

# Modélisation du frottement

N. Mesnier  
Lycée Jean Perrin, Lyon

2023–2024

## ■ Contexte

- les actions mécaniques sont au cœur des systèmes mécaniques ;
- elles permettent de les maintenir à l'équilibre ou de créer des mouvements ;
- leur modélisation est indispensable à leur dimensionnement ou leur étude ;
- **aucune liaison n'est parfaite !**

## ■ Objectifs du cours

- acquérir les notions fondamentales de la modélisation des actions mécaniques induites par le frottement ;
- connaître et savoir utiliser les lois de frottement de Coulomb.

- 1 Frottement et phénomènes tribologiques
- 2 Modélisation du frottement de glissement
- 3 Applications

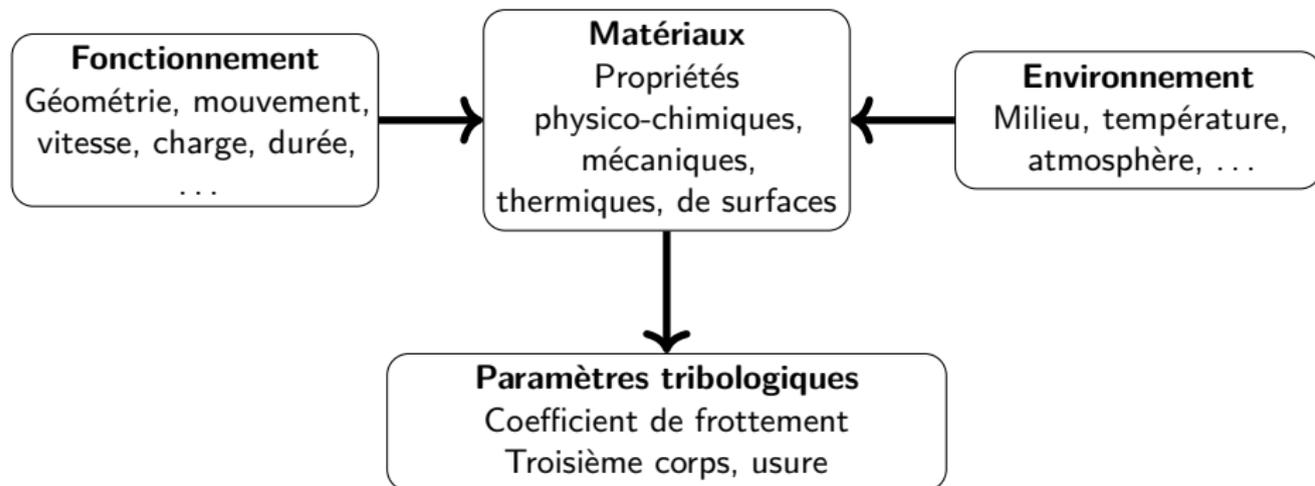


# Frottement et phénomènes tribologiques

# Système tribologique

## Définition (Système tribologique)

Un système tribologique est un système mécanique constitué de deux solides  $S_1$  et  $S_2$  en contact et animés d'un mouvement relatif.



# Modes de dissipation d'énergie

## Énergie dissipée

## Mode de dissipation

---

Énergie de déformation

Déformation élastiques et plastiques

Énergie de rupture

Fissuration, formation de débris, arrachements, écaillages

Énergie thermique

Échauffements, transferts de chaleur

Énergie chimique

Adhésion, oxydation

Énergie acoustique

Vibrations, bruits

Énergie électrique

Électrisation, accumulation de charges électro-chimiques

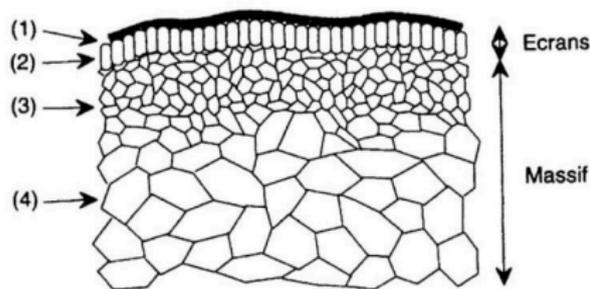
Énergie lumineuse

Étincelles, rayonnement, photoémission

## ● Surface

- limite physique d'un corps le séparant du milieu extérieur ;
- discontinuité dans l'arrangement périodique des éléments ;
- couche d'épaisseur comprise entre  $10^{-2}$  et  $10^{-6}$  mm ;
- composition chimique et propriétés mécaniques différentes de celles du cœur du matériau ;
- l'endroit le plus perturbé d'une pièce.

## ● Coupe théorique d'une surface



- 1 Film de contamination de 0,3 à 3 nm, constitué de couches absorbées
- 2 Film d'oxydes de 1 à 10  $\mu\text{m}$  (diffusion d' $\text{O}_2$ )
- 3 Zone mécaniquement perturbée de 1 à 50  $\mu\text{m}$  (structure écrouie, couche de diffusion)
- 4 Couche profonde de 10 à 100  $\mu\text{m}$ .

# Le concept de troisième corps

## ● Premiers corps

ce sont les matériaux qui bordent le contact. Ils interviennent par leur géométrie et leurs propriétés thermo-élastiques définissant les zones élémentaires de contact. Ils réagissent aux sollicitations de contact soit *(i)* par changements de phases ou de structures qui conduisent, par fragmentation, au détachement de particules, soit *(ii)* par fissuration. L'adhésion, l'abrasion et l'écaillage apparaissent dans un second temps.

## ● Troisième corps

c'est le volume de matière présent entre les premiers corps. C'est un « opérateur » de transmission de charge accommodant la différence de vitesse des premiers corps. Il est dit naturel lorsqu'il est issu ou se forme sur au moins un des deux premiers corps et artificiel lorsqu'il est apporté dans le contact (lubrification solide ou fluide). Un troisième corps naturel implique une période de formation par détachement de particules des premiers corps.

# Mécanismes de dégradation des surfaces

L'usure est un ensemble de phénomènes complexes évoluant de façon non-linéaire en fonction des sollicitations et du temps. Les effets de tous les paramètres influents sont non directement additifs : l'usure est un processus « sur-additif ».

On reconnaît trois étapes d'usure d'une pièce :

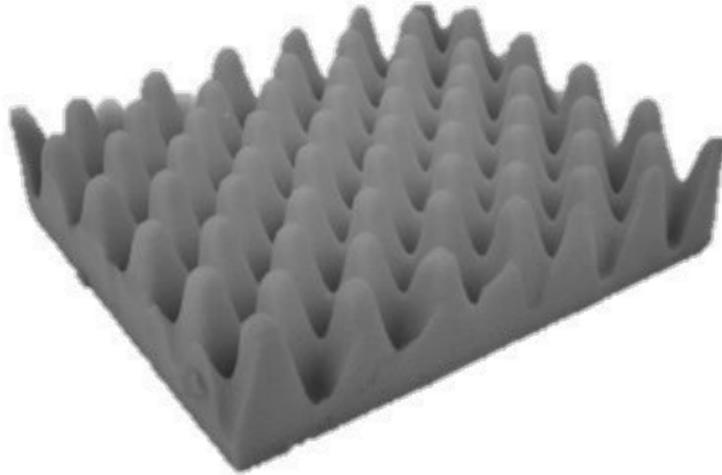
- ① le rodage où la vitesse d'usure très importante au début diminue progressivement ;
- ② le fonctionnement normal avec une vitesse d'usure relativement faible et constante ;
- ③ le vieillissement où la vitesse d'usure croît jusqu'à la ruine.



# Modélisation du frottement de glissement

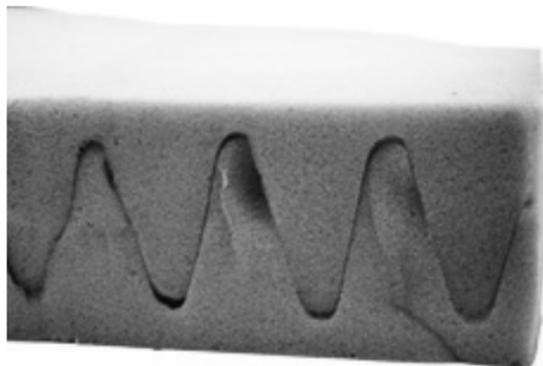
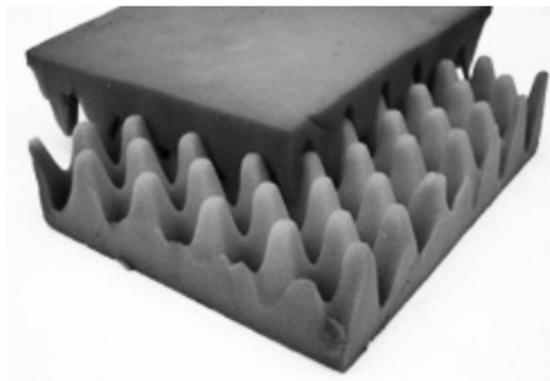
# Approche intuitive

- Vision idéalisée d'une surface



# Approche intuitive

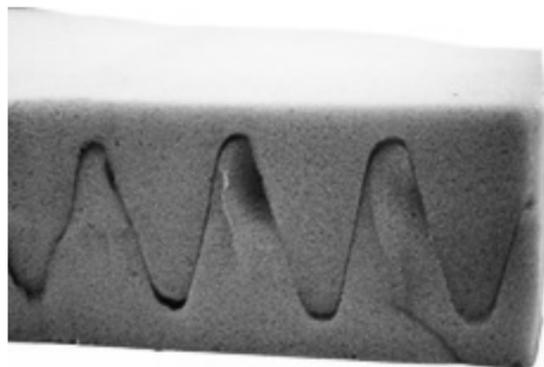
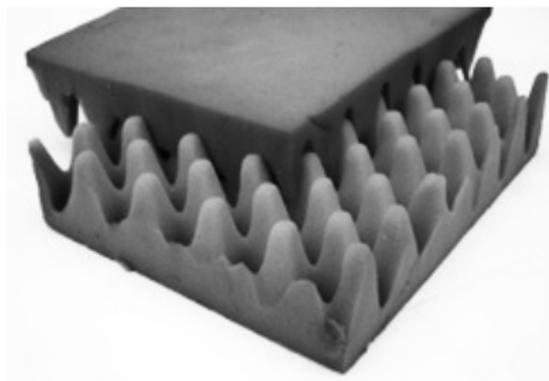
- Vision idéalisée d'un contact



Pour pouvoir déplacer le bloc supérieur, il faut  
**vaincre une force de résistance**  
due aux aspérités de la surface.

C'est cette force qui est associée au frottement de glissement !

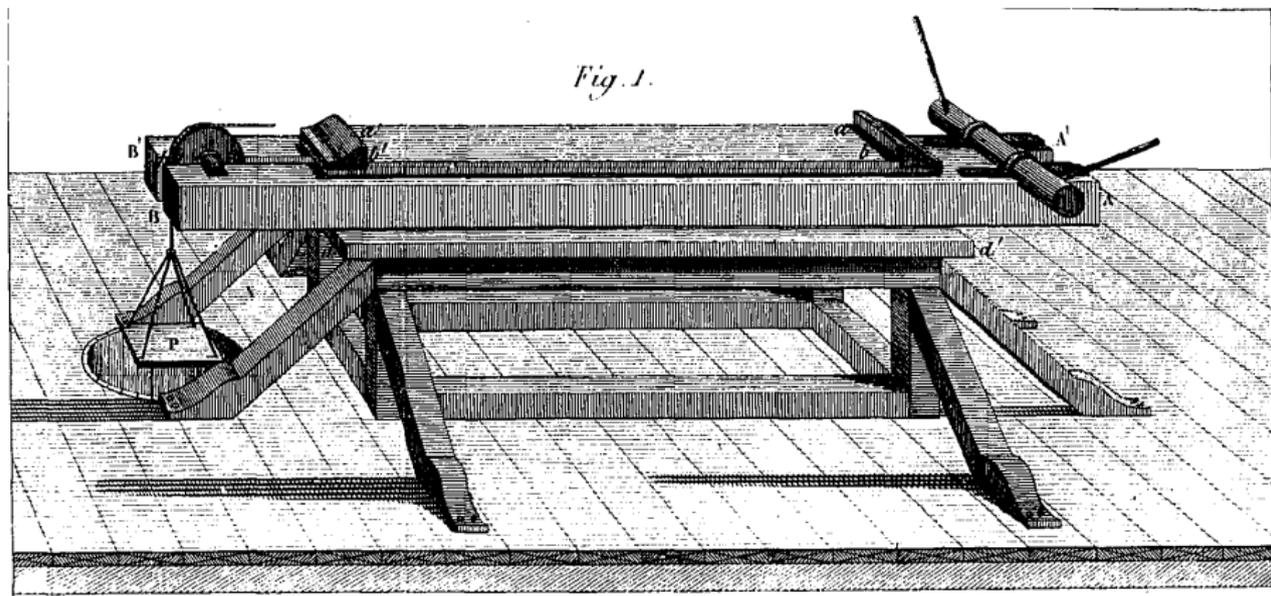
- Vision idéalisée d'un contact



Pour pouvoir déplacer le bloc supérieur, il faut  
**vaincre une force de résistance**  
due aux aspérités de la surface.

C'est cette force qui est associée au frottement de glissement !

# Lois de Coulomb



*Gravure d'une expérience réalisée par C. A. Coulomb*  
(Source : bibliothèque nationale de France)

COULOMB, C.A. *Théorie des machines simples*, 1821. [Lire sur Gallica]

# Lois de Coulomb

On considère deux solides  $S_1$  et  $S_2$  en contact avec frottement.

On modélise l'effort élémentaire de contact en un point  $M$ .

Au voisinage de chaque point  $M$ , on définit une surface élémentaire  $dS$ .

L'action élémentaire s'exerçant sur la surface  $dS$  a pour expression :

$$\overrightarrow{dF_{1 \rightarrow 2}} = \overrightarrow{dN_{1 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{dT_{1 \rightarrow 2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overrightarrow{dN_{1 \rightarrow 2}} = -p(M) \vec{n}(M) dS \\ \overrightarrow{dT_{1 \rightarrow 2}} = q(M) \vec{t}(M) dS \end{cases}$$

avec :

- $p(M)$  la pression de contact au point  $M$  ;
- $\vec{n}(M)$  la normale unitaire au plan tangent dirigée vers l'extérieur du solide étudié ;
- $q(M)$  la répartition tangentielle de l'effort ;
- $\vec{t}(M)$  un vecteur unitaire dans le plan tangent.

# Lois de Coulomb

## Contact glissant

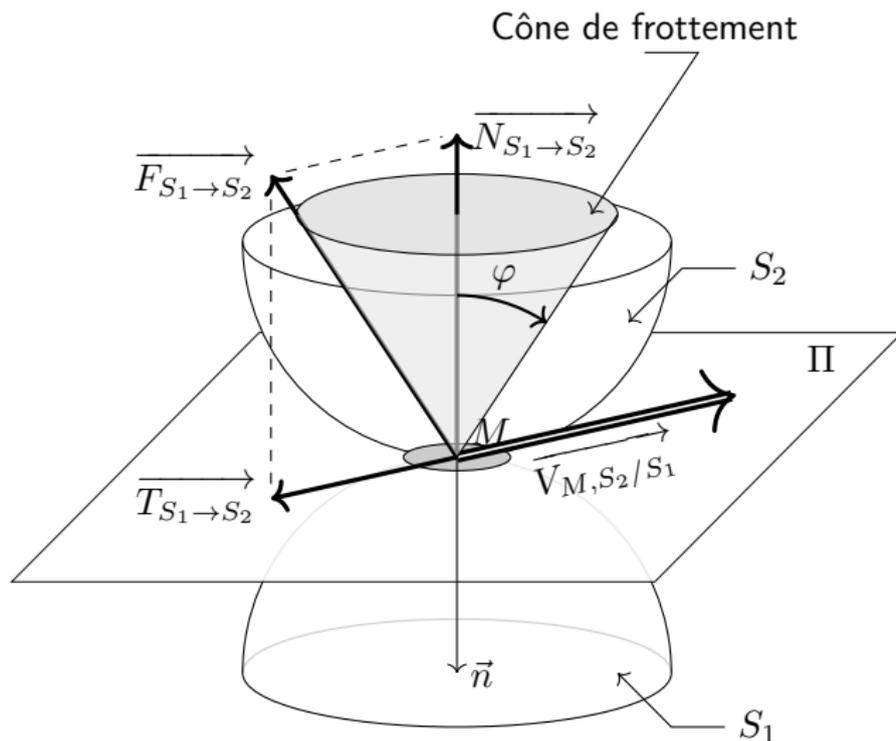
Si **les deux solides sont en mouvement** l'un par rapport à l'autre, on a  $\overrightarrow{V_{M,2/1}} \neq \overrightarrow{0}$ . Dans ce cas, la direction tangentielle est opposée à celle de la vitesse de glissement et la norme de l'action tangentielle  $q(M)$  est proportionnelle à celle de l'action normale  $p(M)$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \text{(direction)} \quad & \overrightarrow{dT_{1 \rightarrow 2}} \wedge \overrightarrow{V_{M,2/1}} = \overrightarrow{0} \\ \text{(sens)} \quad & \overrightarrow{dT_{1 \rightarrow 2}} \cdot \overrightarrow{V_{M,2/1}} \leq 0 \\ \text{(norme)} \quad & \|\overrightarrow{dT_{1 \rightarrow 2}}\| = f \|\overrightarrow{dN_{1 \rightarrow 2}}\| \end{aligned}$$

avec  $f$  le coefficient de frottement en  $M$  entre  $S_1$  et  $S_2$ . Il correspond à la tangente du demi angle au sommet  $\varphi$  du cône de frottement tel que  $f = \tan(\varphi)$ , de sorte que l'action élémentaire de contact  $\overrightarrow{dF_{1 \rightarrow 2}}$  au point  $M$  soit située **sur le cône de frottement** en  $M$  dans la direction opposée à  $\overrightarrow{V_{M,2/1}}$ .

# Lois de Coulomb

## Contact glissant



# Lois de Coulomb

## Contact adhérent

Si **les deux solides n'ont pas de mouvement relatif**, la vitesse de glissement est nulle

$$\overrightarrow{V_{M,2/1}} = \overrightarrow{0}$$

Dans ce cas on ne connaît pas la direction de contact mais l'on sait seulement qu'elle se situe **à l'intérieur du cône d'adhérence**, de demi-angle au sommet  $\varphi_0$ . On peut lui associer un coefficient d'adhérence\*  $f_0 = \tan(\varphi_0)$  tel que

$$\|\overrightarrow{dT_{1 \rightarrow 2}}\| \leq f_0 \|\overrightarrow{dN_{1 \rightarrow 2}}\|$$

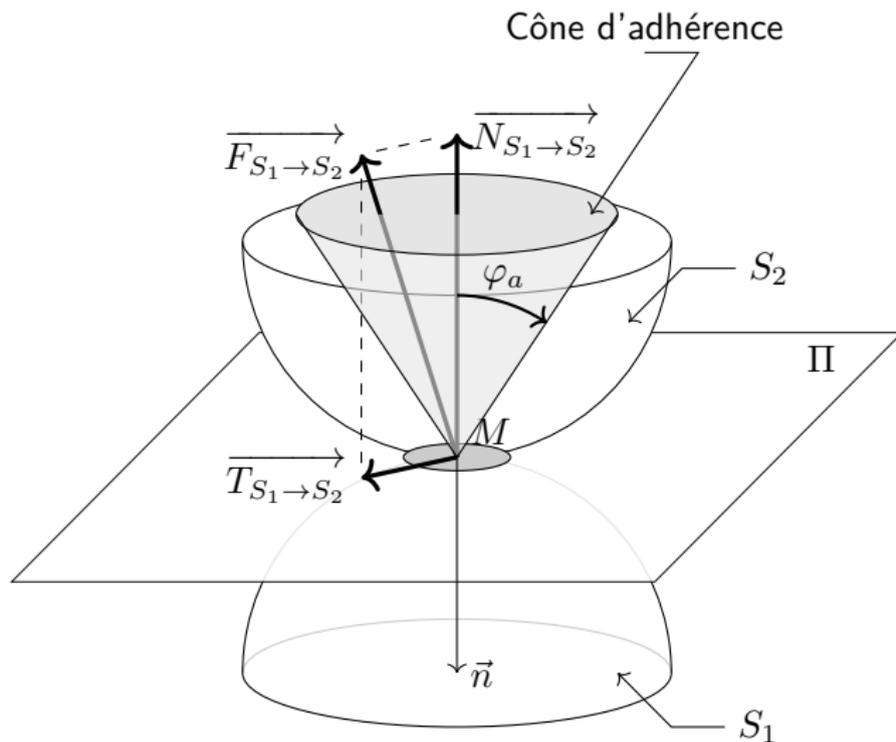
Pour déterminer  $\overrightarrow{dT_{1 \rightarrow 2}}$ , il est nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires ou de **se placer à la limite de glissement** de sorte à se ramener au cas précédent.

---

\* Il a été constaté de façon expérimentale et sur de nombreux couples de matériaux que les coefficients d'adhérence  $f_0$  et de frottement  $f$  sont très proches :  $f_0$  est légèrement supérieur à  $f$ . Aussi, dans la pratique, il est courant de les confondre.

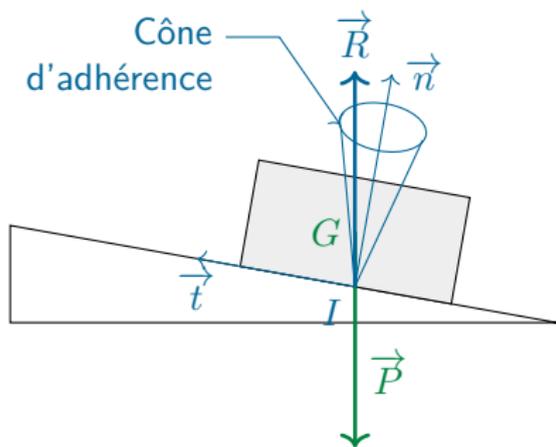
# Lois de Coulomb

## Contact adhérent

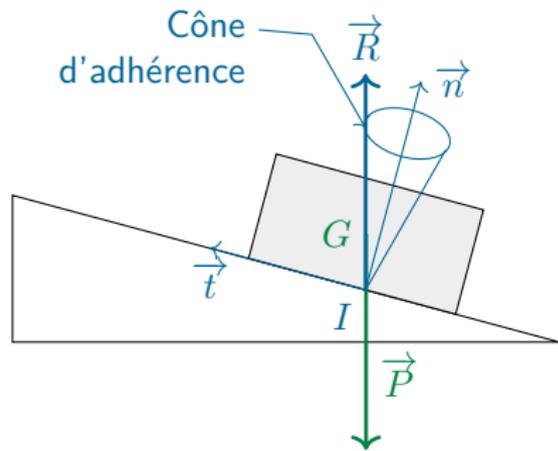


# Cône de frottement

## Position du problème



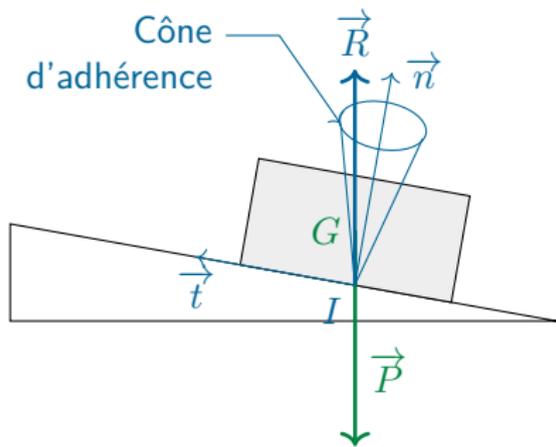
Adhérence



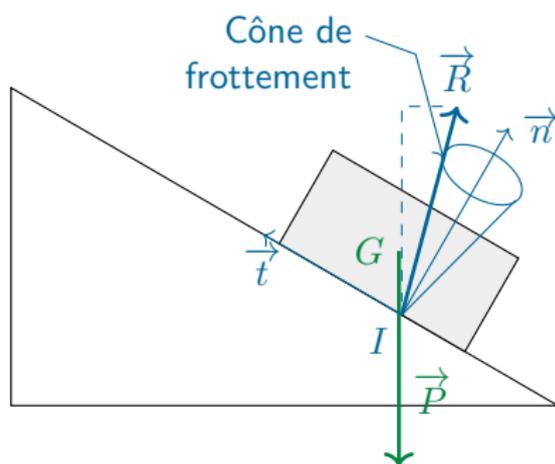
Limite de  
glissement

# Cône de frottement

Position du problème



Adhérence



Glissement

## ● Paramètres influant

- des matériaux utilisés au niveau du contact ;
- de la rugosité des surfaces de contact ;
- de la lubrification.

Le coefficient d'adhérence et le coefficient de frottement dépendent peu :

- de la pression de contact ;
- de l'aire et de la forme des surfaces de contact ;
- de la température ;
- de la direction de déplacement.

Expérimentalement, on constate que  $f$  et  $f_a$  sont proches  
( $f_a$  est légèrement supérieur).

Dans la pratique, il est donc courant de les confondre.

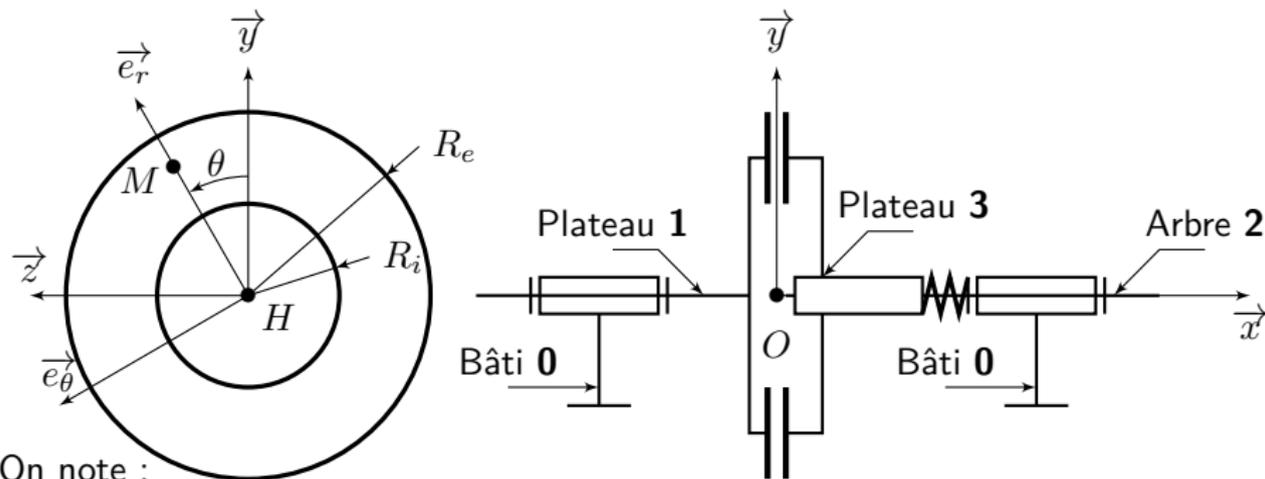
# Coefficients d'adhérence et de frottement

Matières en contact (avec rugosités favorables et des vitesses inférieures à 0,5 m/s)		Coefficient d'adhérence $f_a$ (système immobile)		Coefficient de frottement $f$ (système en mouvement)	
		$f_a$ à sec	$f_a$ lubrifié	$f$ à sec	$f$ lubrifié
Acier	Acier	0,2	0,11	0,09	0,07
	Fonte	0,12	0,09	0,1	0,06
	Bronze	0,2	0,1	0,17	0,06
	Aluminium	0,5	0,3	0,4	0,1
	Nylon	0,18		0,15	0,1
	Palier lisse auto-lubrifié		0,06		0,04
	PTFE	0,15		0,08	0,05
	Caoutchouc (courroie)	0,5			
	Bois (Chêne)	0,65	0,3	0,26	0,08
	Garniture de frein			0,4	0,2 (à éviter)
	Polyamide	0,4		0,36	
Glace	0,027		0,014		
Fonte	Bronze	0,23	0,14	0,21	0,1
	Fonte	0,24	0,14	0,21	0,1
Bronze	Bronze	0,2	0,1	0,18	0,07
Plastique	Plastique				
Pneumatique	Route	0,6	0,3 (Pluie)		
Bois	Bois	0,5	0,4	0,3	0,2



# Applications

# Couple transmissible par un embrayage



On note :

- $R_i$  et  $R_e$  : rayons intérieurs et extérieurs de la zone de friction
- $N$  l'effort axial (presseur) suivant l'axe  $(O, \vec{x})$
- $f$  le coefficient de frottement de l'interface
- $p$  la pression de contact, pas forcément uniforme
- $\vec{\Omega}_{3/1} = \omega \vec{x}$  la vitesse de rotation du solide  $S_3$  par rapport au solide  $S_1$

# Couple transmissible par un embrayage

Pression uniforme (surfaces neuves)

Si la pression de contact est supposée uniforme, elle a pour expression

$$p = \frac{N}{S} = \frac{N}{\pi (R_e^2 - R_i^2)}$$

Dans ce cas, l'action tangentielle élémentaire en un point  $M$  sera définie par :

$$\overrightarrow{dT_{1 \rightarrow 3}} = -f p \, dS \, \vec{e}_\theta \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{V_{M,3/1}} = r \, \omega \, \vec{e}_\theta$$

de sorte que le torseur au point  $M$  s'écrive :

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 3}\}_M = \left\{ \begin{array}{c} p (\vec{x} - f \vec{e}_\theta) \, dS \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

et donc, avec  $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$ , au centre de la surface  $O$  :

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 3}\}_O = \left\{ \begin{array}{c} p (\vec{x} - f \vec{e}_\theta) \, dS \\ r p (f \vec{x} + \vec{e}_\theta) \, dS \end{array} \right\}$$

# Couple transmissible par un embrayage

Pression uniforme (surfaces neuves)

conduisant à l'expression du couple transmissible selon l'axe  $(O, \vec{x})$  :

$$\mathcal{C} = \int_S r f p \, dS = f p \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} r^2 \, dr \, d\theta = 2\pi f p \left( \frac{R_e^3 - R_i^3}{3} \right)$$

Avec

$$p = \frac{N}{S} = \frac{N}{\pi (R_e^2 - R_i^2)}$$

il vient :

$$\boxed{\mathcal{C} = \frac{2 f N}{3} \left( \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2} \right)}$$

# Couple transmissible par un embrayage

Répartition de pression hyperbolique (surfaces usagées)

Pour tenir compte de l'usure, proportionnelle à la vitesse de glissement, il est habituel de considérer une distribution de pression hyperbolique, minimale sur le rayon extérieur.

hypothèse d'usure constante :  $p \cdot r = \text{cste}$

telle que :

$$p(r) = p_i \frac{R_i}{r} \quad \text{avec} \quad p_i = p(R_i) \text{ une constante}$$

Dans ce cas, l'action tangentielle élémentaire en un point  $M$  sera définie par :

$$\overrightarrow{dT_{1 \rightarrow 3}} = -f p(r) dS \vec{e}_\theta$$

de sorte que le torseur au point  $O$  s'écrive :

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 3}\} = \underset{M}{\left\{ \begin{array}{c} p(r) (\vec{x} - f \vec{e}_\theta) dS \\ \vec{0} \end{array} \right\}} = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{c} p(r) (\vec{x} - f \vec{e}_\theta) dS \\ r p(r) (f \vec{x} + \vec{e}_\theta) dS \end{array} \right\}}$$

# Couple transmissible par un embrayage

Répartition de pression hyperbolique (surfaces usagées)

conduisant à l'expression du couple transmissible selon l'axe  $(O, \vec{x})$  :

$$\mathcal{C} = \int_S r f p(r) dS = f p_i \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} \frac{R_i}{r} r^2 dr d\theta = \pi f p_i R_i (R_e^2 - R_i^2)$$

Avec l'expression de l'effort axial  $N$  :

$$N = \int_S p(r) dS = p_i \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} \frac{R_i}{r} r dr d\theta = 2\pi p_i R_i (R_e - R_i)$$

il vient :

$$\mathcal{C} = f N \left( \frac{R_i + R_e}{2} \right)$$

# Couple transmissible par un embrayage

## Comparaison des hypothèses de répartition de pression

- Pression uniforme (surfaces neuves)

$$\mathcal{C} = \frac{2 f N}{3} \left( \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2} \right)$$

- Répartition de pression hyperbolique (surfaces usagées)

$$\mathcal{C} = f N \left( \frac{R_i + R_e}{2} \right)$$

## Remarque

Si la différence entre les rayons extérieurs et intérieurs est faible, une approximation au premier ordre permet d'écrire

$$\lim_{R_e \rightarrow R_i} \left[ \frac{2 f N}{3} \left( \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2} \right) \right] = f N \left[ \left( \frac{R_i + R_e}{2} \right) + o\left((R_e - R_i)^2\right) \right]$$

et donc d'identifier les deux résultats en première approche.



N. Mesnier, lycée Jean Perrin, Lyon