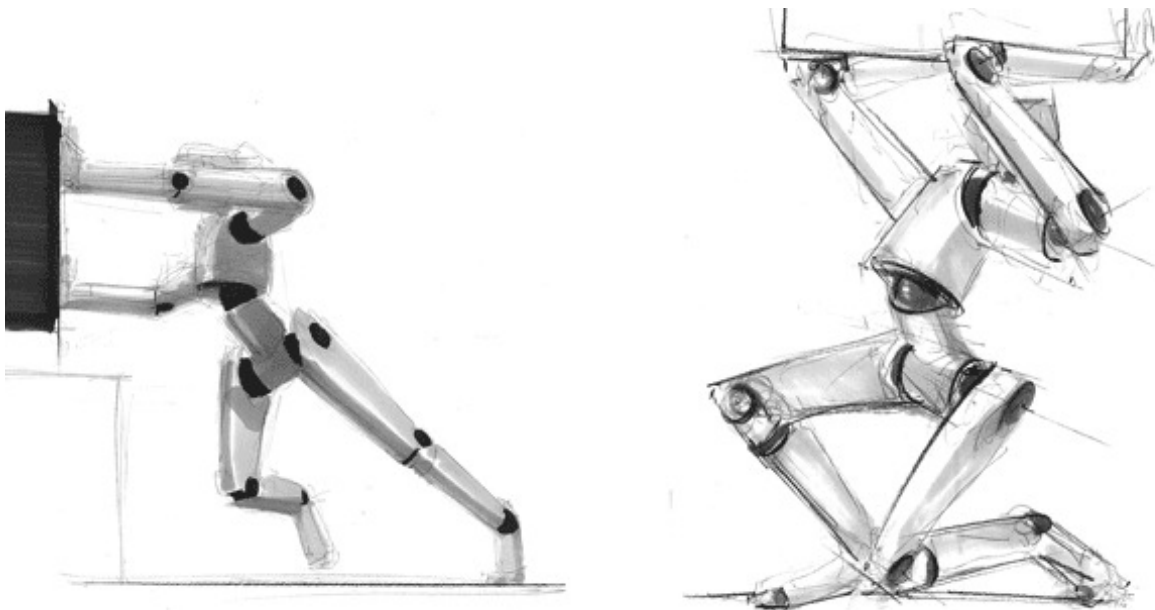


Modélisation et étude des équilibres statiques



Objectifs

Ce cours s'intéresse à l'étude des conditions d'équilibre statique des solides avec ou sans frottement. Les objectifs sont de pouvoir dimensionner les actionneurs en fonctionnement statique ou quasi-statique ou encore de déterminer les actions mécaniques effectivement transmises par les différentes liaisons d'un mécanisme afin de les dimensionner.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Principe fondamental de la statique	4
2.1	Notion d'isolement, actions mécaniques extérieures	4
2.2	Énoncé du principe fondamental de la statique	5
2.3	Cas particulier d'un système soumis à deux glisseurs	7
2.4	Cas particulier d'un système soumis à trois glisseurs	8
3	Résolution d'un problème de statique	9
3.1	Méthode systématique	9
3.2	Stratégie de résolution	10
4	Exemple d'application : moteur thermique d'aéromodélisme	11
4.1	Résolution analytique	13
4.2	Résolution graphique	16



Nicolas Mesnier, lycée Jean Perrin, Lyon
Compléments & mises à jour sur le site des PCSI
<https://cahier-de-prepa.fr/pcsi-perrin>

— Version du 18 mars 2024 —

1 Introduction

La « statique » concerne l'étude des équilibres des systèmes matériels dans un référentiel galiléen. On appelle système matériel un ensemble de particules ou points matériels de type fluide (liquide ou gaz) ou solide. Ce peut être un solide seul, un ensemble de solides liés, un solide déformable suivant une loi connue (par exemple les ressorts) ou dans une configuration particulière (par exemple un fil tendu) ou un volume de liquide ou de gaz. Dans ce cours, les ensembles matériels seront principalement des solides « rigides », supposés indéformables, dont on cherchera à déterminer les conditions d'équilibre dans un référentiel galiléen.

Définition 1.1 (Référentiel galiléen)

Un référentiel galiléen, ou inertiel, est un référentiel dans lequel un objet isolé, c'est-à-dire sur lequel ne s'exerce aucune force ou sur lequel la résultante des forces est nulle, est en mouvement de translation rectiligne uniforme.

L'existence de référentiels galiléens est postulée par la première loi de Newton. Ces référentiels sont indispensables à l'étude des équilibres des systèmes matériels puisqu'ils sont eux-mêmes supposés en équilibre.

Définition 1.2 (Équilibre)

Un solide S (ou un ensemble de solides Σ) est dit en équilibre dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ si sa quantité de mouvement est invariable au cours du temps.

La quantité de mouvement d'un solide peut être quantifiée en sommant l'ensemble des quantités de mouvement élémentaires ($\overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_g}} dm$) pour tous les points $M \in S$ en un point quelconque A . Le résultat se met sous la forme d'un torseur cinétique $\{\mathcal{C}_{S/\mathcal{R}_g}\}$ dont la résultante est le produit de la masse m du solide et de la vitesse $\overrightarrow{V_{G,S/\mathcal{R}_g}}$ du centre d'inertie G du solide et dont le moment au point G tient compte des quantités de mouvement de rotation autour des trois axes passant par G . De façon synthétique, la condition d'équilibre se traduit par :

$$\text{ÉQUILIBRE :} \quad \left. \frac{d}{dt} \{\mathcal{C}_{S/\mathcal{R}_g}\} \right|_{\mathcal{R}_g} = \{0\}$$

Le seul moyen qu'un solide ait une quantité de mouvement invariable est qu'il soit animé d'un mouvement de translation uniforme dans un référentiel galiléen. Ce principe est la première des trois lois que Newton a écrit en 1687 et qui sont :

- LOI 1 – *Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état.*
- LOI 2 – *L'altération du mouvement est proportionnelle à la force qui lui est imprimée ; et cette altération se fait en ligne droite dans la direction de la force.*
- LOI 3 – *Pour chaque action, il existe une réaction égale et opposée : l'action est toujours égale à la réaction ; c'est-à-dire que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales, et dans des directions contraires.*

Définition 1.3 (Équilibre statique)

Un solide S (ou un ensemble de solides Σ) est dit en équilibre statique (ou strict) dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ si la position de tous les points de S (ou de Σ) dans ce référentiel est invariable au cours du temps.

Un solide S en équilibre strict dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ est par définition immobile dans ce référentiel et a donc une quantité de mouvement nulle. La condition d'équilibre statique est donc plus stricte que la seule notion d'équilibre puisqu'elle requiert un torseur cinétique identiquement nul.

$$\text{ÉQUILIBRE STATIQUE : } \quad \{\mathcal{C}_{S/\mathcal{R}_g}\} = \{0\}$$

Nous avons schématisé sur la figure 1 les différentes situations d'équilibre strict.

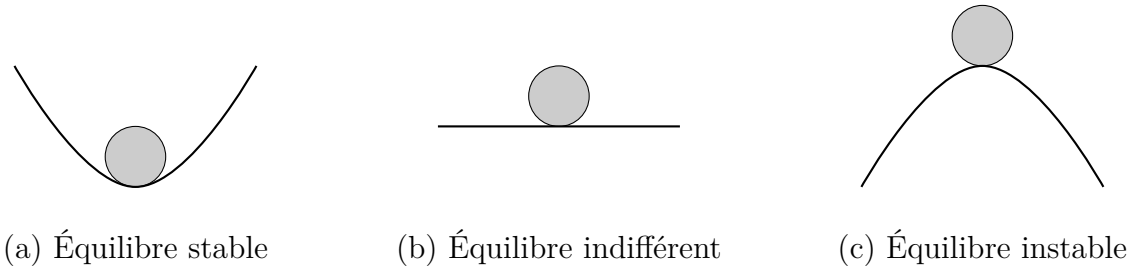


FIGURE 1 – Illustration des différents types d'équilibre statique.

Remarque 1.1 (Étude quasi-statique)

Une étude quasi-statique est menée comme une étude statique alors même que le système matériel est en mouvement par rapport à un référentiel galiléen. Si cette approximation permet de simplifier l'étude, il faut en pratique toujours faire attention à bien vérifier que la norme des composantes du torseur dynamique est négligeable devant celle de la somme des actions mécaniques extérieures auxquelles il est soumis.

2 Principe fondamental de la statique

Soit un système matériel Σ en équilibre statique dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$. Pour étudier l'équilibre d'un système matériel Σ , il est nécessaire de l'isoler.

2.1 Notion d'isolement, actions mécaniques extérieures

Isoler un système matériel Σ , c'est l'extraire « intellectuellement » de son environnement en vue d'étudier les actions mécaniques auxquelles il est soumis. La frontière d'isolement correspond à la surface extérieure du système matériel, notée $\partial\Sigma$. On note $\bar{\Sigma}$ le complémentaire de Σ par rapport à l'univers matériel, appelé l'extérieur du système matériel. Un

système matériel en équilibre statique est nécessairement soumis à des actions mécaniques de contact ou à distance. Une étape essentielle de l'étude des équilibres consiste donc en un **bilan des actions mécaniques extérieures**. Cette étape consiste à identifier toutes les actions mécaniques exercées par l'extérieur au système sur ce dernier et à leur associer un torseur global. Les actions mécaniques intérieures au système ne sont pas prises en compte.

Une fois le bilan des actions mécaniques extérieures effectué de façon exhaustive, il est possible de modéliser l'ensemble des actions mécaniques extérieures exercées sur un système matériel Σ par un torseur des actions mécaniques extérieures :

$$\{\mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}\} = \sum_{i=1}^n \{\mathcal{T}_{\bar{\Sigma}_i \rightarrow \Sigma}\}$$

où $\bar{\Sigma}_i$, $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, représente une des n parties du système extérieur $\bar{\Sigma}$ exerçant une action mécanique sur Σ . De façon pratique, la somme des torseurs doit toujours être réalisée en un même et unique point ; par exemple en un point A :

$$\{\mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}\} = \sum_{i=1}^n \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{\bar{\Sigma}_i \rightarrow \Sigma}} \\ \overrightarrow{M_{A, \bar{\Sigma}_i \rightarrow \Sigma}} \end{array} \right\}$$

Remarque 2.1 (On n'isole jamais un bâti !)

Il est important de retenir que l'on ne peut pas isoler un bâti lié à la Terre, car il est impossible d'effectuer le bilan des actions mécaniques extérieures. On pourra donc isoler tout système matériel hors bâti.

2.2 Énoncé du principe fondamental de la statique

Le principe fondamental de la statique est un cas particulier du principe fondamental de la dynamique, limité à l'étude des systèmes matériels immobiles ou en mouvement de translation rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen. Le principe fondamental de la dynamique, et donc par héritage celui de la statique, ne sont pas des théorèmes mais des principes puisque leur seule preuve est de nature phénoménologique (expérimentale)¹.

Définition 2.1 (Principe fondamental de la statique)

Le torseur des actions mécaniques extérieures à un solide S (ou un ensemble de solides Σ) en équilibre (statique) dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ est identiquement nul.

$$\{\mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}\} = \{0\}$$

1. Le principe fondamental de la dynamique est un modèle de comportement basé sur un principe de déterminisme (voir, par exemple, l'ouvrage de référence de V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, 1989 ou de R. Abraham et J. Marsden, *Foundations of mechanics* (5^e édition), Addison-Wesley, 1987).

Le principe fondamental de la statique s'écrivant sous forme torsorielle, il est valable en tout point et peut donc être réduit en importe quel point et se décomposer en deux équations vectorielles :

— une équation de résultante :

$$\sum_{i=1}^n \overrightarrow{F_{\bar{\Sigma}_i \rightarrow \Sigma}} = \vec{0}$$

aussi appelée théorème de la résultante statique ;

— une équation de moment en un point, par exemple A :

$$\sum_{i=1}^n \overrightarrow{M_{A, \bar{\Sigma}_i \rightarrow \Sigma}} = \vec{0}$$

aussi appelée théorème du moment statique au point considéré.

Chacune des deux équations vectorielles peut être projetée dans une base orthonormée et conduire à trois équations scalaires pour chacune, soit six au total.

Remarque 2.2 (Principe fondamental des équilibres ?)

D'après l'énoncé du principe fondamental de la statique, il apparaît clairement que seule la notion d'équilibre est nécessaire et que sa version statique n'est qu'un cas particulier de systèmes matériels en translation rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen avec une vitesse nulle. Dans ce cours, nous ne ferons pas de distinction entre les notions d'équilibre et d'équilibre strict (statique).

Théorème 2.1 (Actions mutuelles)

Le torseur des actions mécaniques exercées par un système S_1 sur un système S_2 est opposé au torseur des actions mécaniques exercées par le système S_2 sur le système S_1 .

$$\{\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\} = -\{\mathcal{T}_{S_2 \rightarrow S_1}\}$$

Démonstration. Soit le système $\Sigma = S_1 \cup S_2$ dont S_1 et S_2 sont les deux partitions. On note $\bar{\Sigma}$ l'extérieur à Σ . L'extérieur de S_1 est constitué de l'extérieur à Σ et de S_2 et celui de S_2 par l'extérieur à Σ et de S_1 . L'application successive du principe fondamental de la statique à S_1 , S_2 et Σ conduit à :

$$\begin{array}{ll} S_1 : & \{\mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow S_1}\} + \{\mathcal{T}_{S_2 \rightarrow S_1}\} = \{0\} \\ S_2 : & \{\mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow S_2}\} + \{\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\} = \{0\} \\ \Sigma : & \{\mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow S_1}\} + \{\mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow S_2}\} = \{0\} \end{array}$$

d'où l'on tire immédiatement la proposition :

$$\{\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\} = -\{\mathcal{T}_{S_2 \rightarrow S_1}\}$$

□

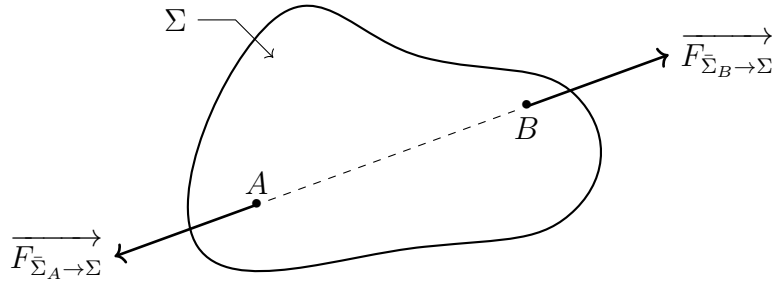


FIGURE 2 – Système matériel soumis à deux glisseurs.

2.3 Cas particulier d'un système soumis à deux glisseurs

On considère un système matériel Σ seulement soumis à deux glisseurs, par exemple aux points A et B , de résultantes $\overrightarrow{F_{\Sigma_A \rightarrow \Sigma}}$ et $\overrightarrow{F_{\Sigma_B \rightarrow \Sigma}}$.

Proposition 2.1 (Système soumis à deux glisseurs)

Si un système matériel est soumis aux seules actions mécaniques de deux glisseurs, alors ils sont directement opposés, c'est-à-dire qu'ils partagent le même axe central et sont de norme identique, mais de directions opposées.

Démonstration. Si un système matériel Σ est seulement soumis à deux glisseurs, dont on connaît par exemple les expressions aux points A et B , alors l'application du principe fondamental de la statique au système Σ isolé conduit aux deux équations :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_{\Sigma_A \rightarrow \Sigma}} + \overrightarrow{F_{\Sigma_B \rightarrow \Sigma}} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_{\Sigma_A \rightarrow \Sigma}} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_{\Sigma_B \rightarrow \Sigma}} &= \vec{0} \end{aligned}$$

où nous avons exprimé l'équation de moment en un point O quelconque. En exprimant l'équation de moment au point A (ou au point B), on obtient la relation :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F_{\Sigma_B \rightarrow \Sigma}} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F_{\Sigma_A \rightarrow \Sigma}} = \vec{0}$$

qui signifie que si les deux points A et B ne sont pas confondus (si $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$) alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{F_{\Sigma_B \rightarrow \Sigma}}$ sont colinéaires. Exploitant l'équation de résultante, il vient alors les deux relations :

$$\begin{cases} \overrightarrow{F_{\Sigma_A \rightarrow \Sigma}} = -\overrightarrow{F_{\Sigma_B \rightarrow \Sigma}} \\ (AB) = (A, \overrightarrow{F_{\Sigma_A \rightarrow \Sigma}}) = (B, \overrightarrow{F_{\Sigma_B \rightarrow \Sigma}}) \end{cases}$$

qui signifient respectivement :

- que les deux actions mécaniques exercées sur un système Σ sont de norme identique et de direction opposée ;
- que les axes centraux des deux glisseurs sont identiques et correspondent à la droite (AB) .

□

2.4 Cas particulier d'un système soumis à trois glisseurs

On considère un système matériel Σ soumis à trois glisseurs, par exemple aux points A , B et C , de résultantes $\overrightarrow{F_{\Sigma_A \rightarrow \Sigma}}$, $\overrightarrow{F_{\Sigma_B \rightarrow \Sigma}}$ et $\overrightarrow{F_{\Sigma_C \rightarrow \Sigma}}$.

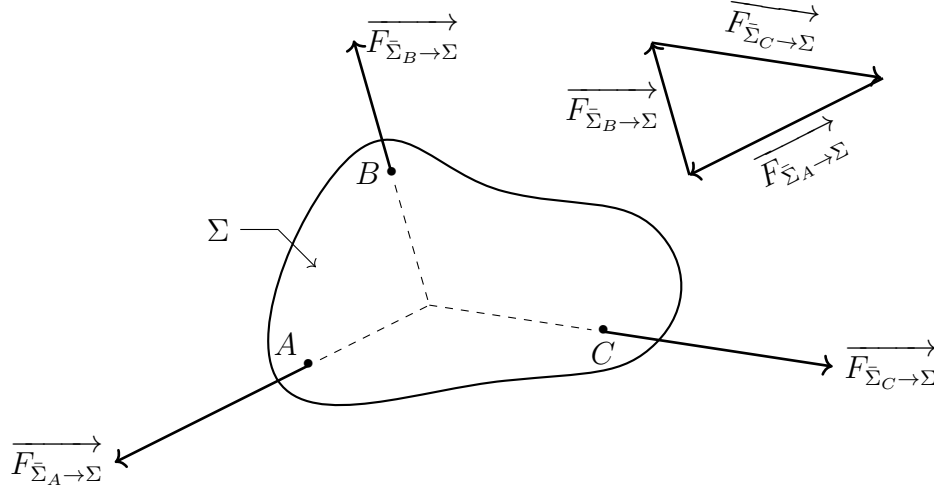


FIGURE 3 – Système matériel soumis à trois glisseurs concourants.

Proposition 2.2 (Système soumis à trois glisseurs)

Si un système matériel est soumis aux seules actions mécaniques de trois glisseurs, alors leurs axes centraux sont coplanaires et

- concourants (si deux des axes centraux sont sécants) ;
- ou parallèles (si deux des axes centraux sont parallèles).

Démonstration. Si un système matériel Σ est seulement soumis à trois glisseurs, dont on connaît par exemple les expressions aux points A , B et C , alors l'application du principe fondamental de la statique au système Σ isolé conduit aux deux équations :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_{\Sigma_A \rightarrow \Sigma}} + \overrightarrow{F_{\Sigma_B \rightarrow \Sigma}} + \overrightarrow{F_{\Sigma_C \rightarrow \Sigma}} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_{\Sigma_A \rightarrow \Sigma}} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_{\Sigma_B \rightarrow \Sigma}} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{F_{\Sigma_C \rightarrow \Sigma}} &= \vec{0} \end{aligned}$$

où nous avons exprimé l'équation de moment en un point O quelconque. En exprimant l'équation de moment au point A (ou au point B ou C), on obtient la relation :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F_{\Sigma_B \rightarrow \Sigma}} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{F_{\Sigma_C \rightarrow \Sigma}} = \vec{0}$$

qui signifie que si les trois points A , B et C ne sont pas confondus alors les droites $(B, \overrightarrow{F_{\Sigma_B \rightarrow \Sigma}})$ et $(C, \overrightarrow{F_{\Sigma_C \rightarrow \Sigma}})$ sont coplanaires. En effet, comme les plans $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{F_{\Sigma_B \rightarrow \Sigma}})$ et $(A, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{F_{\Sigma_C \rightarrow \Sigma}})$ sont de normales opposées, alors ils sont parallèles. Comme ces deux plans contiennent tous les deux le point A alors ils sont confondus. À partir de ce point, deux cas sont à étudier :

1. Si deux des axes centraux se coupent en un point I , alors le troisième axe central passe aussi par ce point. Par exemple, si les droites $(A, \overrightarrow{F_{\Sigma_A \rightarrow \Sigma}})$ et $(B, \overrightarrow{F_{\Sigma_B \rightarrow \Sigma}})$ sont sécantes en I , alors il vient l'équation de moment au point I :

$$\underbrace{\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{F_{\Sigma_A \rightarrow \Sigma}}}_{\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{IB} \wedge \overrightarrow{F_{\Sigma_B \rightarrow \Sigma}}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{IC} \wedge \overrightarrow{F_{\Sigma_C \rightarrow \Sigma}} = \vec{0}$$

qui signifie que la droite $(C, \overrightarrow{F_{\Sigma_C \rightarrow \Sigma}})$ passe aussi par le point I . On retiendra donc que la somme de glisseurs au point d'intersection des leurs axes centraux a, par définition, toujours un moment nul.

2. Si deux des axes centraux sont parallèles, alors le troisième axe central est aussi parallèle aux deux premiers. Par exemple, si les efforts $\overrightarrow{F_{\Sigma_A \rightarrow \Sigma}}$ et $\overrightarrow{F_{\Sigma_B \rightarrow \Sigma}}$ sont de même direction, alors l'équation de résultante

$$\overrightarrow{F_{\Sigma_A \rightarrow \Sigma}} + \overrightarrow{F_{\Sigma_B \rightarrow \Sigma}} + \overrightarrow{F_{\Sigma_C \rightarrow \Sigma}} = \vec{0}$$

implique que l'effort au point C est de même direction que ceux aux points A et B . □

3 Résolution d'un problème de statique

Soit un système matériel Σ constitué de plusieurs solides liés entre eux et soumis à des actions mécaniques extérieures. L'objectif d'une étude statique est de déterminer puis de résoudre les équations liant les actions mécaniques s'exerçant sur chaque solide afin de déterminer les actions mécaniques inconnues. Le point de départ est toujours la réalisation d'un graphe de structure sur lequel doivent figurer :

- une masse sur le solide de référence associé à un référentiel galiléen ;
- les liaisons entre les différents solides, leurs mobilités et le nombre d'inconnues scalaires associées ;
- les actions mécaniques extérieures à chaque solide.

À partir du graphe de structure, on distingue deux approches pour résoudre un problème de statique.

3.1 Méthode systématique

La méthode systématique consiste à isoler chaque solide constituant le système matériel de façon à écrire la totalité des équations possibles. C'est la méthode utilisée dans les logiciels de simulation numérique. Pour chaque solide, la démarche est la suivante :

1. isoler un solide S et établir le bilan (exhaustif) des actions mécaniques extérieures appliquées sur S ;
2. écrire le torseur global associé à chaque action mécanique extérieure ;
3. réduire en un point quelconque (mais commun) tous les torseurs d'actions mécaniques ;

4. appliquer le principe fondamental de la statique au solide isolé et écrire les équations de résultante et de moment au point choisi ;
5. projeter les deux équations vectorielles dans une base orthonormée pour obtenir un système de 6 équations scalaires à résoudre ;
6. résoudre le système.

Avant de tenter de résoudre le système ainsi formé, il est important de vérifier qu'il y ait autant d'équations « utiles » que d'inconnues.

3.2 Stratégie de résolution

Une méthode plus intuitive, basée sur l'analyse du graphe de structure d'un mécanisme, est souvent plus efficace. En effet, il est rarement nécessaire de déterminer la totalité des actions mécaniques inconnues mais seulement quelques-unes. Auquel cas, il est intéressant de rechercher à écrire le minimum d'équations possible pour relier ces inconnues aux données.

Définition 3.1 (Stratégie de résolution)

On appelle stratégie de résolution le choix d'une suite ordonnancée de solides ou de systèmes de solides à isoler pour résoudre un problème de statique donné.

Il n'y a rien de systématique pour élaborer une stratégie de résolution. À partir d'un graphe de structure, il s'agit de mettre en place une « stratégie » qui doit se présenter comme une succession d'étapes pour chacune desquelles doivent être précisés :

- le solide ou l'ensemble de solides isolé ;
- les actions mécaniques supposées connues ;
- les actions mécaniques que cette étape permet de déterminer et avec quelle(s) équation(s).

Il n'existe pas une unique stratégie mais certaines sont beaucoup plus efficaces que d'autres. Pour viser cette efficacité, plusieurs points sont à retenir :

- ne jamais perdre de vue la ou les actions mécaniques imposées et l'action mécanique recherchée ;
- toujours repérer les solides ou systèmes de solides soumis à deux glisseurs, car ils permettent de réduire le nombre d'inconnues ;
- repérer les solides ou systèmes de solides soumis à trois glisseurs ;
- exploiter utilement les mobilités des liaisons dont on ne cherche pas à déterminer les actions mécaniques transmises.

Une fois une stratégie de résolution établie, il faut la mettre en œuvre avec, à chaque étape, une méthode de résolution. Dans ce cours on en distingue de deux types.

3.2.1 Résolution analytique

La méthode de résolution analytique est basée sur :

1. un bilan des actions mécaniques extérieures au système isolé avec, pour chacune, son torseur associé ;

2. l'écriture des équations de résultante ou de moment aux points « utiles » pour déterminer la ou les inconnues ;
3. la résolution de l'équation ou du système d'équations scalaires.

Un des points à retenir est d'écrire les équations d'équilibre selon les mobilités des liaisons dont on ne cherche pas à déterminer les actions mécaniques transmises.

3.2.2 Cas particulier d'une résolution graphique

Sauf cas très particuliers, la méthode de résolution graphique se rapporte à des problèmes plans. On se limitera de plus aux systèmes soumis à deux ou trois glisseurs ou à des problèmes se ramenant à ces cas. En règle générale, la démarche sera :

- trouver un solide ou un ensemble de solides soumis à trois glisseurs avec au maximum trois inconnues scalaires ou, à défaut, les systèmes soumis à deux glisseurs ;
- appliquer le principe fondamental de la statique au système isolé et résoudre, au moins partiellement, le problème ;
- connaissant les nouvelles relations issues des résolutions partielles précédentes, reprendre l'algorithme général en cherchant de nouveau les systèmes soumis à trois glisseurs.

Dans tous les cas, il est obligatoire de ne jamais perdre de vue la (ou les) action(s) mécanique(s) imposée(s) et l'action mécanique recherchée.

4 Exemple d'application :

Moteur thermique d'aéromodélisme

Dans cette partie, nous allons illustrer toutes les notions précédentes à travers l'exemple du moteur thermique d'aéromodélisme, déjà étudié dans le cours de cinématique. On rappelle sur la figure 4 le dessin d'ensemble du système ainsi que le schéma cinématique associé. On se place en régime permanent, à vitesse de rotation constante du vilebrequin S_1 . D'un point de vue statique, on va chercher le couple moteur disponible au niveau de l'hélice connaissant la pression p_0 (supposée constante) dans la chambre du piston.

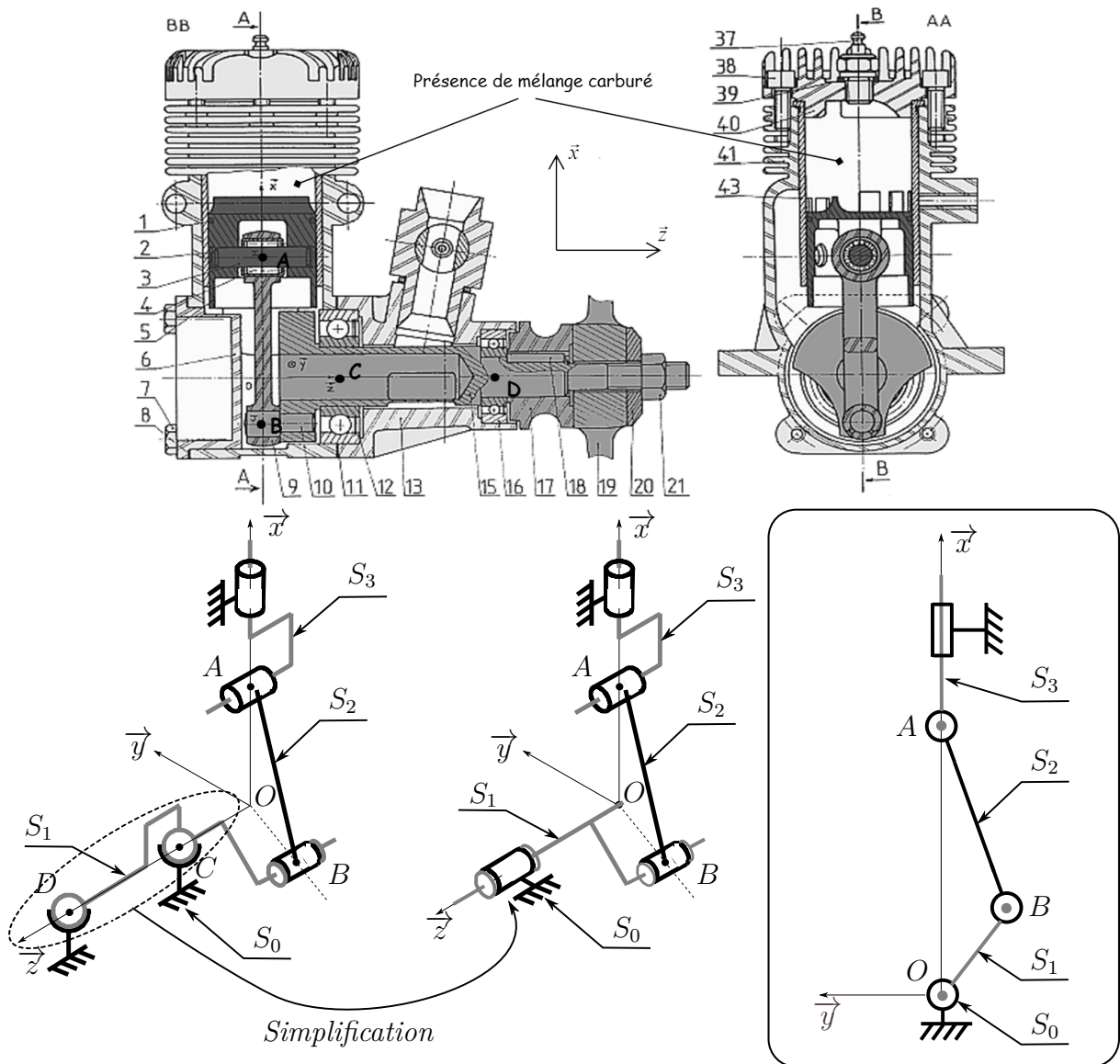
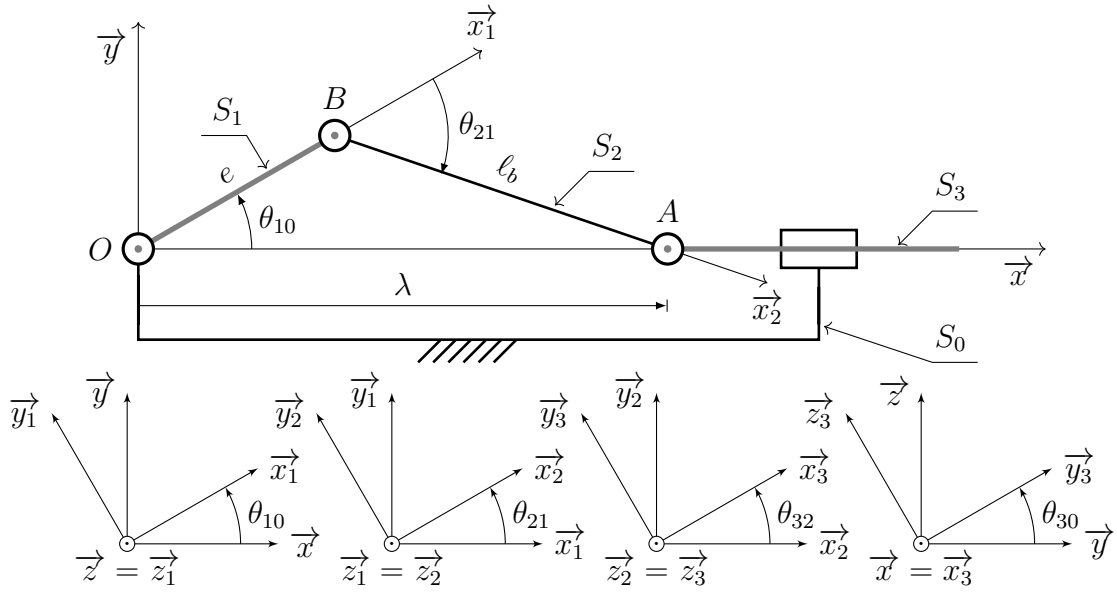


FIGURE 4 – Dessin d'ensemble du moteur et schéma cinématique associé.

On commence, de suite, par remarquer que ce problème peut être réduit à une résolution plane, dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$. Afin de mener les calculs, on reprend le paramétrage du cours de cinématique que l'on rappelle ci-après.



On se propose dans les sections suivantes de faire une résolution analytique puis graphique de ce problème statique.

4.1 Résolution analytique

Afin de déterminer la meilleure démarche de résolution, il convient toujours de commencer par réaliser un graphe de structure en vue d'une résolution d'un problème de statique. Ce graphe doit faire intervenir les solides, les liaisons entre ces solides et les actions mécaniques extérieures auxquelles ils sont soumis. Après avoir isolé un solide ou un ensemble de solides, on commence toujours par réaliser un bilan des actions mécaniques extérieures. Dans le cas du micromoteur, les actions mécaniques extérieures sont :

- l'action du fluide (mélange air-carburant) induisant une pression dans la chambre sur le piston S_3 . Compte tenu des dimensions du piston et de l'intensité de la pression, cette dernière est supposée uniforme. Cette action mécanique se modélise par le torseur suivant :

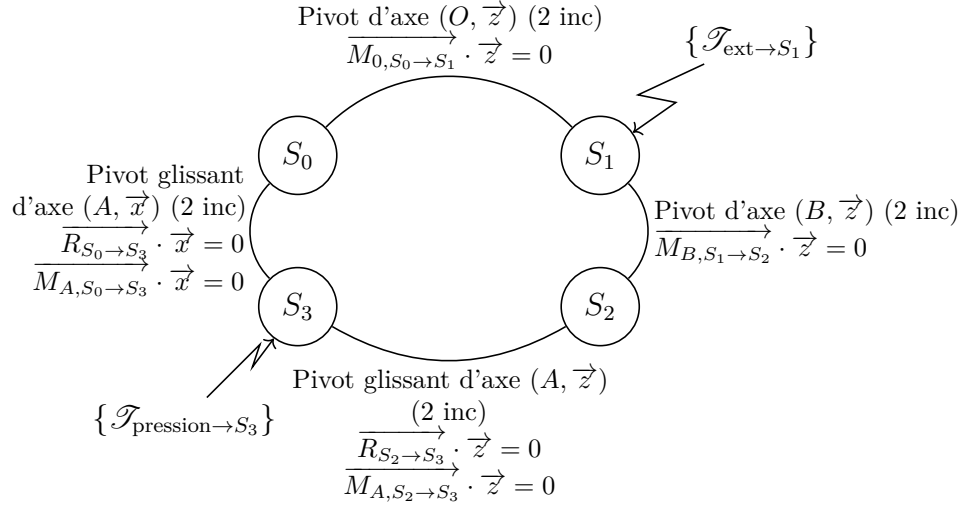
$$\{\mathcal{T}_{\text{pression} \rightarrow S_3}\} = \left\{ \begin{array}{c} \int_S -p_0 \vec{x} dS = -p_0 \vec{x} \int_S dS = -p_0 S \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

avec H le centre du disque du piston S_3 , de surface S , sur lequel s'applique cette pression.

- l'action de l'extérieur sur l'hélice que l'on modélise par un torseur couple sur l'axe $(O, \vec{z})$ de l'hélice :

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow S_1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{C}_{\text{ext}} = C_{\text{ext}} \vec{z} \end{array} \right\}_{\forall O}$$

Finalement, le graphe de structure prend la forme suivante :



Remarque 4.1 (Actions mécaniques transmissibles dans un plan)

Pour un problème d'équilibre statique dans un plan $(\vec{x}, \vec{y})$, les torseurs des actions mécaniques transmissibles par des liaisons sphériques, pivot ou pivot glissant d'axe parallèle à la direction $\vec{z}$ se modélisent comme des glisseurs. Pour s'en convaincre, il suffit d'écrire le torseur dans le cas général et de le simplifier en sachant que les efforts sont dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$ et que les moments sont orthogonaux au plan. Par exemple :

— pour une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$:

$$\{\mathcal{T}_{S_0 \rightarrow S_1}\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{01} \vec{x} + Y_{01} \vec{y} + Z_{01} \vec{z} \\ L_{B_{01}} \vec{x} + M_{B_{01}} \vec{y} \end{array} \right\} \text{Pb plan } (\vec{x}, \vec{y}) \underset{B}{=} \left\{ \begin{array}{c} X_{01} \vec{x} + Y_{01} \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

— pour une liaison pivot d'axe $(B, \vec{z})$:

$$\{\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{12} \vec{x} + Y_{12} \vec{y} + Z_{12} \vec{z} \\ L_{B_{12}} \vec{x} + M_{B_{12}} \vec{y} \end{array} \right\} \text{Pb plan } (\vec{x}, \vec{y}) \underset{B}{=} \left\{ \begin{array}{c} X_{12} \vec{x} + Y_{12} \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

— pour une liaison pivot glissant d'axe $(A, \vec{z})$:

$$\{\mathcal{T}_{S_2 \rightarrow S_3}\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{23} \vec{x} + Y_{23} \vec{y} \\ L_{A_{23}} \vec{x} + M_{A_{23}} \vec{y} \end{array} \right\} \text{Pb plan } (\vec{x}, \vec{y}) \underset{A}{=} \left\{ \begin{array}{c} X_{23} \vec{x} + Y_{23} \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Attention toutefois dans l'écriture de la liaison pivot glissant d'axe $(A, \vec{x})$ qui ne se simplifie pas de la même façon puisque l'axe de la liaison est dans le plan. Pour cette liaison on a :

$$\{\mathcal{T}_{S_0 \rightarrow S_3}\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_{03} \vec{y} + Z_{03} \vec{z} \\ M_{A_{03}} \vec{y} + N_{A_{03}} \vec{z} \end{array} \right\} \text{Pb plan } (\vec{x}, \vec{y}) \underset{A}{=} \left\{ \begin{array}{c} Y_{03} \vec{y} \\ N_{A_{03}} \vec{z} \end{array} \right\}$$

Comme on ne peut pas trouver dans le graphe de structure un solide ou un ensemble de solides soumis à au plus trois inconnues scalaires d'action mécanique (correspondant aux trois équations d'équilibre dans le plan), on commence par chercher un système soumis à deux glisseurs. C'est le cas du solide S_2 que l'on isole.

1. On isole le système S_2

Bilan des actions mécaniques extérieures à S_2 :

- liaison pivot d'axe $(B, \vec{z}) : \{\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\}$
- liaison pivot glissant d'axe $(A, \vec{z}) : -\{\mathcal{T}_{S_2 \rightarrow S_3}\}$

Le principe fondamental de la statique appliqué à ce système donne :

$$\{\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\} - \{\mathcal{T}_{S_2 \rightarrow S_3}\} = \{0\}$$

On écrit les torseurs au même point, par exemple au point B , et l'équation précédente s'écrit en termes de résultante et de moment :

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_{S_1 \rightarrow S_2}} - \overrightarrow{R_{S_2 \rightarrow S_3}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{BA} \wedge (-\overrightarrow{R_{S_2 \rightarrow S_3}}) = \vec{0} \end{cases} \iff \begin{cases} \overrightarrow{R_{S_1 \rightarrow S_2}} - \overrightarrow{R_{S_2 \rightarrow S_3}} = \vec{0} \\ \ell_b \vec{x}_2 \wedge (-X_{23} \vec{x} - Y_{23} \vec{y}) = \vec{0} \end{cases}$$

En projetant sur les vecteurs de base, il vient :

$$\begin{cases} X_{12} - X_{23} = 0 \\ Y_{12} - Y_{23} = 0 \\ \ell_b \sin(\theta_{21} + \theta_{10})X_{23} - \ell_b \cos(\theta_{21} + \theta_{10})Y_{23} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X_{12} = X_{23} \\ Y_{12} = Y_{23} \\ Y_{23} = \tan(\theta_{21} + \theta_{10})X_{23} \end{cases}$$

On ne peut pas aller au bout de la résolution et déterminer la valeur des composantes des efforts, mais cette résolution partielle nous permet de connaître une relation entre Y_{23} et X_{23} d'une part et Y_{12} et X_{12} d'autre part. Les torseurs de ces actions mécaniques n'ont plus alors qu'une seule inconnue scalaire. Sachant cela, en reprenant le graphe de structure, on s'aperçoit qu'il est maintenant possible d'isoler le solide S_1 maintenant soumis qu'à trois composantes inconnues.

2. On isole le système S_1

Bilan des actions mécaniques extérieures à S_1 :

- liaison pivot d'axe $(B, \vec{z}) : -\{\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\}$
- liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}) : \{\mathcal{T}_{S_0 \rightarrow S_1}\}$
- action mécanique extérieure sur l'hélice : $\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow S_1}\}$

Le principe fondamental de la statique appliqué à ce système donne :

$$-\{\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\} + \{\mathcal{T}_{S_0 \rightarrow S_1}\} + \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow S_1}\} = \{0\}$$

On doit rappeler à ce stade qu'on ne cherche nullement à calculer les actions mécaniques transmises par les liaisons mais à déterminer une relation entre le couple extérieur et la pression dans la chambre. Pour s'affranchir de calculer les actions mécaniques transmises par la liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$, on va exploiter utilement sa mobilité en rotation autour de l'axe $(O, \vec{z})$ en écrivant pour S_1 l'équation de

moment autour de l'axe $(O, \vec{z})$ (moment au point O projeté dans la direction $\vec{z}$) sachant que $\overrightarrow{M_{0,S_0 \rightarrow S_1}} \cdot \vec{z} = 0$. Il vient :

$$\begin{aligned} -\overrightarrow{M_{O_{S_1 \rightarrow S_2}}} \cdot \vec{z} + \underbrace{\overrightarrow{M_{O_{S_0 \rightarrow S_1}}} \cdot \vec{z}}_0 + \overrightarrow{C_{\text{ext} \rightarrow S_1}} \cdot \vec{z} &= 0 \\ (\overrightarrow{OB} \wedge (-\overrightarrow{R_{S_1 \rightarrow S_2}})) \cdot \vec{z} + C_{\text{ext}} &= 0 \\ (e\vec{x}_1 \wedge (-X_{12}\vec{x} - \tan(\theta_{21} + \theta_{10})X_{12}\vec{y})) \cdot \vec{z} + C_{\text{ext}} &= 0 \\ eX_{12}(\sin(\theta_{10}) - \cos(\theta_{10})\tan(\theta_{21} + \theta_{10})) + C_{\text{ext}} &= 0 \end{aligned}$$

Il est possible de résoudre partiellement le problème en reprenant les premières équations obtenues sur l'isolement de S_2 . On obtient :

$$\begin{cases} X_{12} = X_{23} = \frac{C_{\text{ext}}}{e(\cos(\theta_{10})\tan(\theta_{21} + \theta_{10}) - \sin(\theta_{10}))} \\ Y_{12} = Y_{23} = \frac{\tan(\theta_{21} + \theta_{10})C_{\text{ext}}}{e(\cos(\theta_{10})\tan(\theta_{21} + \theta_{10}) - \sin(\theta_{10}))} \end{cases}$$

À ce stade de la résolution, on connaît maintenant toutes les actions mécaniques exercées par S_2 sur S_1 donc celles opposées exercées par S_2 sur S_3 . En anticipant sur la mobilité en translation dans la direction $\vec{x}$ de S_3 , on va pouvoir relier l'inconnue X_{23} à la pression du fluide p_0 .

3. On isole le système S_3

Bilan des actions mécaniques extérieures à S_3 :

- liaison pivot glissant d'axe $(A, \vec{z})$: $\{\mathcal{T}_{S_2 \rightarrow S_3}\}$
- liaison pivot glissant d'axe $(A, \vec{x})$: $\{\mathcal{T}_{S_0 \rightarrow S_3}\}$
- action mécanique imposée due à la pression : $\{\mathcal{T}_{\text{pression} \rightarrow S_3}\}$

Nous ne chercherons pas à déterminer les inconnues de l'action mécanique de $S_2 \rightarrow S_3$ puisque nous voulons simplement avoir une relation entre C_{ext} et la pression. Pour cela on se sert d'une des deux équations caractéristiques de la liaison avec le bâti à savoir : la mobilité dans la direction $\vec{x}$ qui se traduit par $\overrightarrow{R_{S_0 \rightarrow S_3}} \cdot \vec{x} = 0$. On va donc écrire l'équation de la résultante en projection sur l'axe $\vec{x}$. On obtient :

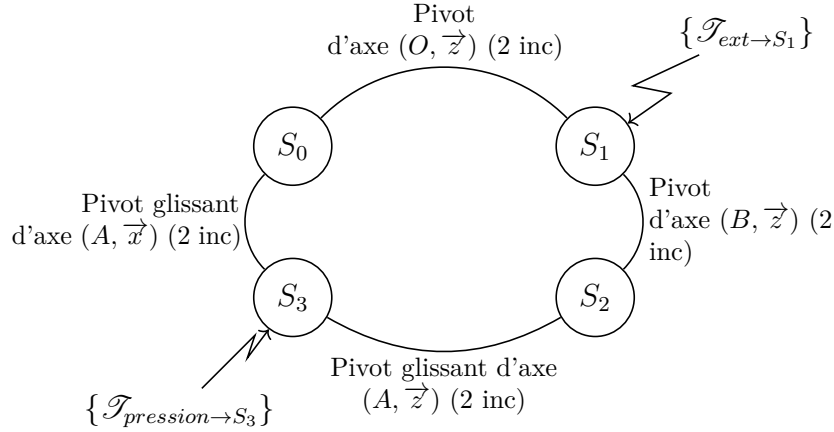
$$\underbrace{\overrightarrow{R_{S_0 \rightarrow S_3}} \cdot \vec{x}}_0 + \overrightarrow{R_{\text{pression} \rightarrow S_3}} \cdot \vec{x} + \overrightarrow{R_{S_2 \rightarrow S_3}} \cdot \vec{x} = -p_0 S + X_{23} = 0$$

Il vient finalement :

$$C_{\text{ext}} = p_0 S e [\cos(\theta_{10})\tan(\theta_{21} + \theta_{10}) - \sin(\theta_{10})]$$

4.2 Résolution graphique

La stratégie de résolution graphique du problème est identique. On reprend le graphe de structure pour choisir l'ordonnancement des isolements.



On se donne une valeur de pression dans la chambre et donc une valeur de l'effort résultant de l'action du fluide de combustion sur le piston.

1. On appelle $\overrightarrow{R_{\text{pression} \rightarrow S_3}}$ cet effort que l'on trace à l'échelle sur le dessin du système à une position donnée.
2. Comme il n'est pas possible de trouver un solide soumis à trois glisseurs avec au plus trois inconnues d'actions mécaniques transmissibles, on isole S_2 , soumis à deux glisseurs. L'équilibre de S_2 nous permet de déterminer l'axe central des torseurs $\{\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\}$ et $\{\mathcal{T}_{S_3 \rightarrow S_2}\}$ qui est la droite (AB) .
3. Connaissant $\overrightarrow{R_{\text{pression} \rightarrow S_3}}$ et la direction de $\overrightarrow{R_{S_2 \rightarrow S_1}}$, il est maintenant possible d'isoler S_3 et d'exploiter sa mobilité en translation par rapport à S_0 . Au point A , et seulement en ce point, ce solide est soumis à l'action de trois glisseurs (voir remarque 4.2). L'interprétation graphique de l'équation des résultantes sur S_3 nous indique que la somme vectorielle des résultantes est nulle. Maintenant on connaît $\overrightarrow{R_{S_2 \rightarrow S_3}} = -\overrightarrow{R_{S_3 \rightarrow S_2}} = -\overrightarrow{R_{S_2 \rightarrow S_1}} = \overrightarrow{R_{S_1 \rightarrow S_2}}$.

Remarque 4.2 (Glisseur ?)

L'action mécanique de S_0 sur S_3 n'est pas un glisseur par définition, car la liaison pivot glissant peut transmettre un moment autour de l'axe $(C, \vec{z})$. Cependant, la répartition de pression entre les deux solides engendre une action globale sous la forme d'un glisseur au point A . En effet, les deux autres actions auxquelles est soumis S_3 ont un moment nul en A . Donc l'axe central du torseur des actions mécaniques de S_0 sur S_3 est la droite $(A, \vec{y})$. Cela s'écrit :

$$\{\mathcal{T}_{S_0 \rightarrow S_3}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{S_0 \rightarrow S_3}} = Y_{03} \vec{y} \\ N_{C_{03}} \vec{z} \end{array} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{S_0 \rightarrow S_3}} = Y_{03} \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

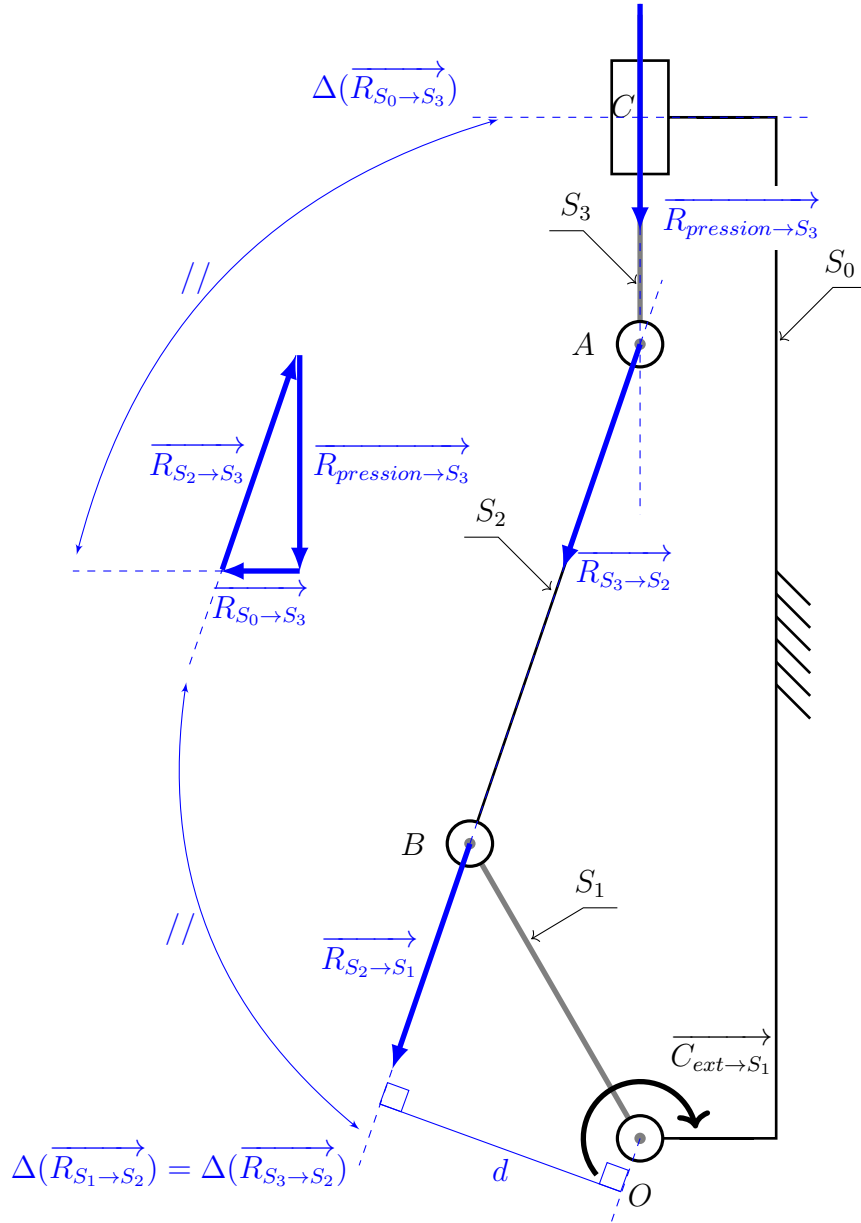
Les axes centraux des trois glisseurs sont donc concourants en A .

4. On isole maintenant le système S_1 . On exploite l'équilibre de ce nouveau système et le fait que $\overrightarrow{M_{0, S_0 \rightarrow S_1}} \cdot \vec{z} = 0$. Graphiquement, on a donc que :

$$|C_{\text{ext}}| = d \|\overrightarrow{R_{S_2 \rightarrow S_1}}\|$$

où d est le « bras de levier » de $\overrightarrow{R_{S_2 \rightarrow S_1}}$ par rapport à O , c'est-à-dire la distance du point O à la droite $(B, \overrightarrow{R_{S_2 \rightarrow S_1}})$. Le signe de C_{ext} est associé au sens dans lequel il « faudrait tourner » le solide S_3 par rapport à S_0 pour le maintenir en équilibre sous l'action de $\overrightarrow{R_{S_2 \rightarrow S_1}}$.

Les constructions graphiques sont présentées ci-dessous.



* *
*