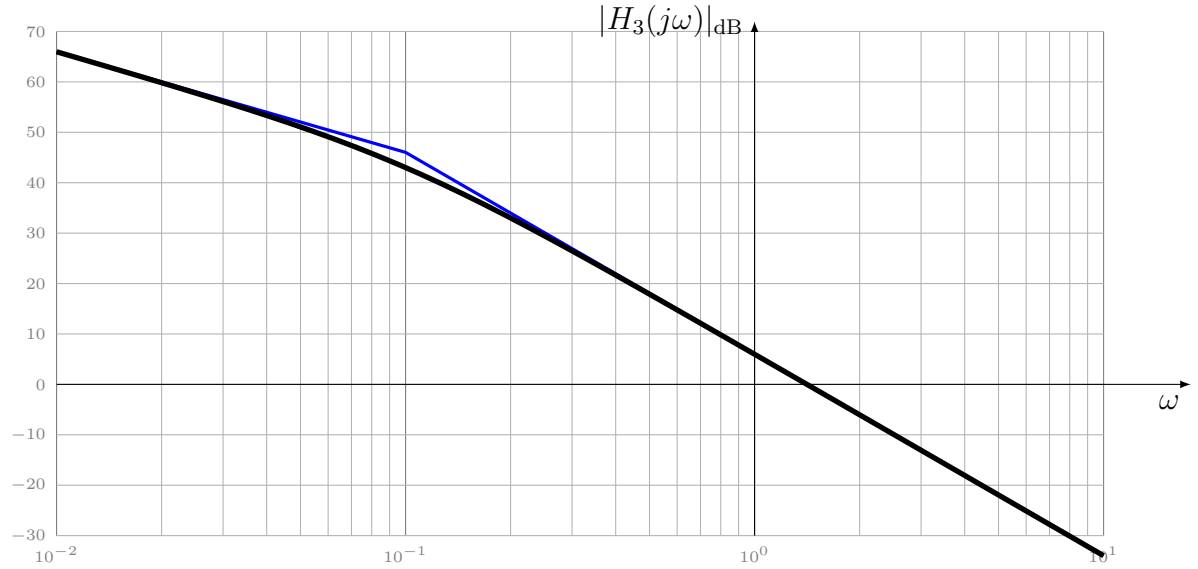


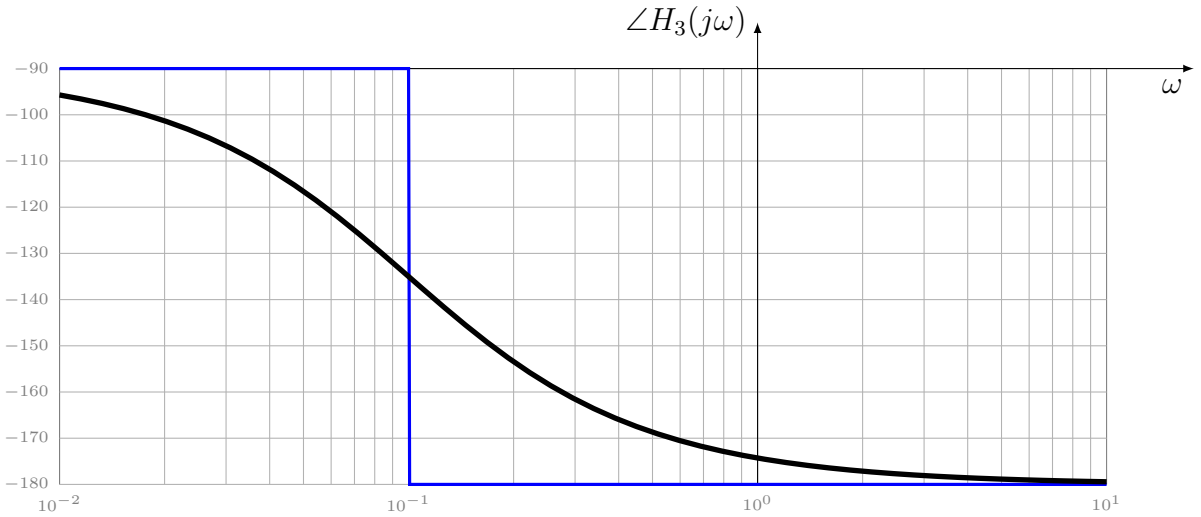
$$H_3(p) = \frac{20}{p\,(1 + 10\,p)}$$

il vient que la fonction de transfert est le produit d'un premier ordre de gain

$$K = 20 \implies 20\log(K) = 26\,\text{dB}$$

et une pulsation de cassure $\omega_k = 0{,}1\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et d'un intégrateur. Sachant qu'à la pulsation ω_k, l'intégrateur à un gain de 20 dB, il vient par somme que la cassure des asymptotes se fait à 46 dB avec avant une pente à -20 dB/décade et après à -40 dB/décade. À basse fréquence l'argument est celui de l'intégrateur à $-\pi/2$ et après, il tend asymptotiquement vers $-\pi$. Il vaut $-3\pi/4$ en ω_k.



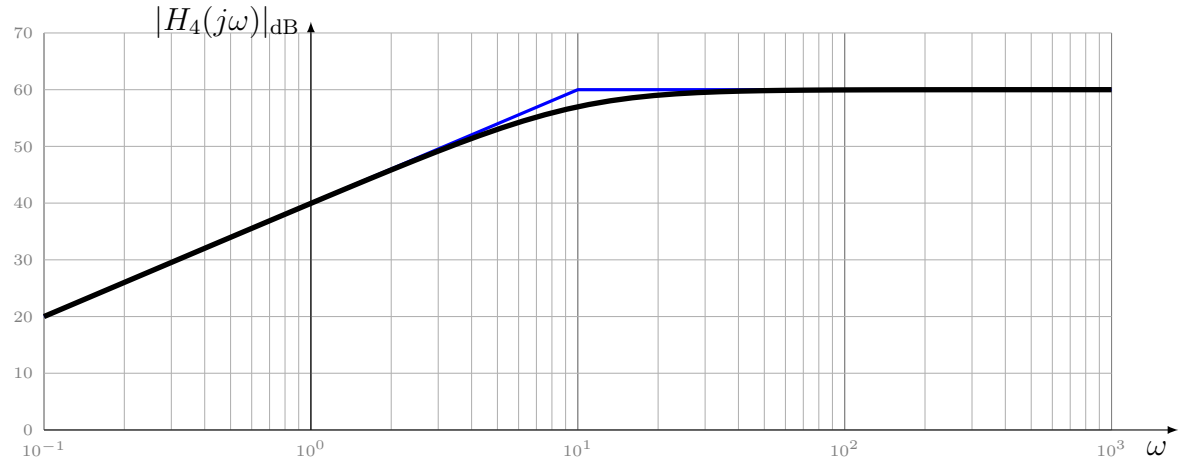


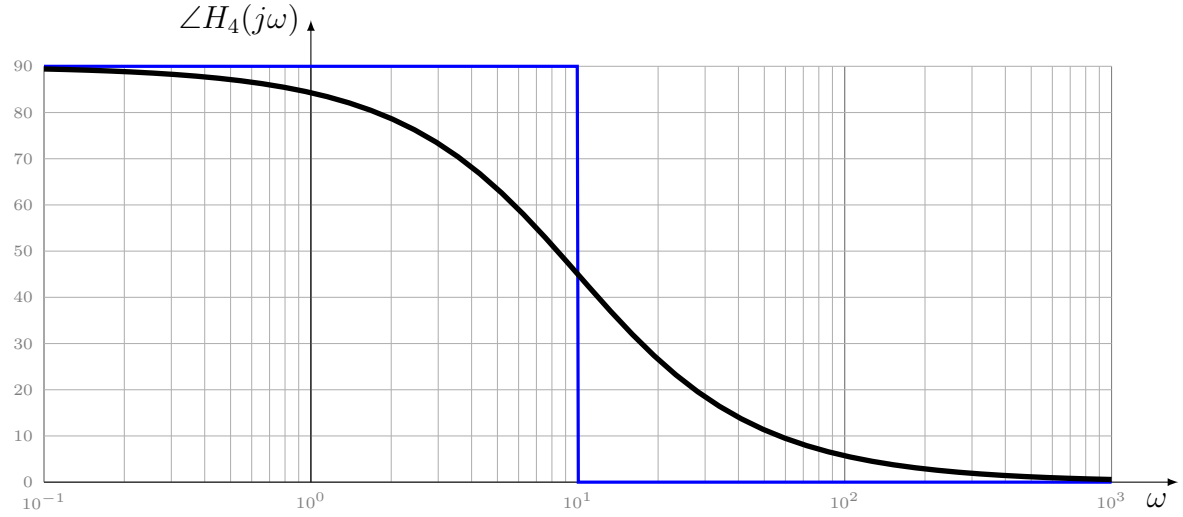
$$H_4(p) = \frac{100\ p}{1 + 0,1\ p}$$

il vient que la fonction de transfert est le produit d'un premier ordre de gain

$$K = 100 \implies 20\log(K) = 40\,\text{dB}$$

et une pulsation de cassure $\omega_k = 10\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et d'un dérivateur. Sachant qu'à la pulsation ω_k, le dérivateur à un gain de 20 dB, il vient par somme que la cassure des asymptotes se fait à 60 dB avec avant une pente à +20 dB/décade et après une pente nulle. À basse fréquence l'argument est celui du dérivateur à $+\pi/2$ et après, il tend asymptotiquement vers 0. Il vaut $\pi/4$ en ω_k.





$$H_5(p) = \frac{\left(1+\frac{p}{3}\right)\left(1+\frac{p}{6}\right)}{\left(1+\frac{p}{0,6}\right)\left(1+\frac{p}{30}\right)}$$

est une fonction de transfert produit de deux numérateurs d'ordre 1, de pulsations de cassures $\omega_2 = 3\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ et $\omega_3 = 6\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ et deux premiers ordre, de pulsations de cassures $\omega_1 = 0{,}6\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ et $\omega_4 = 30\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. À basse fréquence, c'est-à-dire pour tout $\omega \ll \omega_1$, la pente du gain est nulle et l'argument à 0°. Ensuite, par somme, on a asymptotiquement :

— $\forall\omega \in [\omega_1, \omega_2],\ -20\,\mathrm{dB/décade}$ et $-\pi/2$;
— $\forall\omega \in [\omega_2, \omega_3],\ 0\,\mathrm{dB/décade}$ et 0 ;
— $\forall\omega \in [\omega_3, \omega_4],\ 20\,\mathrm{dB/décade}$ et $+\pi/2$;
— $\forall\omega > \omega_4,\ 0\,\mathrm{dB/décade}$ et 0.

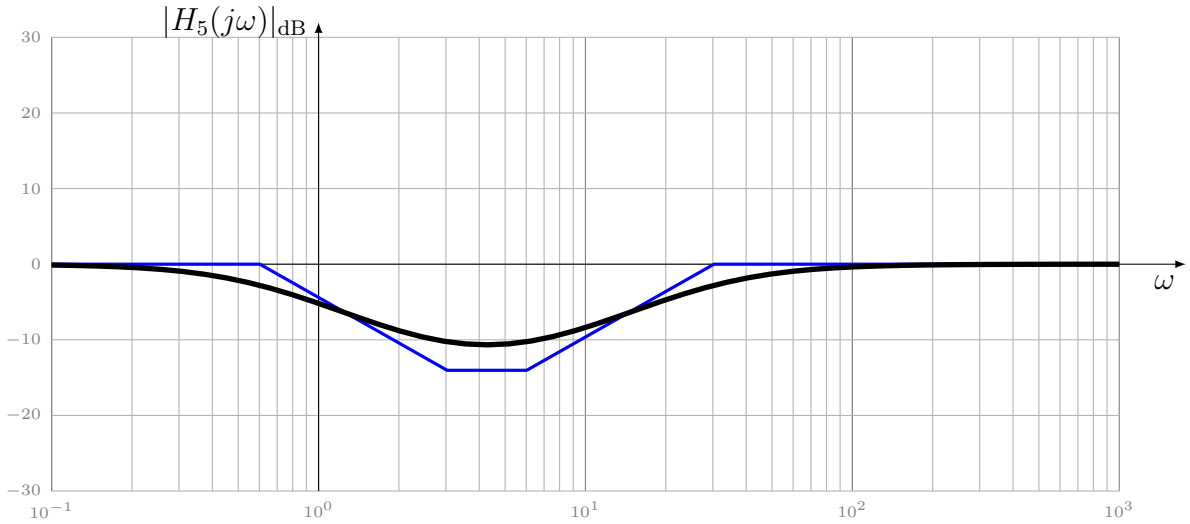
De plus, comme on a

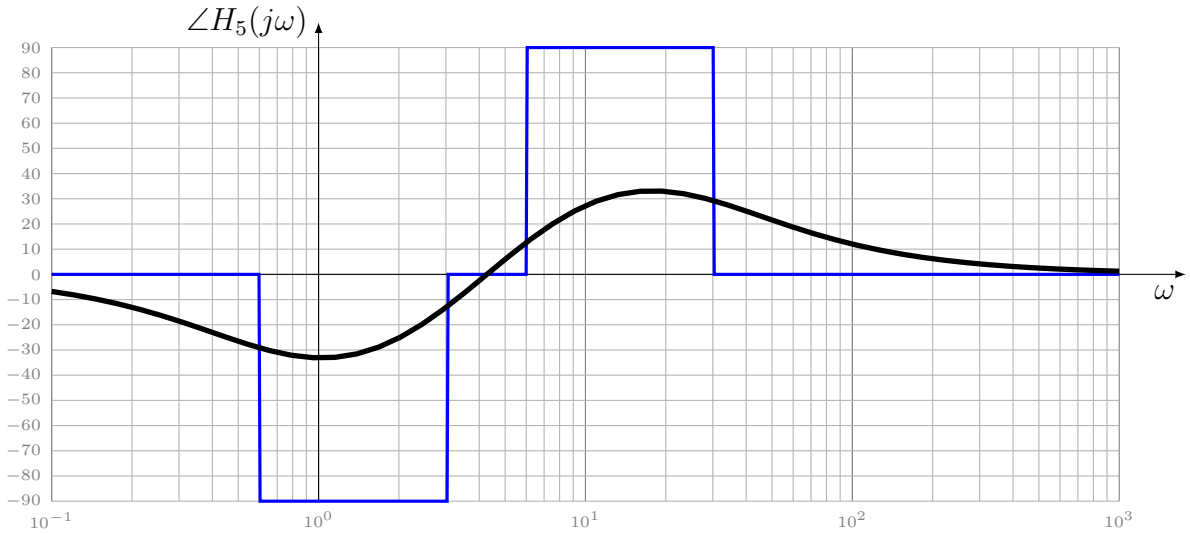
$$\log\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = \log\left(\frac{\omega_4}{\omega_3}\right) = \log(5) \approx \frac{2}{3}$$

on en déduit que le tracé du gain est symétrique par rapport à la pulsation ω_k telle que

$$\log(\omega_k) = \frac{1}{2}(\log\omega_2 + \log\omega_3) = \frac{\log(3)+\log(6)}{2} = \log(\sqrt{18}) \implies \omega_k \approx 4{,}25\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

et celui de l'argument est antisymétrique et passe donc à 0° en ω_k. Comme $\omega_2/\omega_1 < 10$ et que ω_4/ω_3 alors l'argument n'atteindra pas les asymptotes respectivement en $-\pi/2$ et $+\pi/2$. Enfin, par théorème de Thalès on trouve que l'asymptote horizontale du gain pour $\omega \in [\omega_2, \omega_3]$ vaut $2/3 \times -20 \approx -14\,\mathrm{dB}$ et que celle pour $\omega > \omega_4$ vaut $0\,\mathrm{dB}$.


$|H_5(j\omega)|_{\text{dB}}$
30
20
10
0
−10
−20
−30
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
ω


$\angle H_5(j\omega)$
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
−10
−20
−30
−40
−50
−60
−70
−80
−90
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
ω

$$H_6(p) = \frac{30}{1 + 0,1\,p + 0,01\,p^2}$$

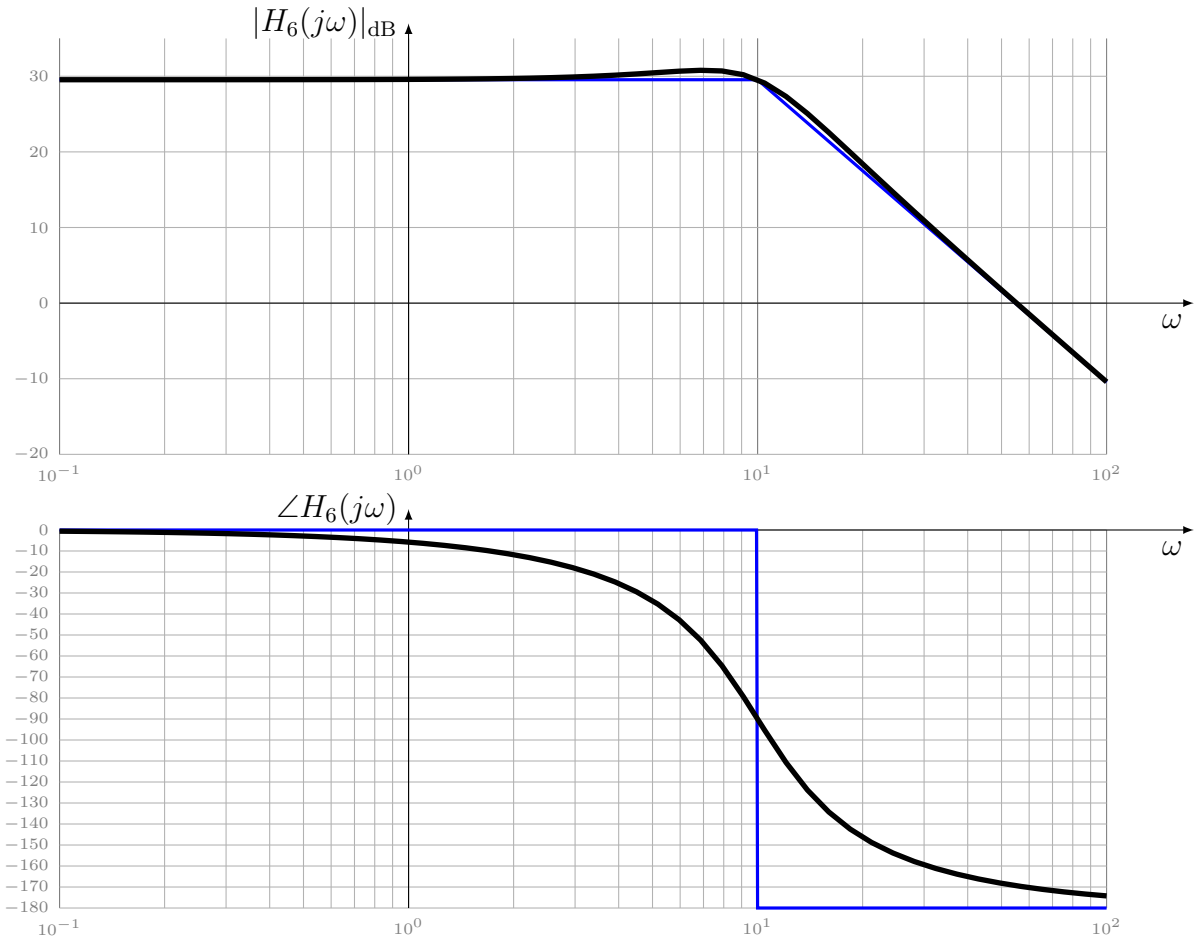
est une fonction de transfert du second ordre du type $\dfrac{K}{1 + \dfrac{2\xi}{\omega_0}p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$ avec $K = 30 \implies 20\log(K) = 30\,\text{dB}$, $\omega_0 = 10\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\xi = 0,5 < 1$ donc sous-amorti. Comme de plus $\xi \leqslant 1/\sqrt{2}$ alors il y aura une résonance à la pulsation

$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2} = 10\sqrt{1 - 2\frac{1}{4}} = \frac{10}{\sqrt{2}} \approx 7\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

d'amplitude

$$-20\log\left(2\xi\sqrt{1-\xi^2}\right) = 20\log(2) - 10\log(3) \approx 1,25\,\text{dB}$$

Comme $Q = 1/(2\xi) = 1$, la courbe passe pile au point de cassure à la pulsation de cassure ω_0.

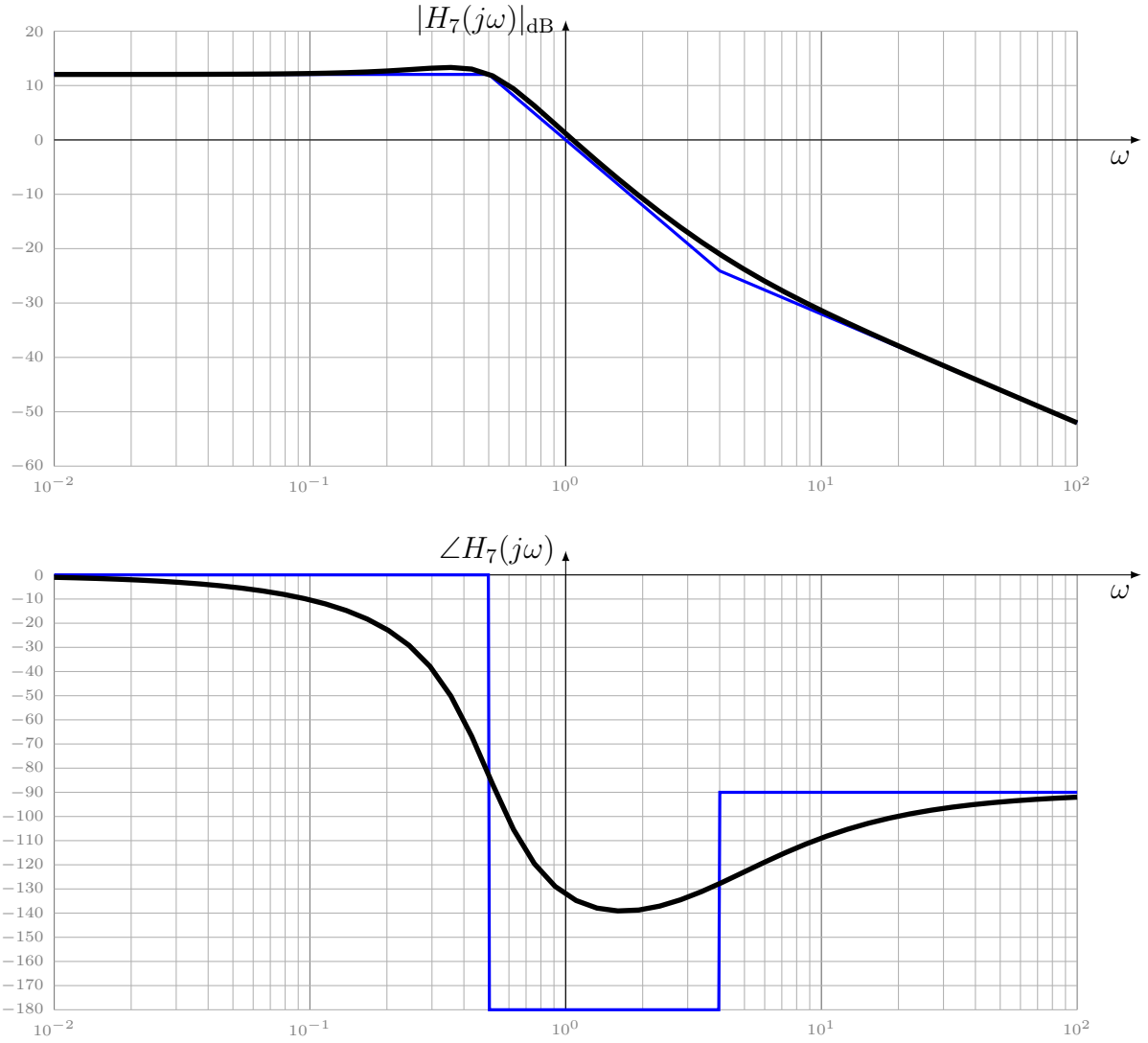


$$H_7(p) = \frac{4+p}{1+2\,p+4\,p^2} = 4\,\frac{1+\dfrac{p}{4}}{1+2\,p+4\,p^2}$$

est une fonction de transfert produit d'un numérateur d'ordre 1 de pulsation de cassure $\omega_1 = 4\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$ et d'un second ordre du type $\dfrac{K}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$ avec $K=4 \implies 20\log(K) = 12\,\mathrm{dB}$, $\omega_0 = 0{,}5\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$ et $\xi = 0{,}5 < 1$ donc sous-amorti. Comme de plus $\xi \leqslant 1/\sqrt{2}$ alors il y aura une résonance à la pulsation

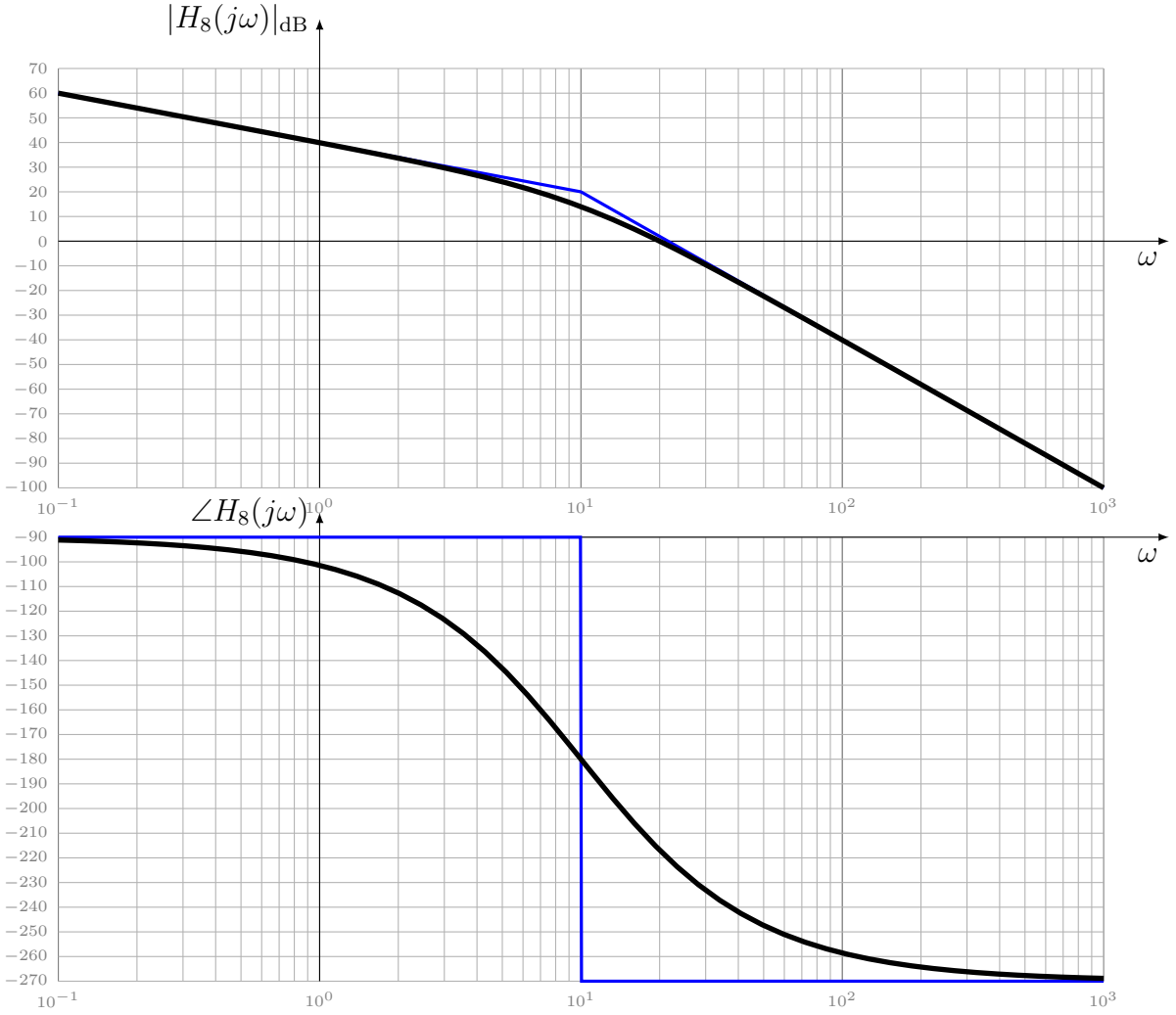
$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2} = 0{,}5\sqrt{1-2\frac{1}{4}} \approx 0{,}35\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$$

d'amplitude 1,25 dB. Comme $Q = 1/(2\xi) = 1$, la courbe passe pile au point de cassure à la pulsation de cassure ω_0. À partir de $\omega_1 > \omega_0$, l'asymptote du gain est de pente $-20\,\mathrm{dB/décade}$ et l'argument tend asymptotiquement vers $-\pi/2$.



$$H_8(p) = \frac{100}{p\,(1 + 0,2\,p + 0,01\,p^2)} = \frac{100}{p\left(1 + \dfrac{p}{10}\right)^2}$$

est une fonction de transfert produit d'un intégrateur et d'un second ordre du type $\dfrac{K}{1 + \dfrac{2\xi}{\omega_0}p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$ avec $K = 100 \implies 20\log(K) = 40\,\text{dB}$, $\omega_0 = 10\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\xi = 1$ donc en régime critique. Sachant qu'à la pulsation ω_0, l'intégrateur à un gain de $-20\,\text{dB}$, il vient par somme que la cassure des asymptotes se fait à $20\,\text{dB}$ avec avant une pente à $-20\,\text{dB/décade}$ et après à $-60\,\text{dB/décade}$. À basse fréquence l'argument est celui de l'intégrateur à $-\pi/2$ et après, il tend asymptotiquement vers $-3\pi/2$. Il vaut $-\pi/2$ en ω_0.



$$H_9(p) = \frac{30\,(1+0,1\,p)}{p\,(1+p+0,01\,p^2)}$$

est une fonction de transfert produit d'un intégrateur, d'un numérateur d'ordre 1 de pulsation de cassure $\omega_k = 10\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$ et d'un second ordre du type $\dfrac{K}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$ avec $K = 30 \implies 20\log(K) = 3\,\mathrm{dB}$, $\omega_0 = 10\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$ et $\xi = 5 \gg 1$ donc en régime sur-amorti. Le second ordre admet donc une factorisation avec 2 pôles réels, associés aux constantes de temps τ_1 et $\tau_2 > \tau_1$ telles que

$$\frac{1}{\tau_1\tau_2} = \omega_0^2 \implies \frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{1}{\tau_1}\right)+\log\left(\frac{1}{\tau_2}\right)\right) = \log(\omega_0)$$

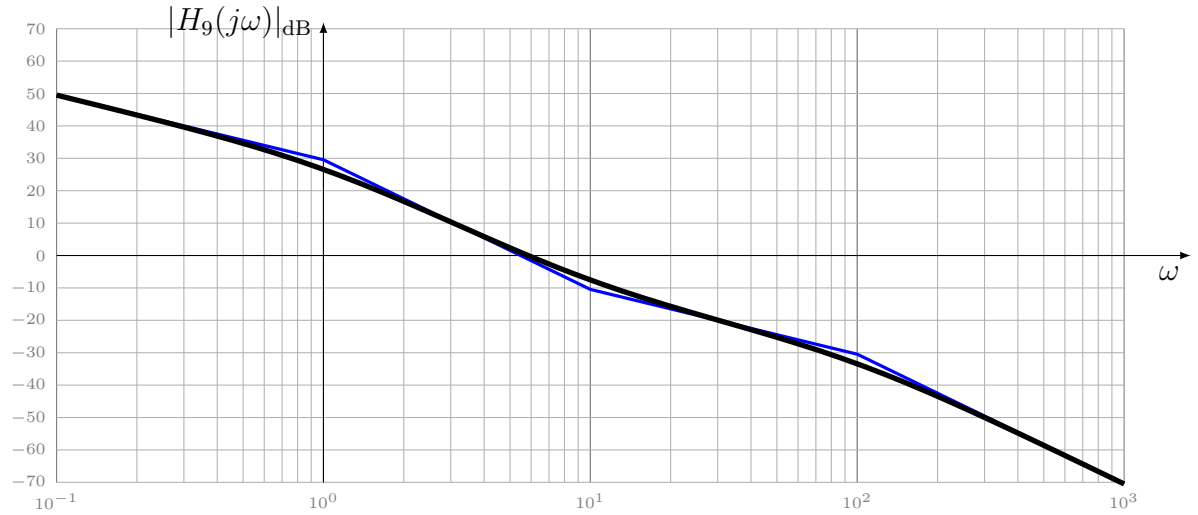
qui signifie que les 2 pulsations de cassure $\omega_1 = 1/\tau_1$ et $\omega_2 = 1/\tau_2$ sont symétriques par rapport à ω_0. Exploitant la caractéristique du gain au niveau de la pulsation de cassure

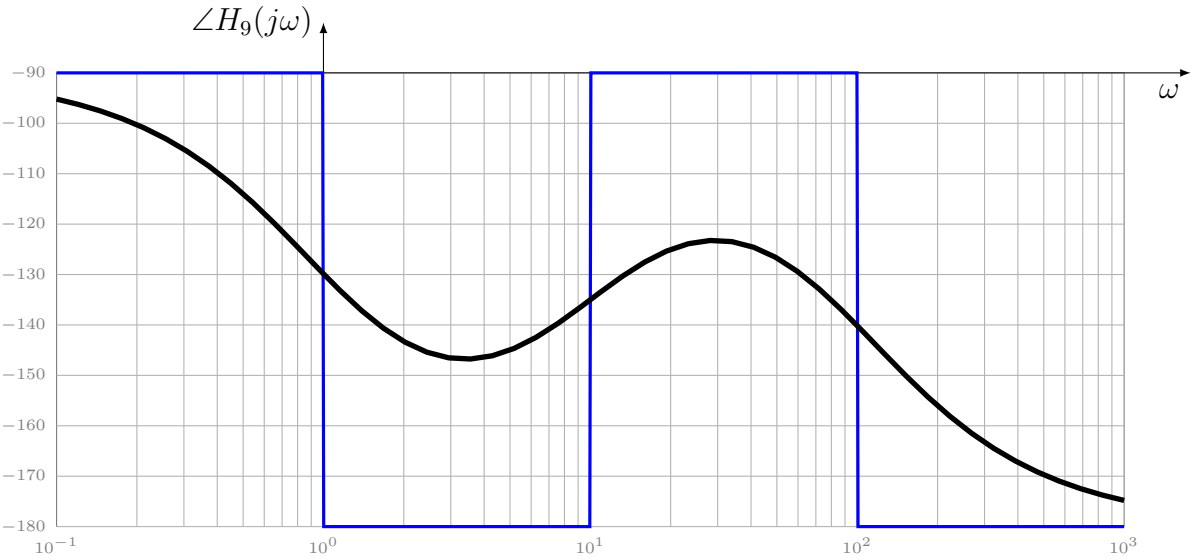
$$20\log(Q) = 20\log\left(\frac{1}{10}\right) = -20\,\mathrm{dB}$$

indépendante de ξ, on trouve $\omega_1 = \dfrac{\omega_0}{10} = 1\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$ d'où $\omega_2 = 10\omega_0 = 100\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Ainsi, par somme on trouve :

- $\forall\omega \leqslant \omega_1,\ -20\,\mathrm{dB/décade}$ et $-\pi/2$;
- $\forall\omega \in [\omega_1,\omega_k],\ -40\,\mathrm{dB/décade}$ et $-\pi$;
- $\forall\omega \in [\omega_k,\omega_2],\ -20\,\mathrm{dB/décade}$ et $-\pi/2$;
- $\forall\omega \geqslant \omega_2\ -40\,\mathrm{dB/décade}$ et $-\pi/2$.

Comme $\omega_k = \omega_0$, le tracé de l'argument est antisymétrique par rapport au point $(\omega_0, -3\pi/4)$.


$|H_9(j\omega)|_{\text{dB}}$
70
60
50
40
30
20
10
0
−10
−20
−30
−40
−50
−60
−70
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
ω

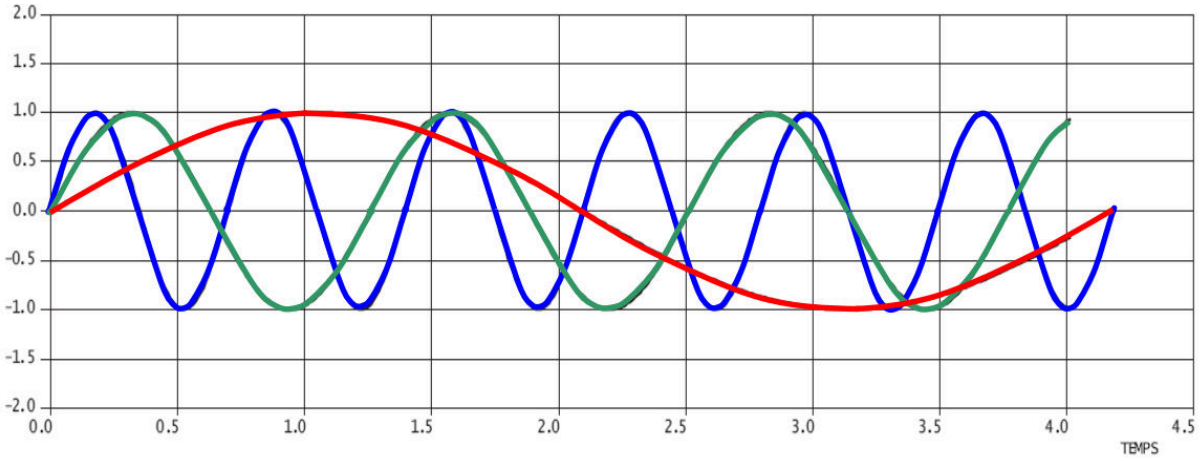

$\angle H_9(j\omega)$
−90
−100
−110
−120
−130
−140
−150
−160
−170
−180
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
ω

Question 1.2. Par théorème d'analyse harmonique, on a pour toute entrée du type

$$e(t) = \sin(\omega t)\ u(t), \qquad \omega \in \mathbb{R}_*^+$$

une réponse du type

$$s(t) = |H_6(j\omega)| \sin\left(\omega t + \angle H_6(j\omega)\right)\ u(t)$$



Pour les trois cas d'études on a :

Cas 1

$$T_1 = 4{,}2\,\text{s} \implies \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \approx 1{,}5\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

On lit sur les diagrammes de Bode de H_6 pour cette pulsation $\omega_1 \ll \omega_0$

$$|H_6(j\omega_1)|_{\text{dB}} = 30\,\text{dB} \implies |H_6(j\omega_1)| = 30 \qquad \text{et} \qquad \angle H_6(j\omega_1) = -5° = -0{,}087\,\text{rad}$$

d'où

$$s_1(t) = 30 \sin\left(1{,}5t - 0{,}087\right)\ u(t)$$

Cas 2

$$T_2 = 1{,}25\,\text{s} \implies \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} \approx 5\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

On lit sur les diagrammes de Bode de H_6 pour cette pulsation $\omega_2 < \omega_0$

$$|H_6(j\omega_2)|_{\text{dB}} = 31\,\text{dB} \implies |H_6(j\omega_2)| = 35 \qquad \text{et} \qquad \angle H_6(j\omega_2) = -35° = -0{,}61\,\text{rad}$$

d'où

$$s_2(t) = 35 \sin\left(1{,}5t - 0{,}61\right)\ u(t)$$

Cas 3

$$T_3 = 0{,}7\,\text{s} \implies \omega_3 = \frac{2\pi}{T_3} \approx 8{,}97\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

On lit sur les diagrammes de Bode de H_6 pour cette pulsation $\omega_3 \approx \omega_0$

$|H_6(j\omega_3)|_{\text{dB}} = 31\,\text{dB} \implies |H_6(j\omega_3)| = 35$ et $\angle H_6(j\omega_3) = -80° = -1{,}39\,\text{rad}$

d'où

$$s_3(t) = 35\sin(1{,}5t - 1{,}39)\ u(t)$$

— Exercice 2 —

Identification d'un axe de bras de robot en fonction du réglage de son correcteur

Réglage PID n° 1 D'après le diagramme d'argument, on a une évolution monotone strictement décroissante entre 0° et −90°. On cherche donc une fonction de transfert du premier ordre de la forme

$$H_1(p) = \frac{K}{1+\tau p}$$

Pour identifier la constante de temps, il faut trouver la pulsation pour laquelle l'argument vaut −45°. On lit

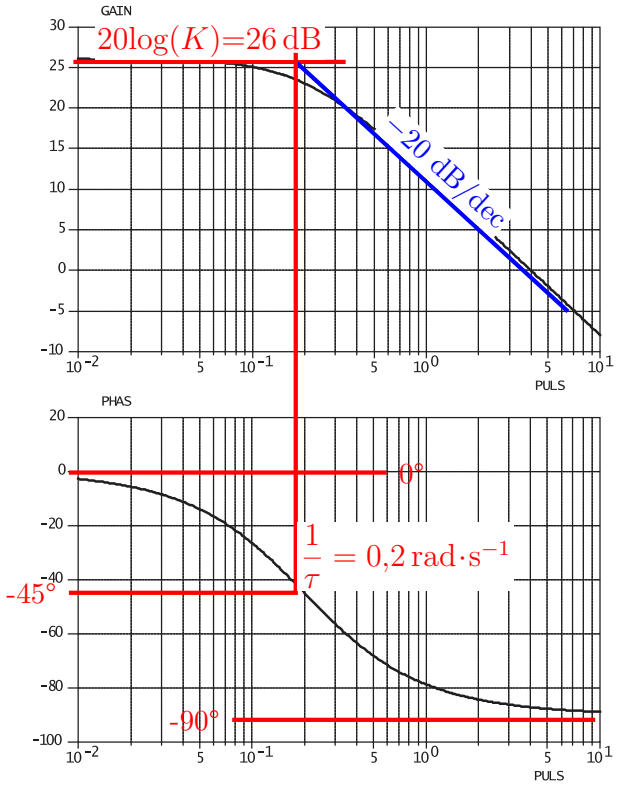
$$\frac{1}{\tau} = 0{,}2\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \implies \tau = 5\,\text{s}$$

Pour identifier le gain, il suffit de tracer l'asymptote horizontale à basse fréquence. On trouve

$$20\log(K) = 26\,\text{dB} = 20+6 \iff K = 10^{26/20} \approx 10^{4/3} \approx 20$$

soit finalement

$$H_1(p) \approx \frac{20}{1+5p}$$



Réglage PID n° 2 D'après le diagramme d'argument, on a une évolution monotone strictement décroissante entre 0° et −180°. On cherche donc une fonction de transfert du second ordre de la forme

$$H_2(p) = \frac{K}{1 + \dfrac{2\xi}{\omega_0}p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Pour identifier la pulsation du système non amorti, il faut trouver la pulsation pour laquelle l'argument vaut −90°. On lit

$$\omega_0 = 2\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

Pour identifier le gain, il suffit de tracer l'asymptote horizontale à basse fréquence. On trouve

$$20\log(K) = 0\,\mathrm{dB} \iff K = 1$$

Enfin, pour trouver $\xi \ll 1$, on peut utiliser le fait que la résonance est marquée et donc que l'on a

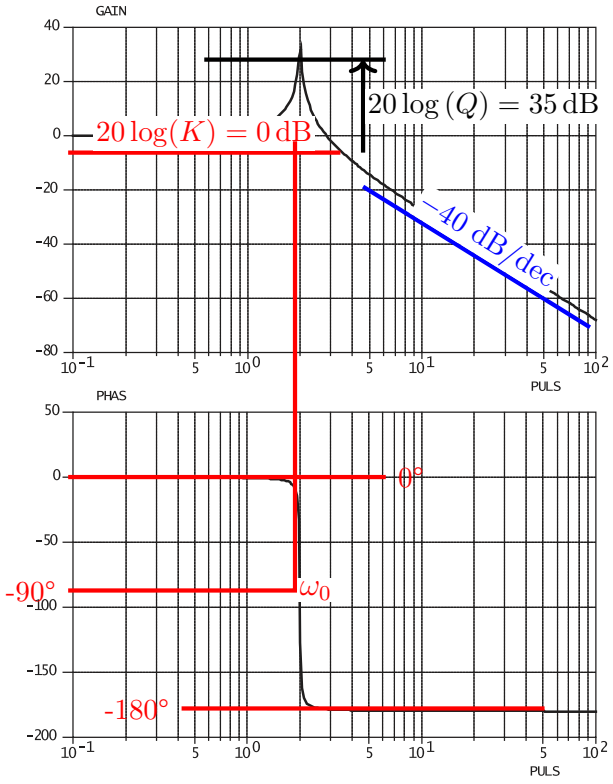
$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2} \to \omega_0$$

d'où, au niveau de la pulsation de cassure

$$20\log(Q) = 35\,\mathrm{dB} \iff \frac{1}{2\xi} = 10^{35/20} \iff \xi = \frac{1}{2 \times 10^{35/20}} \approx 0{,}008\,8$$

soit finalement

$$H_2(p) \approx \frac{1}{1 + 0{,}008\,8p + 0{,}5p^2}$$



Réglage PID n° 3 D'après le diagramme d'argument, on a une évolution monotone strictement décroissante entre 0° et −180°, mais en deux phases. On cherche donc une fonction de transfert du second ordre sous-amorti de la forme

$$H_3(p) = \frac{K}{(1+\tau_1 p)\,(1+\tau_2 p)}$$

Pour identifier les deux pulsations de cassure $\omega_1 = 1/\tau_1$ et $\omega_2 = 1/\tau_2 > \omega_1$, symétriques par rapport à la pulsation du système non amorti $\omega_0 = 1/\sqrt{\tau_1\tau_2}$, il faut trouver les pulsations pour lesquelles l'argument vaut −45° et −135°. On lit

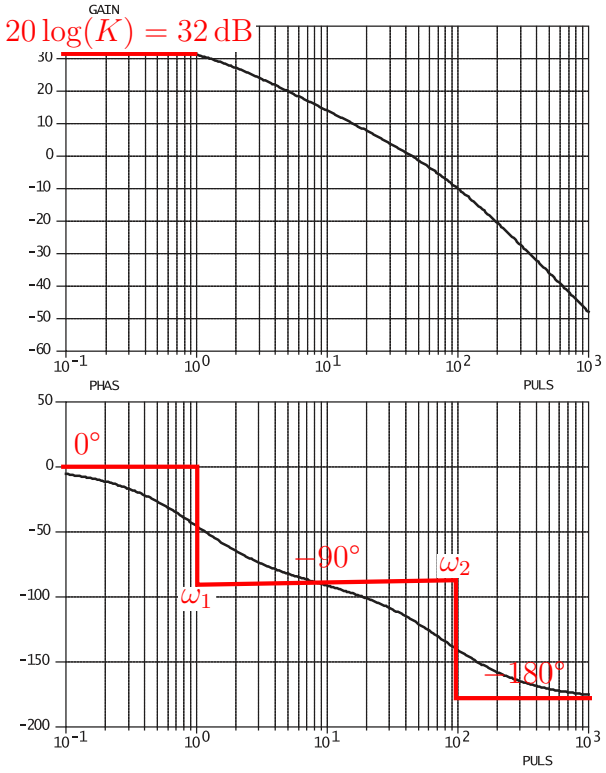
$$\omega_1 = 1\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = 100\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Pour identifier le gain, il suffit de tracer l'asymptote horizontale à basse fréquence. On trouve

$$20\log(K) = 32\,\text{dB} \iff K = 40$$

soit finalement

$$H_3(p) = \frac{40}{(1+p)\,(1+0{,}01p)}$$



Réglage PID n° 4 D'après le diagramme d'argument, on remarque :

— à basse fréquence l'effet d'un intégrateur (asymptote à $-\pi/2$) ;
— à moyenne fréquence l'effet d'un numérateur d'ordre 1 (asymptote à 0°) ;
— à haute fréquence l'effet d'un premier ordre (asymptote à $-\pi/2$).

On cherche donc une fonction de transfert de la forme

$$H_4(p) = \frac{K\,(1+\tau_1 p)}{p\,(1+\tau_2 p)}$$

Pour identifier les deux pulsations de cassure $\omega_1 = 1/\tau_1$ et $\omega_2 = 1/\tau_2 > \omega_1$, il faut trouver les pulsations pour lesquelles l'argument vaut $-45°$ si $\omega_2 \gg 10\omega_1$, moins de $-45°$ sinon. On lit

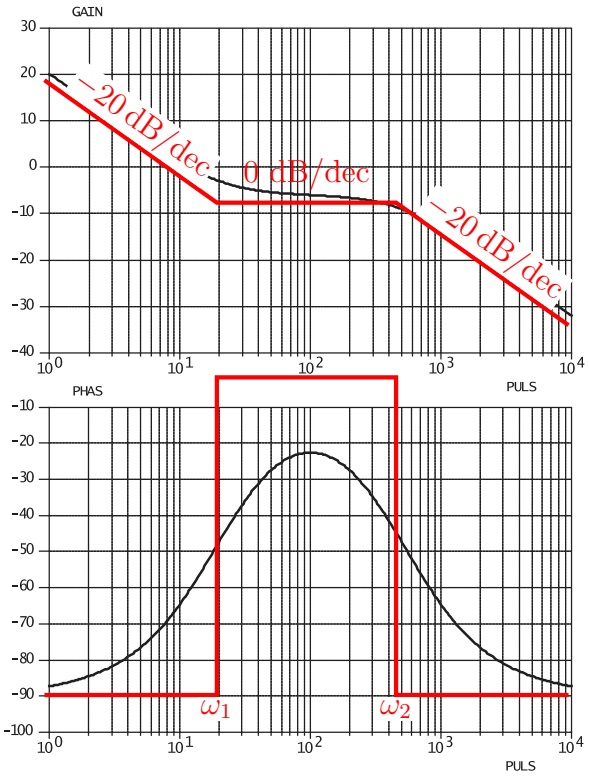
$$\omega_1 \leqslant 20\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}} \qquad \text{et} \qquad \omega_2 \geqslant 500\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$$

Pour identifier le gain, il suffit de regarder la valeur du gain à la pulsation $1\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$ pour laquelle la contribution de l'intégrateur est nulle. On trouve

$$20\log(K) = 2\,\mathrm{dB} \iff K = 10$$

soit finalement

$$H_4(p) = \frac{10\,(1+0{,}05p)}{p\,(1+0{,}002p)}$$



— Exercice 3 —

Suspension anti-plongée de BMW

Question 3.1. Par transformée de Laplace en conditions de Heaviside, il vient :

$$\begin{aligned} M\ p^2\ X(p) &= 2\ k\ (Y(p) - X(p))r + \mu\ p\ (Y(p) - X(p)) \\ (2k + \mu\ p + M\ p^2)\ X(p) &= Y(p)\ (2k + \mu\ p) \end{aligned}$$

soit finalement :

$$\boxed{H(p) = \frac{1 + \dfrac{\mu}{2k}\ p}{1 + \dfrac{\mu}{2k}\ p + \dfrac{M}{2k}\ p^2}}$$

C'est une fonction de transfert produit d'un numérateur d'ordre 1 de constante de temps $\dfrac{\mu}{2k} = 0{,}05\,\text{s}$ et d'un second ordre de pulsation propre non amortie $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2k}{M}} = 8{,}16\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et de coefficient d'amortissement $\xi = \dfrac{\mu}{2\sqrt{2kM}} = 0{,}2 \ll 1$ donc sous-amorti.

Question 3.2. Comme on a $\xi < 1/\sqrt{2}$, le système possède une pulsation de résonance

$$\omega_r = \omega_0\ \sqrt{1 - 2\ \xi^2} \approx 7{,}99\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

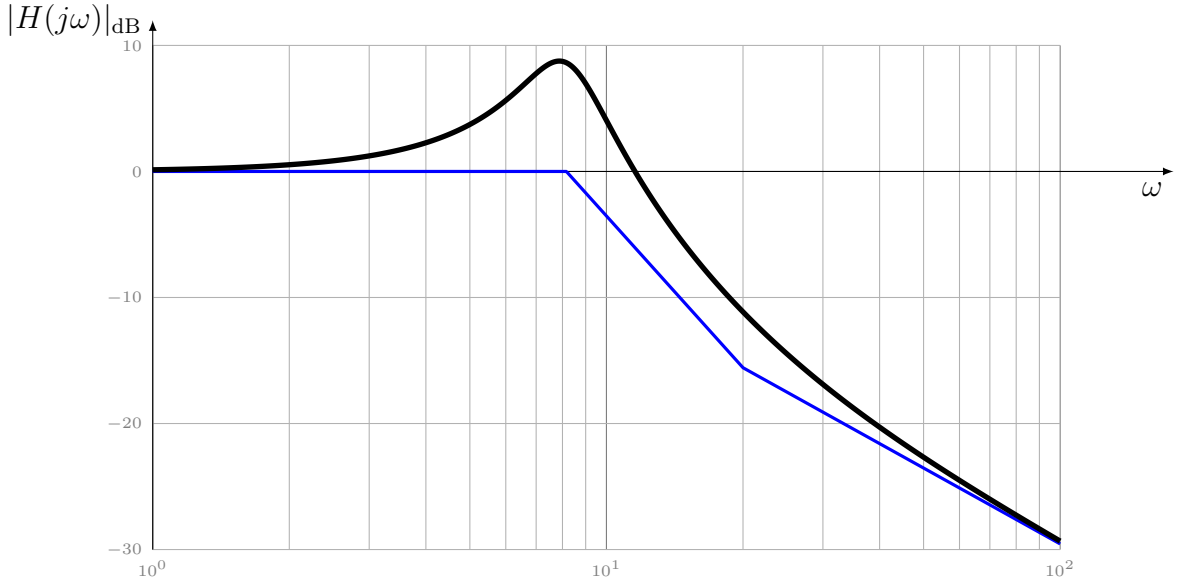
proche de ω_0 et pour laquelle l'amplitude vaut

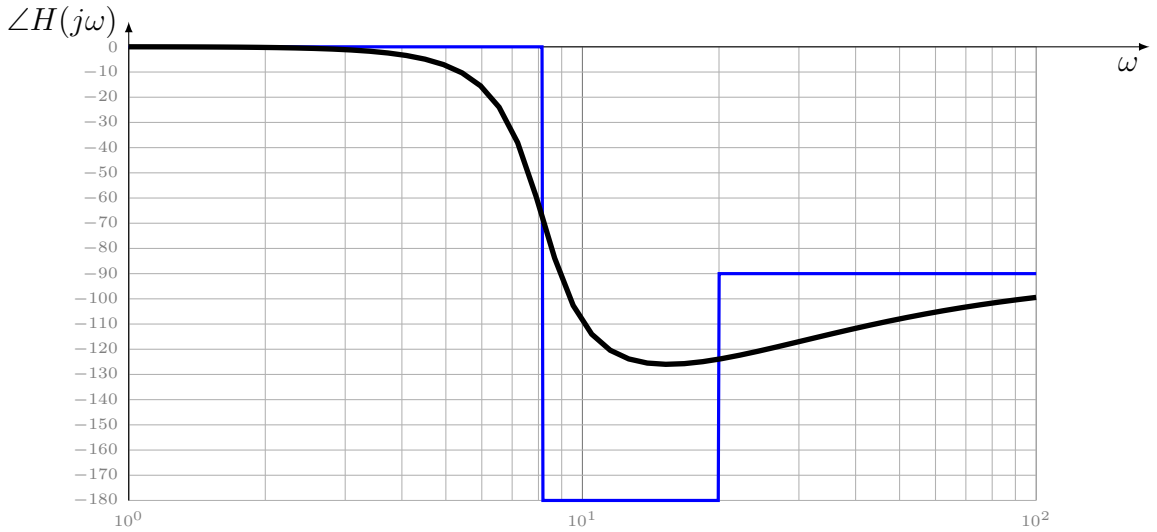
$$-20\log\left(2\xi\sqrt{1-\xi^2}\right) \approx 8\,\text{dB}$$

contre $-20\log(2\xi) \approx 7{,}8\,\text{dB}$ en ω_0. On note $\omega_1 = 20\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} > \omega_0$ la pulsation de cassure du numérateur d'ordre 1. Ainsi, par somme il vient asymptotiquement :

- $\forall \omega < \omega_0$, $0\,\text{dB}/\text{décade}$ et $0°$;
- $\forall \omega \in [\omega_0, \omega_1]$, $-40\,\text{dB}/\text{décade}$ et $-180°$;
- $\forall \omega > \omega_1$, $-20\,\text{dB}/\text{décade}$ et $-90°$

Il vient alors les tracés suivants.





Question 3.3. Si le profil de la route correspond à une sinusoïde de la forme $y : t \mapsto a\cos(\omega t)$ et que la moto se déplace à vitesse constante v dans la direction horizontale, alors elle parcourt sur une période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ la distance

$$\ell = \int_0^T v \,\mathrm{d}t = vT = \frac{2\pi v}{\omega} \iff \boxed{\omega = \frac{2\pi v}{\ell}}$$

Question 3.4. Par théorème d'analyse harmonique, on a pour toute entrée du type

$$y(t) = a\sin(\omega t)\ u(t), \qquad \omega \in \mathbb{R}_*^+$$

une réponse du type

$$x(t) = a\,|H(j\omega)|\sin\left(\omega t + \angle H(j\omega)\right)\ u(t)$$

avec

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{\mu\omega}{2k}\right)^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{M\omega^2}{2k}\right)^2+\left(\frac{\mu\omega}{2k}\right)^2}}$$

et

$$\angle H(j\omega) \equiv \operatorname{Arctan}\left(\frac{\mu}{2k}\right) - \frac{\pi}{2} + \operatorname{Arctan}\left(\frac{2k-M\omega^2}{\mu\omega}\right) \ [2\pi]$$

Question 3.5. Pour que les variations soient inférieures à 5 % $= 5\times10^{-3}$, il faut que le gain soit inférieur à $20\log(5\times10^{-2}) = 20\log(5) - 40 \approx -26\,\text{dB}$, ce qui, d'après le diagramme du gain est vrai pour tout $\omega \geqslant 80\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Avec la relation de la question 3.3, il vient :

$$\boxed{v = \frac{\ell\omega}{2\pi} \geqslant 12{,}73\ell}$$

Question 3.6. En cas de marche de hauteur 1 m, le profil de la route peut être assimilé à un échelon unitaire.

Question 3.7. Pour modifier le coefficient d'amortissement, il est possible de changer la viscosité de l'huile ou de modifier le circuit hydraulique (diamètre des trous de passage entre chambres).

Question 3.8. En négligeant le terme d'ordre 1 en p du numérateur, on se retrouve avec une fonction de transfert du second ordre sous-amorti. La réponse présentera un dépassement inférieur ou égal à 5 % si, et seulement si, le coefficient d'amortissement $\xi \geqslant 0{,}69$, d'où :

$$\xi = \frac{\mu}{2\sqrt{2kM}} \geqslant 0{,}69 \iff \mu \geqslant 2\times0{,}69\times\sqrt{2kM} = 3\,380{,}29\,\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$$

On trouve donc dans le meilleur des cas :

$$\boxed{\mu \approx 3\,\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{mm}^{-1}}$$

— Exercice 4 —

Station spatiale d'observation par interférométrie

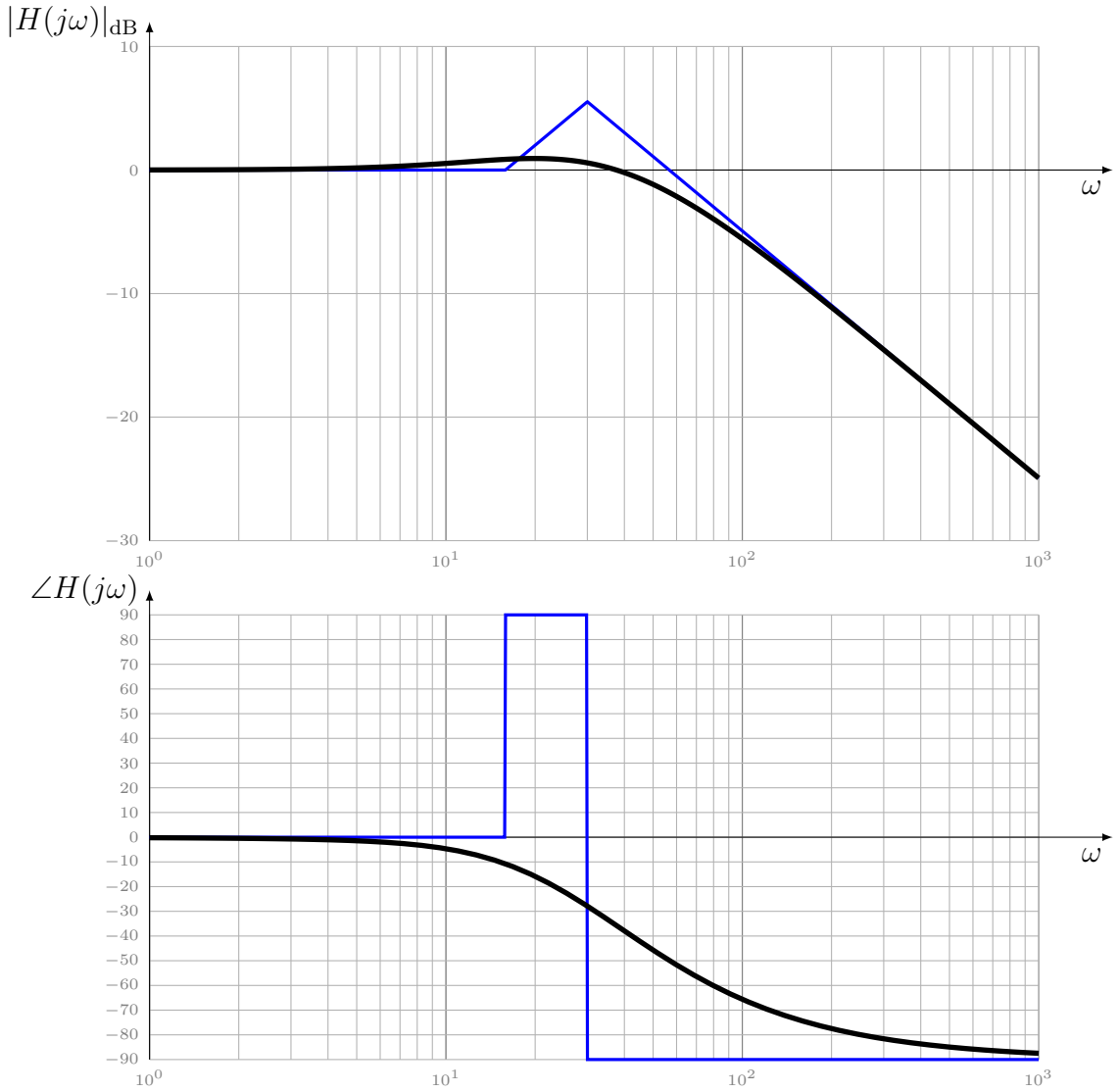
Question 4.1. En divisant le numérateur et le dénominateur par K_T, il vient immédiatement

$$H(p) = \frac{1 + \dfrac{C_T}{K_T} p}{1 + \dfrac{C_T}{K_T} p + \dfrac{M}{K_T} p^2}$$

qui est de la forme $\dfrac{1 + \dfrac{2\xi}{\omega_0}\, p}{1 + \dfrac{2\xi}{\omega_0}\, p + \dfrac{1}{\omega_0^2}\, p^2}$ avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_T}{M}} \approx 31\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \qquad \text{et} \qquad \xi = \frac{C_T}{2\sqrt{K_T M}} \approx 1$$

Notant $\omega_1 = \dfrac{K_T}{C_T} = 15{,}8\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} < \omega_0$ la pulsation de cassure du numérateur d'ordre 1, il vient par superposition des tracés les diagrammes de Bode suivants.



Question 4.2. Le système non corrigé ne permet pas de respecter le cahier des charges car bien qu'il soit précis (gain unitaire en BF), il présente, de part l'action du numérateur d'ordre 1, une résonance (amplitude du gain supérieure à 0 dB).

Question 4.3. Pour respecter le cahier des charges vis-à-vis du critère de résonance, il faut que :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}_*^+, \quad |H(j\omega|_{\text{dB}} \leqslant 0\,\text{dB}$$

donc seul le réglage menant à $\xi = 2$ convient.

— Exercice 5 —

Suspension automobile active

Question 5.1. Pour une fréquence voisine de 1 Hz le corps humain est le moins sensible, c'est-à-dire que c'est à cette fréquence (proche de sa fréquence cardiaque) qu'il peut supporter les accélérations verticales les plus élevées.

Question 5.2. D'après le graphique, pour les fréquences comprises entre 4 Hz et 8 Hz, le corps humain peut supporter pendant 30 min une accélération verticale de $0{,}4\,\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$.

Question 5.3. D'après le modèle de comportement d'un ressort, on a :

$$F = k\Delta z$$

Avec la masse $2050 - 1650 = 400\,\mathrm{kg}$, correspondant à un effort sur chacun des 4 ressorts de $F = 1\,000\,\mathrm{N}$, ayant induite un écrasement de $\Delta z = 15\,\mathrm{mm}$ de chaque ressort, il vient la raideur des 4 ressorts :

$$\boxed{k = \frac{F}{\Delta z} \approx 67\,\mathrm{kN\cdot m^{-1}}}$$

Question 5.4. Par transformée de Laplace de l'équation de dynamique, en conditions de Heaviside telle que $\dot{z_v}(0) = \dot{z_r}(0) = 0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $z_v(0) = z_r(0) = 0\,\mathrm{m}$, il vient :

$$Z_v(p) = \frac{k + fp}{k + fp + mp^2} Z_r(p) \iff \frac{Z_v(p)}{Z_r(p)} = \frac{1 + \dfrac{f}{k}p}{1 + \dfrac{f}{k}p + \dfrac{m}{k}p^2}$$

Avec $m = 450\,\mathrm{kg}$, $f = 1\,000\,\mathrm{N\cdot s\cdot m^{-1}}$ et $k \approx 67\,\mathrm{kN\cdot m^{-1}}$, il vient :

$$\frac{f}{k} = 0{,}015\,\mathrm{s}, \qquad \frac{m}{k} = 0{,}006\,75\,\mathrm{s^2}$$

qui correspond bine à l'expression numérique de la fonction de transfert donnée.

Question 5.5. Cette suspension atténue bien les hautes fréquences mais présente une résonance de 15 dB, d'amplification voisine de $10^{15/20} \approx 5{,}6$ au voisinage de $12\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}} = 2\,\mathrm{Hz}$, ce qui ne semble pas très adapté au corps humain. Le confort vibratoire des passagers risque de ne pas être toujours correct avec cette suspension.

Question 5.6. D'après l'allure du diagramme d'argument, on peut identifier deux pulsations de cassures $\omega_1 \approx 20\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ et $\omega_2 \approx 100\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. L'asymptote d'argument passant en ω_1 de 0 à $-\pi$, on identifie l'action d'un second ordre sous-amorti. Perdant $-\pi/2$ en ω_2, on identifie l'action d'un premier ordre de constante de temps $\tau = 1/\omega_2$. Laissant de côté le « rebond de gain » au voisinage de ω_2, on identifie une fonction de transfert du type :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \dfrac{2\xi}{\omega_1}p + \dfrac{p^2}{\omega_1^2}} \times \frac{1}{1 + \dfrac{p}{\omega_2}}$$

On peut déterminer la valeur de ξ à partir de l'amplitude du gain en ω_1, telle que :

$$-20\log(2\xi) = 15\,\text{dB} \iff \boxed{\xi = 10^{-15/20} \approx 0{,}17}$$

Question 5.7. Sur la gamme de fréquences de 4 à 8 Hz, c'est-à-dire des pulsations de 25 à $50\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, les diagrammes de gain des deux modèles sont tous deux atténuateurs. Les diagrammes d'arguments par contre diffèrent. Compte tenu de l'effet recherché d'atténuation des suspensions, le modèle simplifié peut ici suffire.

Question 5.8. Avec l'actionneur qui tend à s'opposer au mouvement, l'équation de dynamique devient :

$$m\ddot{z}_v(t) = -k(z_v(t) - z_r(t)) - f(\dot{z}_v(t) - \dot{z}_r(t)) - C_v\dot{z}_v(t)$$

d'où l'expression canonique de la fonction de transfert :

$$\boxed{\frac{Z_v(p)}{Z_r(p)} = \frac{1 + \dfrac{f}{k}p}{1 + \dfrac{f + C_v}{k}p + \dfrac{m}{k}p^2}}$$

Question 5.9. L'actionneur intervient naturellement sur le coefficient d'amortissement

$$\xi = \frac{f + C_v}{2\sqrt{km}}$$

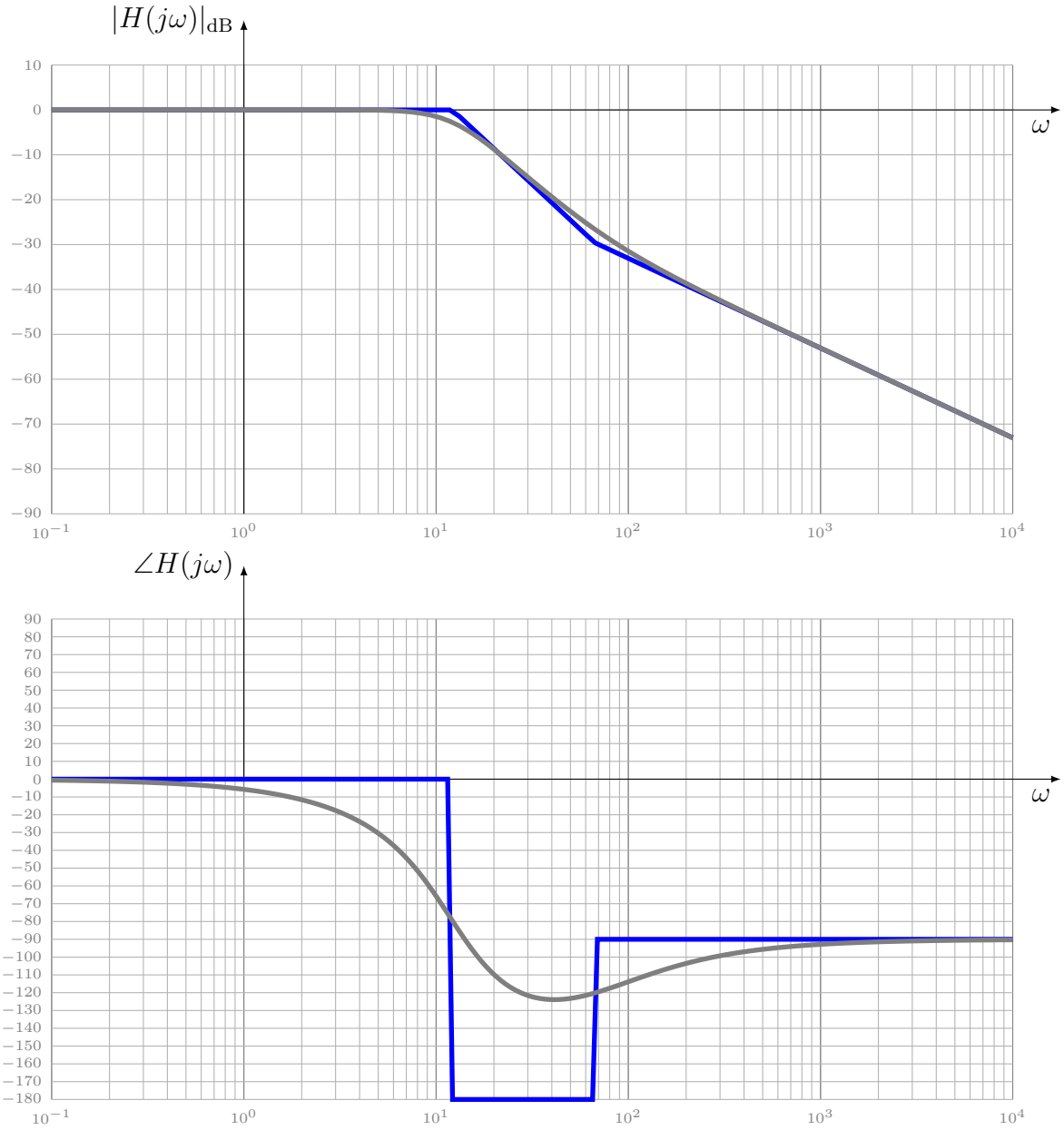
On parle de limite de résonance si $\xi = 1/\sqrt{2}$, d'où

$$\frac{f + C_v}{2\sqrt{km}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \boxed{C_v = \sqrt{2km} - f}$$

Question 5.10. Avec la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{1 + \tau p}{1 + \dfrac{2\xi p}{\omega_0} + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$$

et les valeurs numériques $\tau = 0{,}015\,\text{s}$, $\xi = 0{,}7$ et $\omega_0 = 12{,}17\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, il vient les diagrammes de Bode :



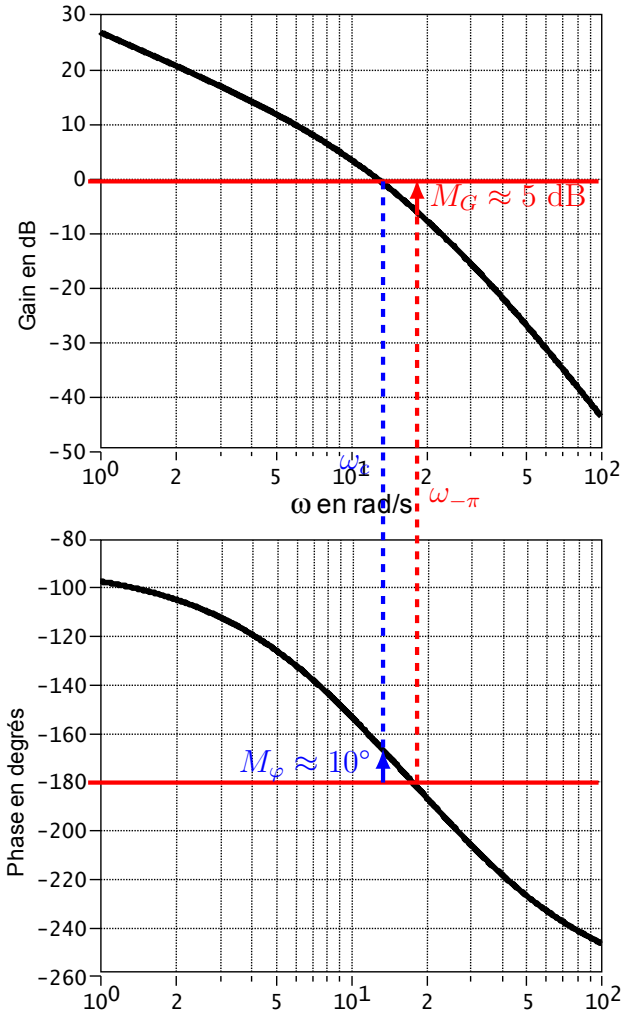
La caractère actif permet donc de supprimer tout phénomène de résonance et ainsi maximiser le confort des passagers.

— Exercice 6 —

Étude de la stabilité d'un système dans le plan de Bode

Question 6.1. Pour déterminer la marge de gain, il est nécessaire de trouver la pulsation $\omega_{-\pi}$ pour laquelle l'argument vaut $-\pi$. Partant de $-180°$, on trace en rouge une horizontale pour trouver $\omega_{-\pi}$, puis on remonte sur le diagramme de gain et on relève, à cette pulsation, la distance de la courbe au 0 dB. Ici $M_G = 5\,\text{dB}$.

Pour déterminer la marge de phase, il est nécessaire de trouver la pulsation de coupure ω_c pour laquelle le gain est nul. Partant de 0 dB, on trace en bleu une horizontale pour trouver ω_c, puis on redescend sur le diagramme d'argument et on relève la distance de $-180°$ à la courbe. Ici $M_\varphi = 10°$.

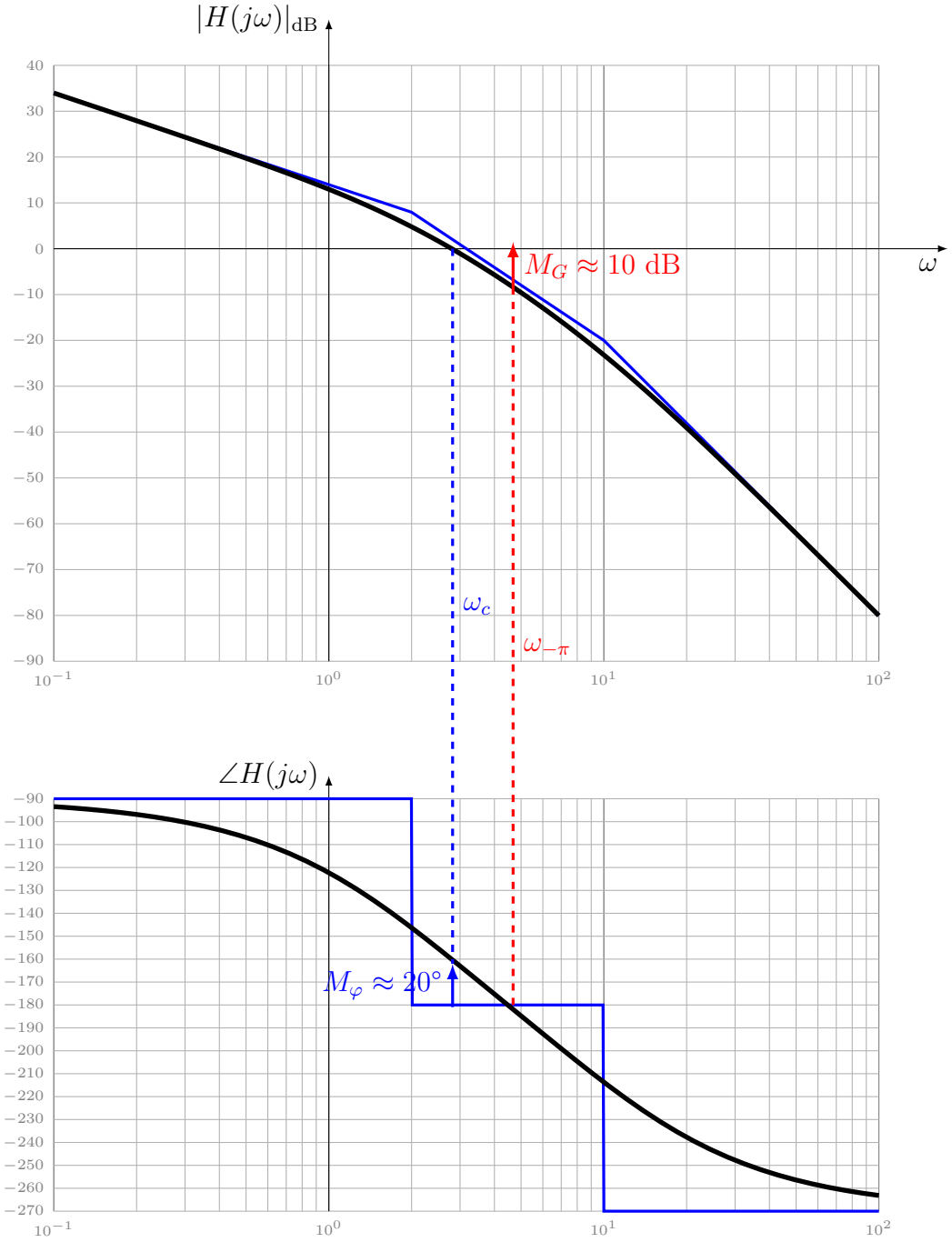


Les deux marges sont positives donc le système en boucle fermée est stable.

— Exercice 7 —

Étude de la stabilité d'un système

Question 7.1. En décomposant la fonction de transfert en un produit d'un intégrateur et de deux premiers ordres, il vient, par superposition, les diagrammes de Bode suivants.



Question 7.2. On détermine graphiquement les marges de stabilité. Comme les deux sont positives, le système en boucle fermée est stable.

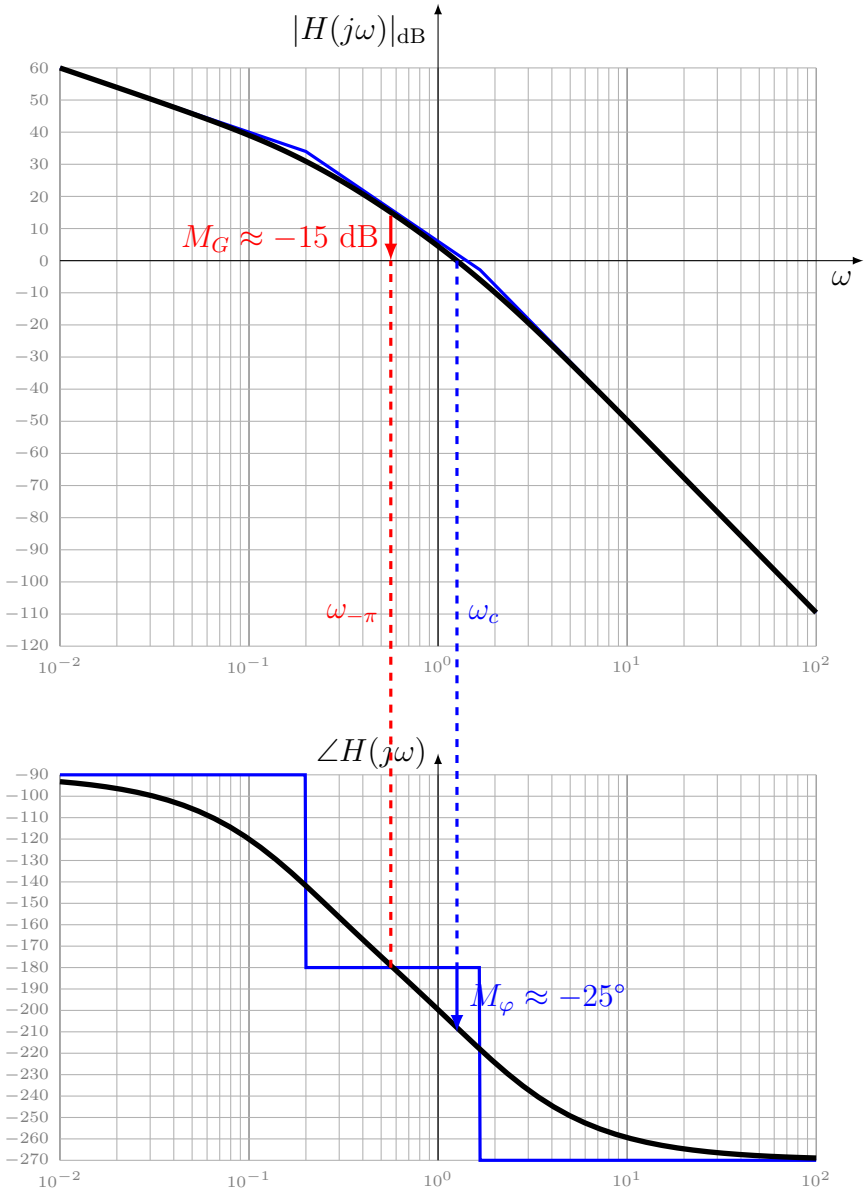
Question 7.3. La fonction de transfert en boucle ouverte est définie par :

$$\text{FTBO}(p) = K H_{\text{axe x}}(p) G = \frac{10K}{p\,(1 + 6\,p + 3\,p^2)}$$

Travaillant sur le polynôme de degré 2 du dénominateur, de discriminent $\Delta = 24 > 0$, il vient qu'il admet 2 racines réelles distinctes $-1 \pm \sqrt{\Delta}/6$ et peut donc être factorisé sous la forme :

$$1 + 6\,p + 3\,p^2 \approx (1 + 0{,}6p)\,(1 + 5\,p)$$

Par superposition des tracés de l'intégrateur et des deux premiers ordres, il vient avec $K = 1$ les diagrammes de Bode suivants.



Question 7.4. Ave $K = 1$, on trouve

$$M_G \approx -15\,\text{dB} \quad \text{et} \quad M_\varphi \approx -25°$$

Ces deux marges sont négatives, donc le système en boucle fermée n'est pas stable avec le réglage $K = 1$.

Question 7.5. Pour avoir une marge de phase $M_\varphi \geqslant 30\,°$, il faut que la pulsation de coupure vérifie $\omega_c \leqslant 0{,}23\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ce qui implique de rabaisser la courbe de gain d'au moins 28 dB, d'où :

$$20\log(K) \leqslant -28\,\text{dB} \iff K \leqslant 10^{-28/20} \approx 0{,}04$$

Pour avoir une marge de gain $M_G \geqslant 10\,\text{dB}$, il faut qu'à la pulsation $\omega_{-\pi} = 0{,}6\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, le gain soit inférieur à $-10\,\text{dB}$ et comme il vaut 15 dB avec $K = 1$, alors il faut avoir

$$20\log(K) \leqslant -25\,\text{dB} \iff K \leqslant 10^{-25/20} \approx 0{,}056$$

Ainsi, pour satisfaire les deux critères, il suffit de fixer

$$\boxed{0 < K \leqslant 0{,}04}$$

— Exercice 8 —

Précision d'un moteur pneumatique asservi

Question 8.1. Dans le cas n° 1, la BO est de classe 0 et de gain $K_{\text{BO}} = \dfrac{5K}{2}$. Ainsi :

— l'erreur statique de position pour une entrée $e(t) = e_0\, u(t)$ vaut

$$\varepsilon_S = \frac{e_0}{1 + K\text{BO}} = \frac{2e_0}{2 + 5K}$$

— l'erreur de traînage pour une entrée $e(t) = at\, u(t)$ tend vers $+\infty$.

Dans le cas n° 2, la BO est de classe 1 et de gain $K_{\text{BO}} = 3K$. Ainsi :

— l'erreur statique de position pour une entrée $e(t) = e_0\, u(t)$ est nulle ;

— l'erreur de traînage pour une entrée $e(t) = at\, u(t)$ vaut

$$\varepsilon_T = \frac{a}{K\text{BO}} = \frac{a}{3K}$$

Dans le cas n° 3, la BO est de classe 0 et de gain $K_{\text{BO}} = K$. Ainsi :

— l'erreur statique de position pour une entrée $e(t) = e_0\, u(t)$ vaut

$$\varepsilon_S = \frac{e_0}{1 + K\text{BO}} = \frac{e_0}{1 + K}$$

— l'erreur de traînage pour une entrée $e(t) = at\, u(t)$ tend vers $+\infty$.

Question 8.2. Seuls les cas 1 et 3 ne respecte pas le cahier des charges quelle que soit la valeur de K. Ainsi, pour respecter l'exigence de précision dans le cas n° 1, il faut avoir :

$$\frac{\varepsilon_S}{e_0} = \frac{2}{2 + 5K} \leqslant \frac{1}{100} \iff 100 \leqslant \frac{2 + 5K}{2} \iff \boxed{K \geqslant 39{,}6}$$

Avec une démarche identique, on trouve pour le cas n° 3

$$\frac{\varepsilon_S}{e_0} = \frac{1}{1 + K} \leqslant \frac{1}{100} \iff 100 \leqslant 1 + K \iff \boxed{K \geqslant 99}$$

— Exercice 9 —

Étude de la sensibilité aux perturbations d'un système

Question 9.1. Par théorème de superposition, et notant $\text{FTBO}(p) = H(p)G(p)$, on a :

— annihilant la perturbation :

$$\frac{\varepsilon(p)}{E(p)} = \frac{1}{1+\text{FTBO}(p)}$$

— annihilant la consigne :

$$\frac{\varepsilon(p)}{P(p)} = \frac{H(p)}{1+\text{FTBO}(p)}$$

d'où, par somme :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1+\text{FTBO}(p)}\left(E(p) + H(p)\ P(p)\right)$$

Avec $E(p) = \dfrac{e_0}{p}$ et $P(p) = \dfrac{p_0}{p}$ et les expressions de $H(p)$ et $G(p)$ données, il vient :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1+\dfrac{200}{p\,(1+0{,}4p)\,(1+0{,}2p)}}\left(\frac{e_0}{p} + \frac{10p_0}{p^2\,(1+0{,}2p)}\right)$$

Par théorème de la valeur finale, il vient alors :

$$\varepsilon_S = \lim_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} \frac{1}{1+\dfrac{200}{p\,(1+0{,}4p)\,(1+0{,}2p)}}\left(e_0 + \frac{10p_0}{p\,(1+0{,}2p)}\right) = \frac{p_0}{20}$$

Ce résultat est cohérent avec le fait que la FTBO est de classe 1 et que l'action intégrale est située en aval de la perturbation et donc n'annihile pas son effet.

Question 9.2. On pourrait penser *a priori* qu'il faille augmenter la classe de la FTBO telle que l'erreur induite par la perturbation soit nulle. Sauf que dans ce cas, l'argument sera toujours en dessous de $-180°$ et donc le système en boucle fermée ne sera pas stable.

Il est possible de choisir un correcteur PI à actions proportionnelle et intégrale de fonction de transfert du type

$$C(p) = \frac{K\,(1+T_i p)}{p}$$

réglé tel que la cassure $1/T_i$ intervienne en amont de la coupure, en pratique 10 fois plus faible que la plus petite pulsation de cassure, soit $T_i \approx 0{,}25\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, puis le gain K de sorte que la coupure soit en $\sqrt{\dfrac{2{,}5}{T_i}}$.

Vous aurez un cours complet sur les différents correcteurs et leur réglage l'an prochain.

— Exercice 10 —

Réglage graphique des marges de stabilité par correction proportionnelle

Question 10.1. Comme l'argument en basse fréquence est à $-90°$, le système possède une action intégrale. Comme en moyennes fréquences, il passe de façon monotone de $-90°$ à -270 alors il est produit d'un second ordre sous-amorti. Comme on n'observe pas de résonance sur le diagramme de gain, le coefficient d'amortissement est compris entre $1/\sqrt{2}$ et 1, soit :

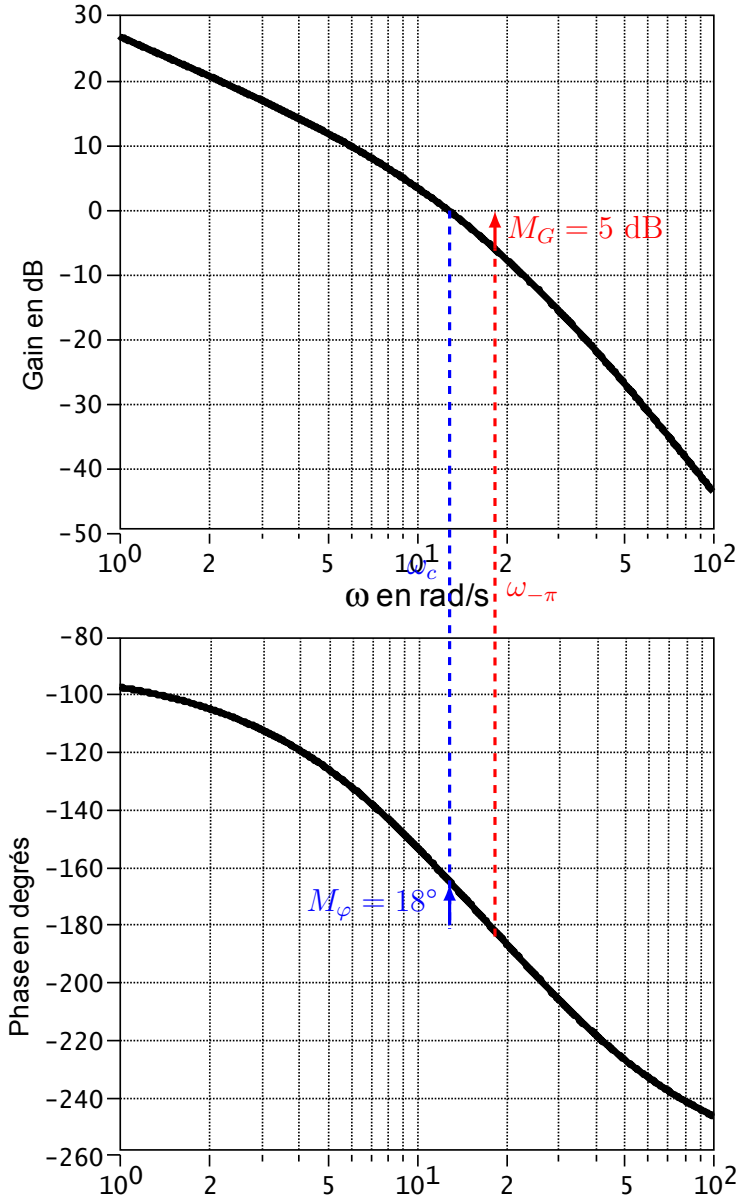
$$H(p) = \frac{A}{p\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}$$

avec $\omega_0 = 15\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $20\log(A) = 45\,\text{dB} \approx 180$. C'est une fonction de transfert de classe 1 et d'ordre 3.

Question 10.2. Pour asservir un système en position avec un moteur électrique, il est nécessaire d'intégrer la vitesse, ce qui conduit bien à une action intégrale. Si le moteur électrique est un moteur à courant continu un peu surdimensionné, c'est-à-dire qu'il est très peu chargé, il est possible que son coefficient d'amortissement soit voisin de 1. Donc il est possible que cette FTBO soit caractéristique d'un asservissement de position.

Question 10.3. Comme l'action intégrale est par définition associée à l'intégration vitesse $\rightarrow$ position, elle se situe en aval de la perturbation et n'agira donc pas sur elle pour annuler l'erreur statique. Ainsi, seul le gain K de la correction proportionnelle pourra agir sur cette erreur, qui tendra vers 0 si, et seulement si, $K \rightarrow +\infty$.

On trace ci-après les marges de gain et marges de phases sur les diagrammes de Bode tracés avec $K = 1$.



Question 10.4. Pour satisfaire l'exigence de marge de phase $M_\varphi > 45\,°$ du cahier des charges, il faut que la pulsation de coupure vérifie $\omega_c \leqslant 6\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ce qui implique de rabaisser la courbe de gain d'au moins 10 dB, d'où :

$$20\log(K) \leqslant -10\,\text{dB} \iff \boxed{K \leqslant 10^{-10/20} \approx 0{,}31}$$

Question 10.5. Pour satisfaire l'exigence de marge de gain $M_G > 10\,\text{dB}$ du cahier des charges, il faut qu'à la pulsation $\omega_{-\pi} = 15\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, le gain soit inférieur à $-10\,\text{dB}$ et comme il vaut $-5\,\text{dB}$ avec $K = 1$, alors il faut avoir

$$20\log(K) \leqslant -5\,\text{dB} \iff \boxed{K \leqslant 10^{-5/20} \approx 0{,}56}$$

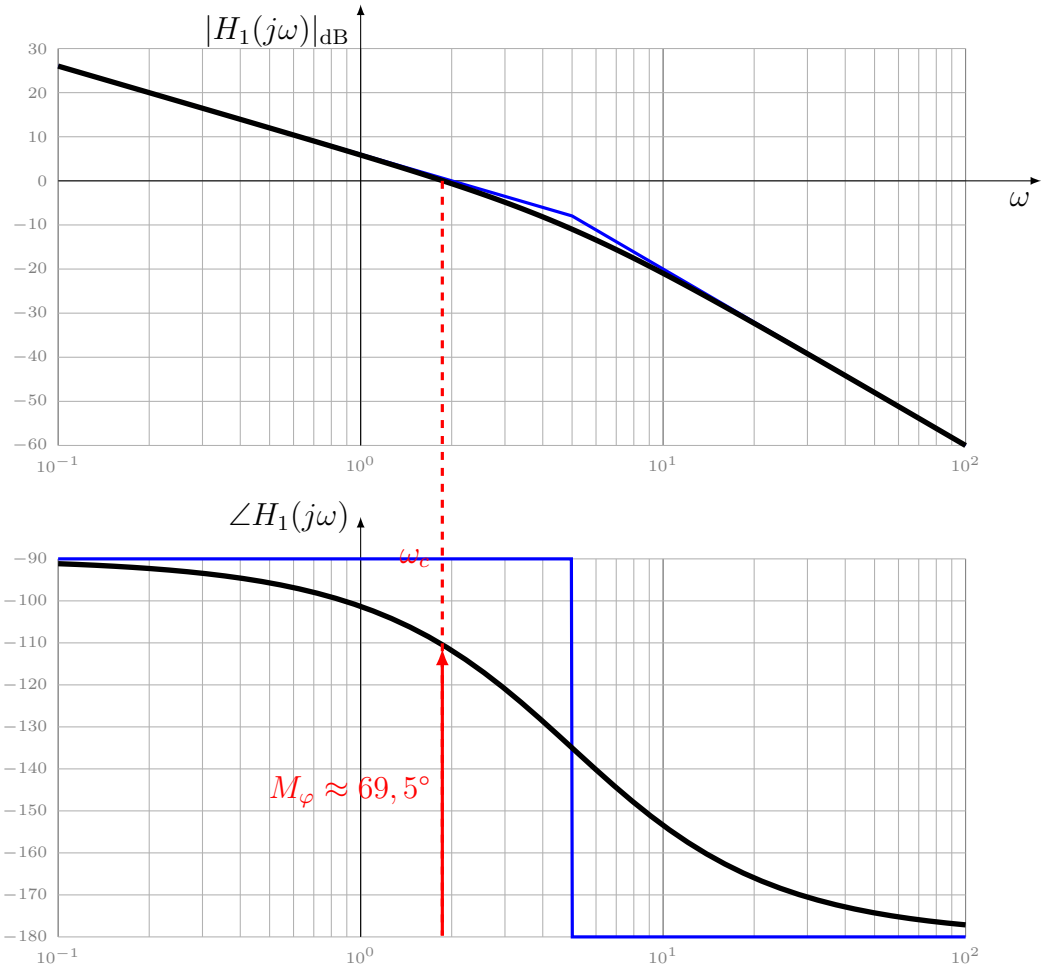
Question 10.6. Ainsi, pour satisfaire les deux critères, il suffit de fixer

$$K \in]0;0{,}31] \cap]0;0{,}56] \implies \boxed{0 < K \leqslant 0{,}31}$$

— Exercice 11 —

Réglage des marges de stabilité par correction proportionnelle

Question 11.1. Par composition des tracés d'un premier ordre et d'un intégrateur, il vient les diagrammes de Bode de la fonction de transfert $H_1(p) = \dfrac{2}{p\left(1+\dfrac{p}{5}\right)}$.



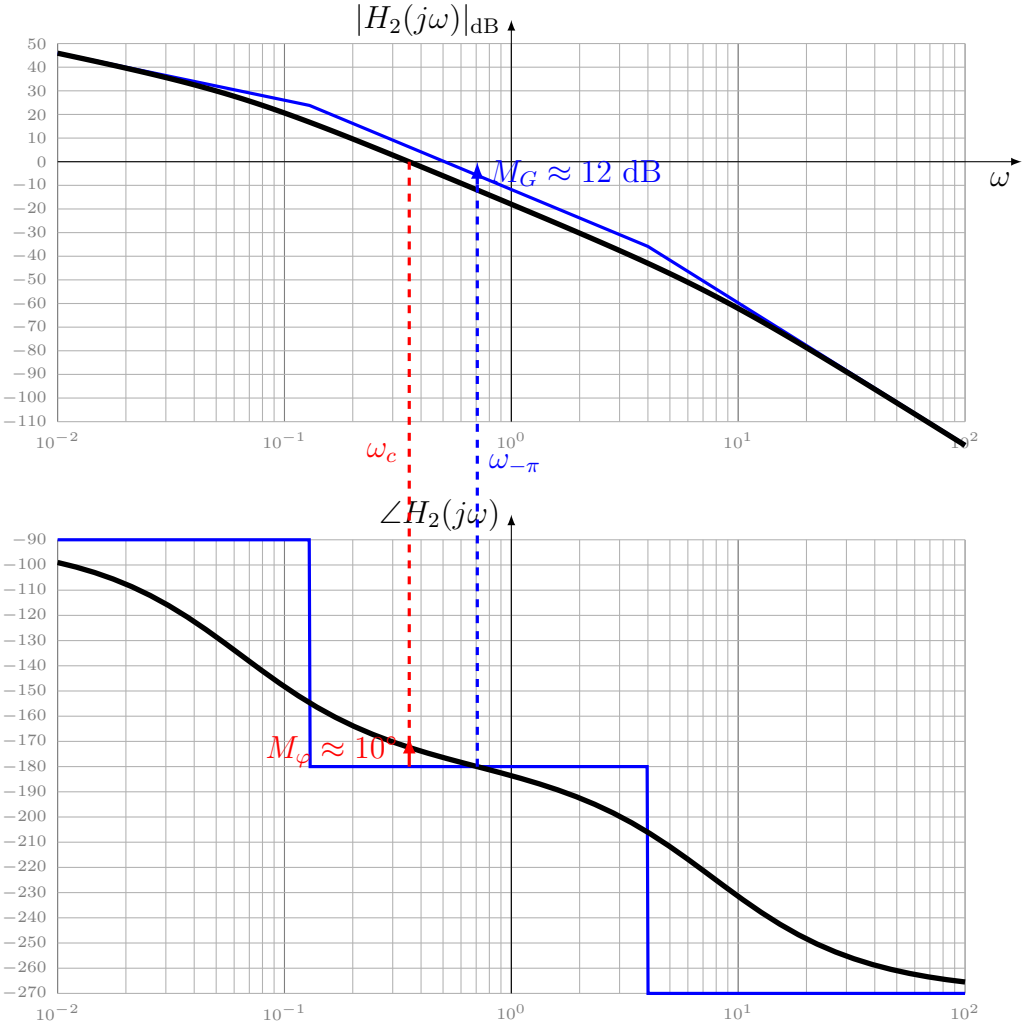
Question 11.2. Comme l'argument tend asymptotiquement vers $-\pi$, la marge de gain est infinie pour toute valeur de K positive. Pour avoir une marge de phase $M_\varphi > 45\,°$, il faut que la pulsation de coupure vérifie $\omega_c \leqslant 5\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ce qui implique de remonter au maximum la courbe de gain d'au moins 10 dB, d'où :

$$20\log(K) \leqslant 10\,\text{dB} \iff \boxed{K \leqslant 10^{10/20} \approx 3{,}16}$$

Question 11.3. Après avoir vérifié que le polynôme du second degré $1+8p+2p^2$, avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\xi = 4/\sqrt{2} \gg 1$ pouvait être factorisé avec 2 pôles réels $-2 \pm \sqrt{14}/2$ tel que

$$1+8p+2p^2 \approx \left(1+\frac{p}{0{,}12}\right)\left(1+\frac{p}{3{,}87}\right)$$

Par composition des tracés des deux premiers ordre et d'un intégrateur, il vient les diagrammes de Bode de la fonction de transfert $H_2(p) = \dfrac{2}{p\left(1+\dfrac{p}{0{,}12}\right)\left(1+\dfrac{p}{3{,}87}\right)}$.



Question 11.4. Pour avoir une marge de phase $M_\varphi > 45\,°$, il faut que la pulsation de coupure vérifie $\omega_c < 0{,}06\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ce qui implique de rabaisser la courbe de gain d'au moins 20 dB, d'où :

$$20\log(K) \leqslant -28\,\text{dB} \iff K \leqslant 10^{-28/20} \approx 0{,}04$$

Pour avoir une marge de gain $M_G > 10\,\text{dB}$, il faut qu'à la pulsation $\omega_{-\pi} = 0{,}707\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$,

le gain soit inférieur à $-10\,\mathrm{dB}$ et comme il vaut $-12\,\mathrm{dB}$ avec $K = 1$, alors il faut avoir

$$20\log(K) \leqslant 2\,\mathrm{dB} \iff K \leqslant 10^{2/20} \approx 1{,}25$$

Ainsi, pour satisfaire les deux critères, il suffit de fixer

$$\boxed{0 < K \leqslant 0{,}04}$$

Question 11.5. Si la boucle ouverte est multipliée par 2 alors, le gain du correcteur K_N doit satisfaire à $2K_N = K \iff K_N = \dfrac{K}{2}$ d'où la nouvelle valeur de K à programmer :

$$\boxed{0 < K \leqslant 0{,}02}$$

— Exercice 12 —

Réglage du correcteur d'un système d'orientation du mat d'une éolienne

Question 12.1. Le rapport de transmission R du réducteur n'apparait pas dans le schéma-blocs de l'asservissement car si on l'avait mis en aval de $\Theta(p)$, il aurait fallu aussi intégrer son inverse dans un adaptateur de consigne telle que l'écart $\Theta_c(p) - \Theta(p)$ soit l'image de l'erreur. Or par déplacement aval du point de prélèvement de la chaine de retour on retrouve cette valeur inverse telle qu'elle puisse alors être mise en aval du comparateur. Par produit dans la chaîne directe avec R, elle disparait pour faire 1 ; d'où le schéma-blocs.

Question 12.2. Si le vent agît comme une perturbation, alors l'intégration vitesse $\to$ position se faisant en aval, elle n'annihilera pas l'erreur statique, bien que la FTBO soit de classe 1. Il n'est donc pas possible de trouver un réglage du correcteur proportionnel pour que l'erreur statique de position induite par une perturbation soit nulle. On supposera donc que le vent n'appose aucun couple à la rotation du mat de l'éolienne et que la liaison pivot n'a pas de frottement sec.

Question 12.3. On commence par écrire l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte sous forme canonique

$$\text{FTBO}(p) = \frac{K}{p\left(1+\frac{p}{10}\right)\left(1+\frac{p}{40}\right)}$$

Pour avoir une marge de phase $M_\varphi > 45°$, il faut que l'argument

$$\angle\text{FTBO}(j\omega) \equiv -\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{\omega}{10}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{\omega}{40}\right) \ [2\pi]$$

au niveau de la pulsation de coupure vérifie $\angle\text{FTBO}(j\omega_c) > \dfrac{-3\pi}{4}$, soit

$$\text{Arctan}\left(\frac{\omega_c}{10}\right)+\text{Arctan}\left(\frac{\omega_c}{40}\right) < \frac{\pi}{4} \iff \frac{5\omega_c}{40} < 1-\frac{\omega_c^2}{400} \iff \omega_c < -25+5\sqrt{41} \approx 7\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

où nous avons utilisé une expression du type $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ avec $\tan(a) = \dfrac{\omega_c}{10}$ et $\tan(b) = \dfrac{\omega_c}{40}$. Comme $7 \approx 10^{4/5}$, alors par théorème de Thales avec une pente de $-20\,\text{dB/dec}$, on trouve que

$$|\text{FTBO}(j\omega_c)|_{\text{dB}} \approx -\frac{4}{5} \times 20 = -16\,\text{dB}$$

d'où on trouve qu'il est possible de remonter au maximum la courbe de 16 dB, soit :

$$20\log(K) \leqslant 16\,\text{dB} \iff K \leqslant 10^{16/20} \approx 7$$

Pour satisfaire l'exigence de précision en poursuite sachant que la FTBO est de classe 1, il faut que

$$\frac{1}{K} < 0{,}5 \iff K > 2$$

Ainsi, pour satisfaire les deux exigences, il faut

$$\boxed{2 < K \leqslant 7}$$

Question 12.4. Avec les valeurs de $K \in]2;7]$, on a, par conception, une marge de phase $M_\varphi > 45°$. Sachant $\omega_{-\pi} = \omega_0 = \sqrt{10 \times 40} = 20\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, il vient que si $\omega_c = 7\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ alors la marge de gain vaut

$$M_G \geqslant \underbrace{\frac{20}{5}}_{7\to 10} + \underbrace{\frac{40}{3}}_{10\to 20} \approx 18\,\mathrm{dB}$$

car de 7 à 10 il y a 1/5 de décade à $-20\,\mathrm{dB/dec}$ et que de 10 à 20, sachant que $2 \approx 10^{1/3}$, on a 1/3 de décade à $-40\,\mathrm{dB/dec}$. La marge de gain augmente quand K diminue.

— Exercice 13 —

Asservissement de position d'un système de préhension de lamelle

Question 13.1. Pour déterminer la FTBO, il n'est pas nécessaire de prendre en compte la perturbation. Calculons dans un premier temps la fonction de transfert associée au moteur. Par formule de Black, il vient :

$$\frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{\dfrac{K_c}{RJp}}{1 + \dfrac{K_e K_c}{RJp}} = \frac{\dfrac{1}{K_e}}{1 + \dfrac{RJ}{K_e K_c} p}$$

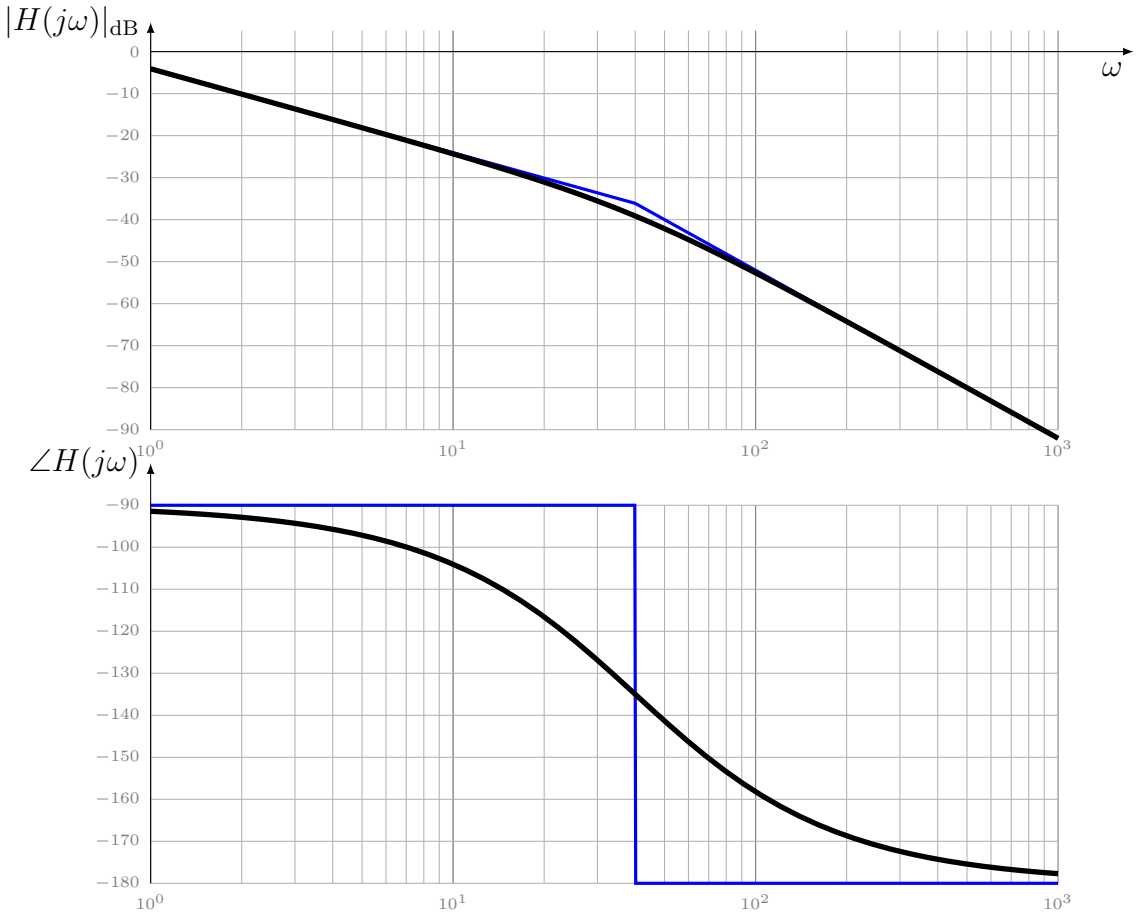
d'où par produit avec les trois autres blocs :

$$H(p) = A \times \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} \times \frac{hr}{2\pi p} \times K_p = \frac{\dfrac{AhrK_p}{2\pi K_e}}{p\left(1 + \dfrac{RJ}{K_e K_c} p\right)}$$

Par application numérique, on trouve

$$H(p) = \frac{0{,}625A}{p(1 + 0{,}025p)}$$

Question 13.2. Sachant $0{,}025 = 1/40$ et avec $A = 1$, il vient les diagrammes de Bode asymptotiques et réels de $H(j\omega)$.



Question 13.3. Sachant que l'argument tend asymptotiquement vers $-\pi$ en hautes fréquences, la marge de gain est infinie et satisfait donc le cahier des charges. Pour avoir une marge de phase $M_\varphi \geqslant 45\,°$, il faut que la pulsation de coupure vérifie $\omega_c \leqslant 40\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ce qui implique de remonter la courbe de gain d'au maximum 40 dB, d'où :

$$20\log(K) \leqslant 40\,\text{dB} \iff \boxed{K \leqslant 10^{40/20} = 100}$$

Question 13.4. Pour que le critère de non-dépassement de la consigne soit vérifié, il faut un coefficient d'amortissement en boucle fermée $\xi_{\text{BF}} \geqslant 1$. Avec

$$\text{FTBF}(p) = \frac{\dfrac{0{,}625A}{p\left(1+\dfrac{p}{40}\right)}}{1+\dfrac{0{,}625A}{p\left(1+\dfrac{p}{40}\right)}} = \frac{1}{1+\dfrac{p}{0{,}625A}+\dfrac{p^2}{40\times 0{,}625A}}$$

on trouve un coefficient d'amortissement

$$\xi_{\text{BF}} = \frac{\sqrt{40\times 0{,}625A}}{2\times 0{,}625A} = \sqrt{\frac{10}{0{,}625A}} = \sqrt{\frac{16}{A}} \geqslant 1 \iff \boxed{0 < A \leqslant 16}$$

Question 13.5. Finalement, pour satisfaire le cahier des charges, il faut :

$$\boxed{0 < A \leqslant 16}$$