

Exercice 1 (★). Montrer que $\mathcal{F} = ((1, -3, 0), (0, 2, 1), (1, 0, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Résultat attendu : On montre que c'est une famille libre à $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ éléments.

Exercice 2 (★). On pose $E = \mathbb{R}[X]$. Soient $F = \text{Vect}(X, X^2)$ et $G = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(2) = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Montrer que $F \cap G$ est une droite vectorielle.

Résultat attendu :

1. C'est immédiat pour F , on montre que G contient le polynôme nul et est stable par combinaison linéaire.
2. On détermine une base de $F \cap G$ à un élément.

Exercice 3 (★). Démontrer que l'ensemble E des suites arithmétiques à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

Résultat attendu : C'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles, de dimension 2.

Exercice 4 (★). Soit F l'ensemble des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$, solutions de $y'' + y' - 2y = 0$. Montrer qu'il s'agit d'un espace vectoriel de dimension finie et déterminer une base.

Résultat attendu : C'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont une base est $(t \mapsto e^t, t \mapsto e^{-2t})$.

Exercice 5 (★). Soit $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (ax^2 + bx + c) \cos(x)\}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. Déterminer une base de E et sa dimension.

Résultat attendu :

1. C'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions réelles.
2. Une base est $(x \rightarrow \cos(x), x \rightarrow x \cos(x), x \rightarrow x^2 \cos(x))$ et $\dim(E) = 3$.

Exercice 6 (★★). Montrer que la famille $(X^k(X-1)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Résultat attendu : On montre que c'est une famille libre à $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ éléments.

Exercice 7 (★★). Dans $\mathbb{R}_n[X]$, soit H l'espace vectoriel des polynômes admettant 2 pour racine. Déterminer une base et la dimension de H .

Résultat attendu : H est de dimension n , de base par exemple $(X^k(X-2))_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ ou $((X-2)^k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

Exercice 8 (★). On se place dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = ((3, 2, 1), (1, 2, 3), (1, 1, 1))$.

Résultat attendu : On trouve $\text{rg}(\mathcal{F}) = 2$.

Exercice 9 (★★). Dans l'ensemble des applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on donne les éléments f_0, f_1, f_2, f_3 et f_4 définis par : pour tout réel x ,

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \cos^2 x, \quad f_3(x) = \sin x \quad \text{et} \quad f_4(x) = \cos(2x).$$

Déterminer le rang de la famille $S = (f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$.

Résultat attendu : On trouve $\text{rg}(S) = 4$.

Exercice 10 (★). Dans $\mathbb{R}^4$, on donne $\varepsilon_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\varepsilon_2 = (2, 1, 3, 0)$, $\varepsilon_3 = (1, -1, 1, 1)$.

1. Prouver que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$, la compléter pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer un sous-espace vectoriel supplémentaire de $G = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Résultat attendu :

1. $\varepsilon_4 = (1, 0, 0, 0)$ convient (par exemple).
2. La caractérisation des supplémentaires par les bases montre que $\text{Vect}(\varepsilon_4)$ convient.

Exercice 11 (★). Dans $\mathbb{C}^3$, on donne $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3, 3x + 4y + 5iz = 0\}$. H est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$? Si oui, en donner une base et déterminer un sous-espace supplémentaire de H dans $\mathbb{C}^3$.

Résultat attendu : H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$. Une base de H est $((-\frac{4}{3}, 1, 0), (-\frac{5i}{3}, 0, 1))$ et un supplémentaire de H est $\text{Vect}((1, 0, 0))$ (par exemple).

Exercice 12 (★★). Soit $m \in \mathbb{R}$ et $e_1 = (1, 1, 0)$. On pose $F_m = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + z = m\}$ et $G = \text{Vect}(e_1)$.

1. Déterminer les valeurs de m telles que F_m soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
2. Prouver qu'alors $\mathbb{R}^3 = F_m \oplus G$.

Résultat attendu :

1. On montre par analyse-synthèse que seul $m = 0$ convient. Une base de F_0 est $((1, 0, -1), (0, 1, 2))$.
2. N'importe laquelle des caractérisations convient.

Exercice 13 (★). On se place dans $E = \mathbb{R}^3$, avec $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et que $E = F \oplus G$. Expliciter une base adaptée à cette somme directe.

Résultat attendu : On utilise la caractérisation pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E , puis on cherche des bases : $((1, 1, 1))$ est une base de G et $((1, 0, -1), (0, 1, -1))$ est une base de F . Les juxtaposer et montrer qu'on trouve une base de E permet de conclure.

Exercice 14 (★★). Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On pose $F = \text{Vect}(X^2 - X, X^2 + 1)$ et $G = \{P \in E \mid P(-1) = P'(-1) = 0\}$.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E .
2. Montrer que $E = F \oplus G$ et déterminer une base de E adaptée à cette somme directe.
3. Déterminer la décomposition dans $F \oplus G$ de $R(X) = 4X^2 - 4X + 2$.

Résultat attendu :

1. On utilise la caractérisation des sous-espaces vectoriels.
2. $(X^2 - X, X^2 + 1)$ est une base de F et $((X + 1)^2)$ est une base de G . On utilise ensuite la caractérisation des supplémentaires par juxtaposition des bases.
3. $R(X) = (2(X^2 - X) + 3(X^2 + 1)) - (X + 1)^2$

Exercice 15 (Type DS). Soient $a_1, \dots, a_{n+1}$ des réels deux à deux distincts. Pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on pose :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}.$$

1. Pour cette question uniquement, on pose $n = 1$, $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$. Calculer $L_1(X)$ et $L_2(X)$.
On n'hésitera pas à se servir de cet exemple pour conjecturer les réponses des questions suivantes...
2. (a) Soit $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Calculer $L_i(a_i)$.
 (b) Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$, avec $i \neq j$. Calculer $L_i(a_j)$.
3. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n .
 (a) Quel est le degré des polynômes $L_i(X)$?
 (b) Montrer que la famille $(L_i(X))_{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.
 (c) En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Soient $b_1, \dots, b_{n+1}$ des réels fixés. On pose : $P(X) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i L_i(X)$. Ce polynôme s'appelle polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n+1$ couples de scalaires (a_i, b_i) .
 (a) Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux 2 couples $(1, 1)$ et $(2, 1)$.
 (b) On se place de nouveau dans le cadre général de $n+1$ couples de scalaires (a_i, b_i) . Montrer que le polynôme d'interpolation de Lagrange P est de degré inférieur à n et vérifie $\forall j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, P(a_j) = b_j$.
 (c) Montrer que P est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui vérifie $\forall j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, P(a_j) = b_j$.

Résultat attendu :

1. $L_1(X) = \frac{X-2}{1-2} = -X+2$ et $L_2(X) = \frac{X-1}{2-1} = X-1$.
2. (a) Soit $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. $L_i(a_i) = \prod_{k=1, k \neq i}^{n+1} 1 = 1$.
 (b) Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$, avec $i \neq j$. $L_i(a_j) = 0$ car le terme $k = j$ du produit est nul.
3. (a) Soit $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $\deg(L_i(X)) = \sum_{k=1, k \neq i}^{n+1} \deg\left(\frac{X - a_k}{a_i - a_k}\right) = \sum_{k=1, k \neq i}^{n+1} 1 = (n+1) - 1 = n$.
 (b) La question précédente garantit que les $L_i(X)$ sont bien dans $\mathbb{R}_n[X]$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on suppose que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i L_i(X) = 0$. Pour $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on évalue ce polynôme en a_i , ce qui donne $0 + \lambda_i 1 + 0 = 0$ (d'après la question 2), et donc $\lambda_i = 0$. Ceci étant vrai pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n+1} = 0$. La famille est donc bien une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.
 (c) La famille $(L_i(X))_{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ par la question précédente. Comme de plus elle contient $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ éléments, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. (a) $P(X) = L_1(X) + L_2(X) = -X+2 + X-1 = 1$ d'après la question 1.
 (b) On a montré en 3.a. que les $L_i(X)$ sont dans $\mathbb{R}_n[X]$, donc P l'est aussi par combinaison linéaire. De plus, $\forall j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, P(a_j) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i L_i(a_j) = 0 + b_j L_j(a_j) + 0 = b_j$ par la question 2.
 (c) On suppose que P et Q sont deux polynômes qui conviennent. Alors $P - Q \in \mathbb{R}_n[X]$. De plus, $\forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, (P - Q)(a_i) = P(a_i) - Q(a_i) = b_i - b_i = 0$. Or les a_i sont deux à deux distincts, donc $P - Q$ admet au moins $n+1$ racines distinctes. Donc $P - Q$ est le polynôme nul, et $P = Q$. D'où l'unicité.