

Exercice 1 (★). On admet que les intégrales suivantes (paramétrées par $n \in \mathbb{N}^*$) sont bien définies. Montrer qu'elles convergent vers 0 (quand $n \rightarrow +\infty$), puis déterminer un équivalent de B_n et C_n :

$$\begin{array}{lll}
 1. A_n = \int_1^2 (\ln(t))^n dt & 2. B_n = \int_n^{n+1} \sqrt{x} e^{-x} dx & 3. C_n = \int_0^{1/n} e^t \cos(t^2) dt \\
 4. D_n = \int_0^1 x^n e^{2x} dx & 5. E_n = \int_{-1}^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt & 6. F_n = \int_0^3 \arctan(t) e^{-nt} dt \\
 7. G_n = \int_n^{n^2} e^{-x^2} dx & 8. H_n = \int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{t}{n}\right) e^{t^2} dt &
 \end{array}$$

Résultat attendu : On procède par encadrements. On trouve ensuite $B_n \sim \sqrt{n} e^{-n} (1 - \frac{1}{e})$ et $C_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 2 (★★). Déterminer la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ de :

$$1. A_n = \int_0^1 \sqrt{t} e^{t/n} dt \quad 2. B_n = \int_1^2 x \arctan(nx) dx \quad 3. C_n = \int_{-1}^1 \frac{e^t}{1+t^{2n}} dt \quad 4. D_n = \int_{-1}^2 \frac{e^t}{1+t^{2n}} dt$$

Résultat attendu : $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{2}{3}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = \frac{3\pi}{4}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = e - \frac{1}{e}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n = e - \frac{1}{e}$.

Exercice 3 (★). On définit les suites réelles $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 1} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer I_{n+2} en fonction de J_n .
3. Déterminer la limite de la suite $((n+1)J_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Résultat attendu :

1. On procède par encadrement.
2. Une intégration par parties donne $I_{n+2} = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{n+1}{2} J_n$.
3. La limite cherchée vaut $\ln(2)$.

Exercice 4 (★). Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

1. Étudier sa parité.
2. Déterminer les variations de F sur \mathbb{R} .
3. (★★) Montrer que F admet une limite finie en $+\infty$.

Résultat attendu :

1. F est impaire sur \mathbb{R} .
2. F est croissante sur \mathbb{R} .
3. On montre que F est majorée sur \mathbb{R} (en se ramenant au cas d'une variable $t \in [1, x]$), puis on conclut à l'aide de la question précédente.

Exercice 5 (★). Soit φ et f les fonctions définies par : $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\varphi(t) = \frac{e^t}{t}$ et $f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t) dt$.

1. Montrer que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction φ est continue sur l'intervalle d'extrémités x et $2x$.
2. Étudier la dérivabilité de f sur \mathbb{R}^* . En déduire les variations de f .
3. A l'aide d'encadrements, déterminer la limite de f en 0^+ et 0^- .
4. Compléter le tableau de variations de f avec les limites aux bornes de son ensemble de définition.

Résultat attendu :

1. Une disjonction de cas sur le signe donne la continuité.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x} \geq 0$. Donc f est croissante sur \mathbb{R}_- et sur \mathbb{R}_+ .
3. Les deux limites recherchées valent $\ln(2)$.
4. Des encadrements donnent $\lim_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim_{-\infty} f = 0$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	0	$\ln(2)$	$+\infty$

Exercice 6 (★★). Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 2], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^2 f(t) dt = 2$. Montrer que f admet un point fixe.

Résultat attendu : On applique le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction bien choisie.

Exercice 7 (★). Déterminer la limite des suites définies par : $\forall n \geq 1$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}$ et $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{2^k}$.

Résultat attendu : Par propriétés des sommes de Riemann, u converge vers $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$ et v vers $\frac{1}{\ln(2)}$.

Exercice 8 (★). Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $f : t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2})$.

1. Étudier la dérivabilité de f et calculer sa dérivée.
2. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_n$ définie par : $\forall n \geq 1$, $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$.

Résultat attendu :

1. f est dérivable sur \mathbb{R}_+ , et $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.
2. v converge vers $\ln(1 + \sqrt{2})$ par propriétés des sommes de Riemann.

Exercice 9 (★). Prouver que pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, on a : $0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+u}} - \left(1 - \frac{u}{2}\right) \leq \frac{3}{8}u^2$.

Résultat attendu : On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à une fonction bien choisie.

Exercice 10 (★). Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Résultat attendu : On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à une fonction bien choisie.

Exercice 11 (Type DS). Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n, +\infty[$, $f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt$.

1. (a) Montrer que f_n est de classe C^1 sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f'_n(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n .
- (b) Soit $x \in [n, +\infty[$. Minorer $f_n(x)$, puis établir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.
- (c) En déduire que pour chaque entier naturel n , il existe un unique réel de $[n, +\infty[$, noté u_n , tel que $f_n(u_n) = 1$.
2. (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$.
3. (a) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.
- (b) Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1 , on a $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.
- (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}})$.
- (d) Déduire de l'encadrement obtenu en 2b) que $u_n - n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$.

Résultat attendu :

1. (a) $t \rightarrow e^{\sqrt{t}}$ est continue sur $[n, +\infty[$, donc (par théorème fondamental de l'analyse) sa primitive f_n est de classe C^1 sur cet intervalle. On a de plus $\forall x \in [n, +\infty[$, $f'_n(x) = e^{\sqrt{x}} > 0$. Donc f_n est strictement croissante sur $[n, +\infty[$.
- (b) Soit $t \in [n, x]$. La croissance de l'exponentielle et de la racine sur \mathbb{R}_+ donnent $e^{\sqrt{t}} \geq e^{\sqrt{n}}$. Or $x \geq n$, donc par croissance de l'intégrale $f_n(x) \geq \int_n^x e^{\sqrt{n}} dt = e^{\sqrt{n}}(x-n)$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{n}}(x-n) = +\infty$, donc par théorème de comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.
Rmq : la minoration $e^{\sqrt{t}} \geq 1$ suivie des mêmes étapes convenait également.
- (c) Par 1.a, la fonction f_n est continue et strictement croissante sur $[n, +\infty[$. De plus, par 1.b, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ et $f_n(n) = \int_n^n e^{\sqrt{t}} dt = 0$. Donc par le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection strictement croissante de $[n, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$. Or $1 \in [0, +\infty[$, donc $f_n(x) = 1$ admet une unique solution réelle dans $[n, +\infty[$.
2. (a) Par 1.c, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [n, +\infty[$, donc $u_n \geq n$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, donc par théorème de comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [n, u_n]$, alors $e^{\sqrt{u_n}} \geq e^{\sqrt{t}} \geq e^{\sqrt{n}}$. Par croissance de l'intégrale (comme $u_n \geq n$), on obtient $e^{\sqrt{u_n}}(u_n - n) \geq f(u_n) \geq e^{\sqrt{n}}(u_n - n)$. Or $f_n(u_n) = 1$, donc $e^{\sqrt{u_n}}(u_n - n) \geq 1$ et $1 \geq e^{\sqrt{n}}(u_n - n)$. Diviser ces inégalités par les exponentielles (strictement positives) donne l'encadrement demandé.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par 2.b, $e^{-\sqrt{u_n}} \leq v_n \leq e^{-\sqrt{n}}$. Or par 2.a, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{u_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{n}} = 0$. Donc par théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.
- (b) Soit $x \geq -1$, alors $\frac{x^2}{4} \geq 0$ et on a $0 \leq 1+x \leq 1+x+\frac{x^2}{4} = (1+\frac{x}{2})^2$. Par croissance de la racine carrée sur \mathbb{R}_+ , on trouve $\sqrt{1+x} \leq |1+\frac{x}{2}| = 1+\frac{x}{2}$.
Rmq : on pouvait aussi faire une étude de fonction, mais c'était plus long.
- (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $u_n = n + v_n$, on a $e^{-\sqrt{u_n}} = e^{-\sqrt{n+v_n}} = e^{-\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{v_n}{n}}}$. Or $\frac{v_n}{n} \geq 0$, donc par la question précédente, $\sqrt{1+\frac{v_n}{n}} \leq 1+\frac{v_n}{2n}$. Par produit avec $-\sqrt{n} \leq 0$, on en déduit $-\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{v_n}{n}} \geq -\sqrt{n} - \frac{v_n}{2\sqrt{n}}$. Donc par croissance de l'exponentielle sur \mathbb{R} , $e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}})$.
- (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par 2.b et 3.c, on sait que $e^{-\sqrt{n}} \exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}) \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$. Or $e^{-\sqrt{n}} > 0$, donc $\exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}) \leq \frac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} \leq 1$.
Or par 3.a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}) = 1$ (continuité de l'exponentielle en 0). Donc par théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} = 1$. On en déduit bien que $u_n - n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$.