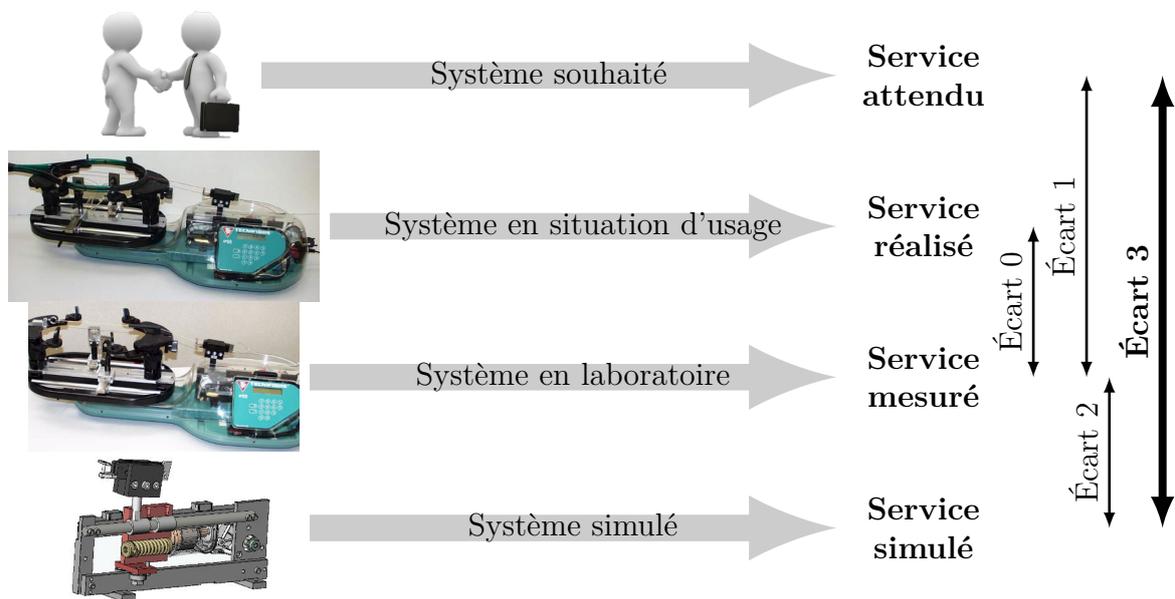


Architecture des chaînes de solides et théorie des mécanismes

— *Éléments de correction des TDs* —



Écart 0 – évalue la fiabilité et la fidélité du système de laboratoire didactisé par rapport au système réel. Il répond aux questions « le système de laboratoire est-il représentatif du système réel ? Permet-il de l'étudier de manière fiable ? »

Écart 1 – évalue le respect du CDCF par le système réel sur prototype instrumenté en laboratoire. Il répond à la question « le système réalisé, répond-il au CDCF ? ».

Écart 2 – évalue la fiabilité du modèle et de ses hypothèses. Il répond à la question « le modèle est-il correct ? ».

Écart 3 – évalue, en phase de conception, le respect du CDCF à partir d'un modèle simulé. Il répond à la question « le modèle du système satisfait-il les exigences du CDCF ? ».

Activités de TD

Exercices

Exercice 1 – Recherche de liaisons équivalentes	3
Exercice 2 – Machine à mesurer tridimensionnelle	5
Exercice 3 – Pompe à pistons axiaux	10
Exercice 4 – Axe d'un robot cartésien d'une cellule d'injection	13
Exercice 5 – Fouloir d'un mélangeur à rotors engrenants	23
Exercice 6 – Train d'atterrissage d'hélicoptère	26



Nicolas Mesnier, lycée Jean Perrin, Lyon
Compléments & mises à jour sur le site des PCSI
<https://cahier-de-prepa.fr/pcsi-perrin>

— Version du 4 juin 2024 —

Recherche de liaisons équivalentes

Question 1.1.

Cas n° 1 On identifie une liaison sphérique de centre C en série avec une liaison appui plan de normale \vec{n} . On note $(\vec{n}, \vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée directe telle que l'on ait au point C :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\}_C = \left\{ \begin{array}{c} p_1 \vec{n} + q_1 \vec{i} + r_1 \vec{j} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{V}_{3/2}\}_C = \left\{ \begin{array}{c} p_2 \vec{n} \\ v_2 \vec{i} + w_2 \vec{j} \end{array} \right\}$$

Il vient alors par composition des champs de vitesses :

$$\{\mathcal{V}_{3/1}^{\text{éq}}\}_C = \{\mathcal{V}_{3/2}\}_C + \{\mathcal{V}_{2/1}\}_C = \left\{ \begin{array}{c} (p_1 + p_2) \vec{n} + q_1 \vec{i} + r_1 \vec{j} \\ v_2 \vec{i} + w_2 \vec{j} \end{array} \right\}$$

Une seule mobilité est bloquée : la translation dans la direction \vec{n} . On identifie alors une liaison sphère-plan de normale (C, \vec{n}) . Cette liaison possède un degré de mobilité utile :

$$m_u = \dim(\mathcal{V}_{31}^{\text{éq}}) = 5$$

et un degré de mobilité interne

$$m_i = \dim(\mathcal{V}_{32}) + \dim(\mathcal{V}_{21}) - \dim(\mathcal{V}_{31}^{\text{éq}}) = 1$$

qui correspond à la rotation autour de l'axe (C, \vec{n}) , que l'on peut identifier avec le couple $p_1 + p_2$.

Cas n° 2 On identifie une liaison sphérique de centre C en série avec une liaison pivot glissant d'axe (C, \vec{u}) . On note $(\vec{u}, \vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée directe telle que l'on ait au point C :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\}_C = \left\{ \begin{array}{c} p_1 \vec{u} + q_1 \vec{i} + r_1 \vec{j} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{V}_{3/2}\}_C = \left\{ \begin{array}{c} p_2 \vec{u} \\ u_2 \vec{u} \end{array} \right\}$$

Il vient alors par composition des champs de vitesses :

$$\{\mathcal{V}_{3/1}^{\text{éq}}\}_C = \{\mathcal{V}_{3/2}\}_C + \{\mathcal{V}_{2/1}\}_C = \left\{ \begin{array}{c} (p_1 + p_2) \vec{u} + q_1 \vec{i} + r_1 \vec{j} \\ u_2 \vec{u} \end{array} \right\}$$

Deux mobilités sont bloquées : les translations dans les directions \vec{i} et \vec{j} . On identifie alors une liaison sphère-cylindre de centre C et d'axe (C, \vec{u}) . Cette liaison possède un degré de mobilité utile :

$$m_u = \dim(\mathcal{V}_{31}^{\text{éq}}) = 4$$

et un degré de mobilité interne

$$m_i = \dim(\mathcal{V}_{32}) + \dim(\mathcal{V}_{21}) - \dim(\mathcal{V}_{31}^{\text{éq}}) = 1$$

qui correspond à la rotation autour de l'axe (C, \vec{u}) , que l'on peut identifier avec le couple $p_1 + p_2$.

Cas n° 3 On identifie une liaison pivot d'axe (C, \vec{u}) en série avec une liaison appui plan de normale $\vec{n} \perp \vec{u}$. On note $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ une base orthonormée directe telle que l'on ait au point C :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} p_1 \vec{u} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{V}_{3/2}\} = \begin{Bmatrix} r_2 \vec{n} \\ u_2 \vec{u} + v_2 \vec{v} \end{Bmatrix}$$

Il vient alors par composition des champs de vitesses :

$$\{\mathcal{V}_{3/1}^{\text{éq}}\} = \{\mathcal{V}_{3/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} p_1 \vec{u} + r_2 \vec{n} \\ u_2 \vec{u} + v_2 \vec{v} \end{Bmatrix}$$

Deux mobilités sont bloquées : la rotation autour de l'axe (C, \vec{v}) et la translation dans la direction \vec{n} . On identifie alors une liaison cylindre-plan d'axe (C, \vec{u}) et de normale \vec{n} . Cette liaison possède un degré de mobilité utile :

$$m_u = \dim(\mathcal{V}_{31}^{\text{éq}}) = 4$$

et aucune mobilité interne car

$$m_i = \dim(\mathcal{V}_{32}) + \dim(\mathcal{V}_{21}) - \dim(\mathcal{V}_{31}^{\text{éq}}) = 0$$

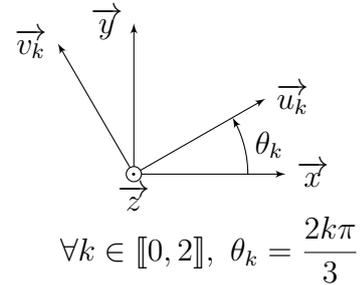
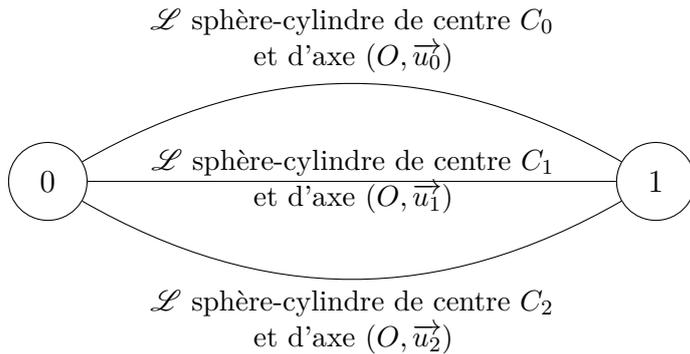
Question 1.2. Il est intéressant de réaliser des liaisons associées à un modèle de contact de type linéique ou ponctuel par l'intermédiaire de contacts surfaciques pour limiter les pressions de contact et donc l'usure des pièces en mouvements relatifs.

Machine à mesurer tridimensionnelle

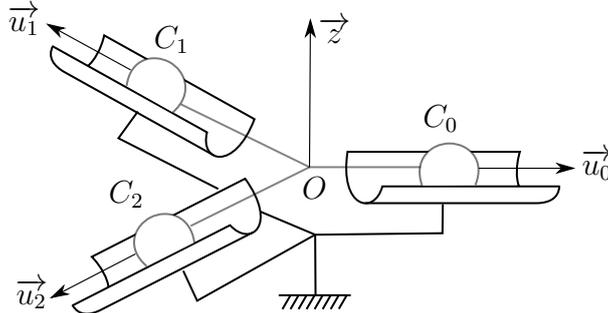
Question 2.1. On identifie sur la vue 3D, trois liaisons sphère-cylindre de centres $(C_k)_{0 \leq k \leq 2}$ équirépartis sur un cercle de centre O et de rayon ℓ , dans un plan de normale \vec{z} et d'axes concourants en O tels que

$$\forall k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, \overrightarrow{OC_k} = \ell \vec{u}_k$$

Il vient alors le graphe de structure :



avec $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ une base orthonormée directe tel que : Il vient le schéma cinématique :



Question 2.2. Comme les trois liaisons sont en parallèle, on a avec la méthode cinématique les équations de compatibilité des champs de vitesses :

$$\{\mathcal{V}_{1/0}^{\text{éq}}\} = \{\mathcal{V}_{1/0}^{\text{①}}\} = \{\mathcal{V}_{1/0}^{\text{②}}\} = \{\mathcal{V}_{1/0}^{\text{③}}\}$$

Pour exprimer les moments de ces équations de compatibilité, on choisit le point O , intersection des axes, et on note

$$\{\mathcal{V}_{1/0}^{\text{éq}}\} = \left\{ \begin{array}{l} p \vec{x} + q \vec{y} + r \vec{z} \\ u \vec{x} + v \vec{y} + w \vec{z} \end{array} \right\}_O$$

les éléments de réduction au point O du torseur cinématique de la liaison équivalente. Sachant que l'on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, \{\mathcal{V}_{1/0}^{\text{③}}\}_{C_k} = \left\{ \begin{array}{l} p_k \vec{u}_k + q_k \vec{v}_k + r_k \vec{z} \\ u_k \vec{u}_k \end{array} \right\}$$

il vient par changement de point :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V_{O,1/0}^{(k)}} &= \overrightarrow{V_{C_k,1/0}^{(k)}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}^{(k)}} \wedge \overrightarrow{C_k O} \\
&= u_k \overrightarrow{u_k} + (p_k \overrightarrow{u_k} + q_k \overrightarrow{v_k} + r_k \overrightarrow{z}) \wedge -\ell \overrightarrow{u_k} \\
&= u_k \overrightarrow{u_k} - \ell r_k \overrightarrow{v_k} + \ell q_k \overrightarrow{z}
\end{aligned}$$

Avec les projections

\bullet	$\overrightarrow{u_0}$	$\overrightarrow{v_0}$	$\overrightarrow{u_1}$	$\overrightarrow{v_1}$	$\overrightarrow{u_2}$	$\overrightarrow{v_2}$
\overrightarrow{x}	1	0	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$
\overrightarrow{y}	0	1	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$

il vient, dans la base \mathcal{B} , les équations de compatibilité :

$$\begin{aligned}
/\overrightarrow{x} : p &= p_0 = \frac{-p_1 - \sqrt{3}q_1}{2} = \frac{-p_2 + \sqrt{3}q_2}{2} \\
/\overrightarrow{y} : q &= q_0 = \frac{\sqrt{3}p_1 - q_1}{2} = \frac{-\sqrt{3}p_2 - q_2}{2} \\
/\overrightarrow{z} : r &= r_0 = \frac{r_1}{r_2} \\
/(O, \overrightarrow{x}) : u &= u_0 = \frac{-u_1 + \sqrt{3}\ell r_1}{2} = \frac{-u_2 - \sqrt{3}\ell r_2}{2} \\
/(O, \overrightarrow{y}) : v &= -\ell r_0 = \frac{\sqrt{3}u_1 + \ell r_1}{2} = \frac{-\sqrt{3}u_2 + \ell r_2}{2} \\
/(O, \overrightarrow{z}) : w &= \ell q_0 = \frac{\ell q_1}{\ell q_2}
\end{aligned}$$

Avec la ligne (3), il vient :

$$r = r_0 = r_1 = r_2$$

d'où, avec $\ell \neq 0$ et les lignes (4) et (5) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{-u_1 + \sqrt{3}\ell r}{2} = \frac{-u_2 - \sqrt{3}\ell r}{2} \\ \frac{\sqrt{3}u_1 + \ell r}{2} = \frac{-\sqrt{3}u_2 + \ell r}{2} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} u_1 - u_2 = 2\sqrt{3}\ell r \\ u_1 + u_2 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \sqrt{3}\ell r \\ u_2 = -\sqrt{3}\ell r \end{array} \right.$$

Or, avec la ligne (5), on a aussi :

$$-\ell r = \frac{\sqrt{3}u_1 + \ell r}{2} = 2\ell r \iff \boxed{r = 0} \implies \left\{ \begin{array}{l} \boxed{u_1 = u_2 = 0} \\ \boxed{v = 0} \end{array} \right. \text{ (ligne 5)}$$

d'où, avec la ligne (4), on tire :

$$u = u_0 = \frac{-u_1 + \sqrt{3}\ell r}{2} = 0 \iff \boxed{u = u_0 = 0}$$

De façon similaire, après exploitation de la ligne (6) sachant $\ell \neq 0$, il vient

$$q_0 = q_1 = q_2 = q$$

avec la notation adaptée de la ligne (2), il vient avec les lignes (1) et (2) :

$$\begin{cases} \frac{-p_1 + \sqrt{3}q}{2} = \frac{-p_2 + \sqrt{3}q}{2} \\ \frac{\sqrt{3}p_1 - q}{2} = \frac{-\sqrt{3}p_2 - q}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} p_1 = p_2 \\ p_1 = -p_2 \end{cases} \iff \boxed{p_1 = p_2 = 0}$$

Or, avec la ligne (2), on a aussi :

$$q = -\frac{q}{2} \iff \boxed{q = 0} \implies \begin{cases} \boxed{p = p_0 = 0} & \text{(ligne 1)} \\ \boxed{w = 0} & \text{(ligne 6)} \end{cases}$$

résultats que l'on aurait pu obtenir directement avec les changements de variables $u_k \rightarrow p_k$, $\ell r_k \rightarrow -q_k$ et $\ell q_k \rightarrow r_k$. Sachant que l'on a $p = q = r = 0 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $u = v = w = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, il vient finalement :

$$\boxed{\{\mathcal{V}_{1/0}^{\text{éq}}\} = \{0\}}$$

qui ne présente aucune mobilité et correspond au torseur cinématique d'une liaison complète.

Question 2.3. Comme les trois liaisons sont en parallèle, on a avec la méthode statique la somme des actions mécaniques transmissibles :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{éq}}\} = \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{①}}\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{②}}\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{③}}\}$$

Pour exprimer les moments de cette somme, on choisit le point O , intersection des axes, et on note

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{éq}}\} = \begin{matrix} \left\{ \begin{array}{l} X \vec{x} + Y \vec{y} + Z \vec{z} \\ L \vec{x} + M \vec{y} + N \vec{z} \end{array} \right\} \\ O \end{matrix}$$

les éléments de réduction au point O du torseur d'actions mécaniques transmissibles de la liaison équivalente. Sachant que l'on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{③}}\} = \begin{matrix} \left\{ \begin{array}{l} Y_k \vec{v}_k + Z_k \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \\ C_k \end{matrix}$$

il vient par changement de point :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow 1}^{\text{③}}} &= \overrightarrow{M_{C_k,0 \rightarrow 1}^{\text{③}}} + \overrightarrow{F_{0 \rightarrow 1}^{\text{③}}} \wedge \overrightarrow{C_k O} \\ &= (Y_k \vec{v}_k + Z_k \vec{z}) \wedge -\ell \vec{u}_k \\ &= -\ell Z_k \vec{v}_k + \ell Y_k \vec{z} \end{aligned}$$

Avec les projections des vecteurs \vec{u}_k et \vec{v}_k , $0 \leq k \leq 2$, dans la base \mathcal{B} , il vient par somme :

$$\left\{ \begin{array}{l} / \vec{x} : X = 0 + \frac{-\sqrt{3}Y_1}{2} + \frac{\sqrt{3}Y_2}{2} \\ / \vec{y} : Y = Y_0 + \frac{-Y_1}{2} + \frac{-Y_2}{2} \\ / \vec{z} : Z = Z_0 + \frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{2} \\ / (O, \vec{x}) : L = 0 + \frac{\sqrt{3}\ell Z_1}{2} + \frac{-\sqrt{3}\ell Z_2}{2} \\ / (O, \vec{y}) : M = -\ell Z_0 + \frac{\ell Z_1}{2} + \frac{\ell Z_2}{2} \\ / (O, \vec{z}) : N = \ell Y_0 + \ell Y_1 + \ell Y_2 \end{array} \right.$$

que l'on peut écrire sous la forme du système linéaire :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ L \\ M \\ N \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}\ell/2 & -\frac{\sqrt{3}\ell}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\ell & -\ell/2 & \ell/2 & 0 \\ \ell & \ell & 0 & 0 & 0 & \ell \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Z_0 \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Y_0 \end{pmatrix}$$

telle que, en procédant aux opérations sur les lignes :

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}L_1 \\ L_5 &\leftarrow L_5 + \ell L_3 - \frac{1}{\sqrt{3}}L_4 \end{aligned}$$

on ait la matrice équivalente par lignes :

$$A \sim_L \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}\ell/2 & -\frac{\sqrt{3}\ell}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\ell & 0 \\ \ell & \ell & 0 & 0 & 0 & \ell \end{pmatrix} \implies \text{rang}(A) = 6$$

ce qui signifie que la dimension du sous-espace vectoriel réel engendré par le torseur d'actions mécaniques transmissibles de la liaison équivalente $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{éq}}\}$ est de dimension :

$$\dim(\mathcal{T}_{01}^{\text{éq}}) = \text{rang}(A) = 6$$

La liaison équivalente possède donc 6 inconnues d'actions mécaniques transmissibles distinctes : c'est donc une liaison complète.

Question 2.4. Pour des liaisons en parallèle, on a :

$$h = \sum_{k=0}^2 \dim(\mathcal{T}_{01}^{\circledast k}) - \dim(\mathcal{T}_{01}^{\text{éq}}) = 3 \times 2 - 6 = 0$$

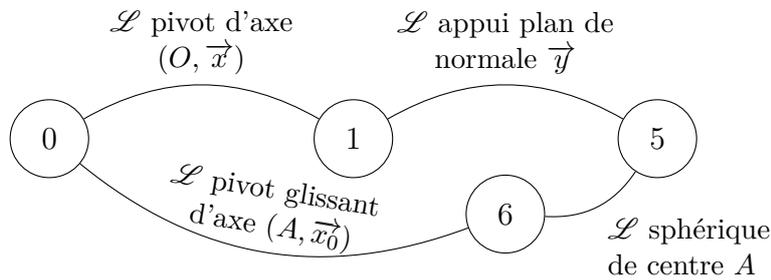
qui signifie que la liaison complète réalisée avec ces trois liaisons sphère-cylindre en parallèle est isostatique. Elle ne nécessitera donc pas d'être réglée pour être montée.

— EXERCICE 3 —

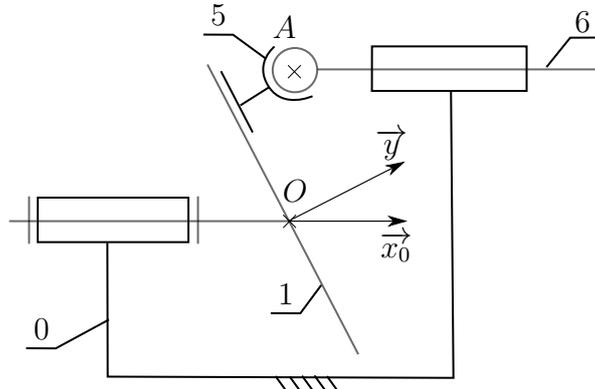
Pompe à pistons axiaux

Question 3.1. D'après le dessin d'ensemble, on peut distinguer quatre classes d'équivalence :

- le corps de la pompe $\mathbf{0}=\{8, 10, 13, 14\}$;
- l'axe moteur $\mathbf{1}=\{1, 4, 11, 12\}$;
- le plot en bronze $\mathbf{5}=\{5, 16\}$;
- un piston $\mathbf{6}=\{6\}$.



Il vient le schéma cinématique de la pompe avec un seul piston :



Question 3.2. La liaison entre le plot en bronze $\mathbf{5}$ et l'arbre $\mathbf{1}$ est une liaison appui plan de normale \vec{y} . Son torseur cinématique est défini de façon canonique par :

$$\boxed{\left\{ \mathcal{V}_{5/1} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} q_{51} \vec{y} \\ u_{51} \vec{x} + w_{51} \vec{z} \end{array} \right\}}$$

Question 3.3. La liaison entre le piston $\mathbf{6}$ et le plot en bronze $\mathbf{5}$ est une liaison sphérique de centre A . Son torseur cinématique est défini de façon canonique par :

$$\boxed{\left\{ \mathcal{V}_{6/5} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} p_{65} \vec{x} + q_{65} \vec{y} + r_{65} \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

Question 3.4. Comme les deux liaisons $\mathcal{L}_{1/5}$ et $\mathcal{L}_{5/6}$ sont en série, le torseur cinématique de la liaison équivalente $\mathcal{L}_{1/6}^{\text{éq}} = \mathcal{L}_{1/5} \cup \mathcal{L}_{5/6}$ correspond à la composition des champs de vitesses :

$$\{\mathcal{V}_{6/1}^{\text{éq}}\} = \{\mathcal{V}_{6/5}\} + \{\mathcal{V}_{5/1}\}$$

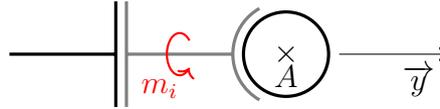
Par somme, il vient donc :

$$\boxed{\{\mathcal{V}_{6/1}^{\text{éq}}\}_A = \begin{Bmatrix} p_{65} \vec{x} + (q_{65} + q_{51}) \vec{y} + r_{65} \vec{z} \\ u_{51} \vec{x} + w_{51} \vec{z} \end{Bmatrix}}$$

Avec $m_u = \dim(\mathcal{V}_{6/1}^{\text{éq}}) = 5$ degrés de liberté et une seule mobilité bloquée en translation dans la direction \vec{y} , on identifie le torseur cinématique caractéristique d'une liaison sphère-plan de normale (A, \vec{y}) . Sachant que le nombre de mobilités totales

$$m = \dim(\mathcal{V}_{6/5}) + \dim(\mathcal{V}_{5/1}) = 3 + 3 = 6$$

est supérieur au nombre de mobilités utiles (de la liaison équivalente), on en déduit que l'ensemble des deux liaisons en série possède une mobilité interne $m_i = m - m_u = 1$, en rotation autour de l'axe (A, \vec{y}) (identifiable avec le couple $q_{65} + q_{51}$).



Question 3.5. Par une approche statique avec deux liaisons en série, on en déduit les conditions de compatibilité des torseurs d'actions mécaniques transmissibles :

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 6}^{\text{éq}}\} = \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 5}\} = \{\mathcal{T}_{5 \rightarrow 6}\}$$

Pour exprimer les moments de ces équations de compatibilité, on choisit le point A , et on note

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 6}^{\text{éq}}\}_A = \begin{Bmatrix} X \vec{x} + Y \vec{y} + Z \vec{z} \\ L \vec{x} + M \vec{y} + N \vec{z} \end{Bmatrix}$$

les éléments de réduction au point A du torseur d'actions mécaniques transmissibles de la liaison équivalente. Sachant que l'on a :

— pour la liaison appui plan de normale \vec{y} :

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 5}\}_A = \begin{Bmatrix} Y_{15} \vec{y} \\ L_{15} \vec{x} + N_{15} \vec{z} \end{Bmatrix}$$

— pour la liaison sphérique de centre A :

$$\{\mathcal{T}_{5 \rightarrow 6}\}_A = \begin{Bmatrix} X_{56} \vec{x} + Y_{56} \vec{y} + Z_{56} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

il vient les équations de compatibilité :

$$\begin{aligned}
 /_{\vec{x}} : X &= 0 = X_{56} \\
 /_{\vec{y}} : Y &= Y_{15} = Y_{56} \\
 /_{\vec{z}} : Z &= 0 = Z_{56} \\
 /_{(A, \vec{x})} : L &= L_{15} = 0 \\
 /_{(A, \vec{y})} : M &= 0 = 0 \\
 /_{(A, \vec{z})} : N &= N_{15} = 0
 \end{aligned}$$

Des lignes (1), (3), (4), (5) et (6), on tire immédiatement :

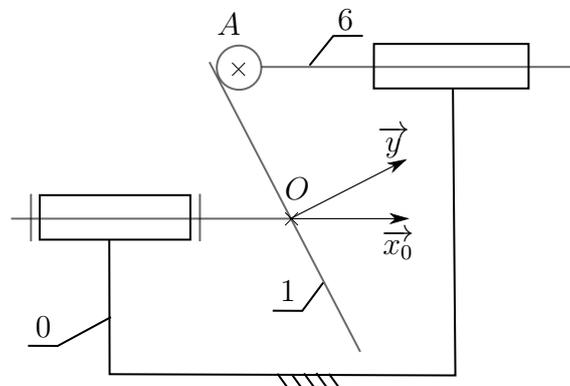
$$\boxed{X = Z = 0 \text{ N}} \quad \text{et} \quad \boxed{L = M = N = 0 \text{ N}\cdot\text{m}}$$

d'où

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 6}^{\text{éq}}\}_A = \begin{Bmatrix} Y \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

Seule la composante Y peut être non nulle donc le seul mouvement bloqué est une translation dans la direction \vec{y} . Avec $\dim(\mathcal{T}_{1-6}) = 1$ action mécanique transmissible, on identifie le torseur d'actions mécaniques transmissibles caractéristique d'une liaison sphère-plan de normale (A, \vec{y}) . On note de plus avec le « $0 = 0$ » de la ligne (5), que l'association série possède une mobilité interne autour de l'axe (A, \vec{y}) .

Question 3.6. En tenant compte de la liaison équivalente, il vient le schéma cinématique minimal de la pompe avec un seul piston :



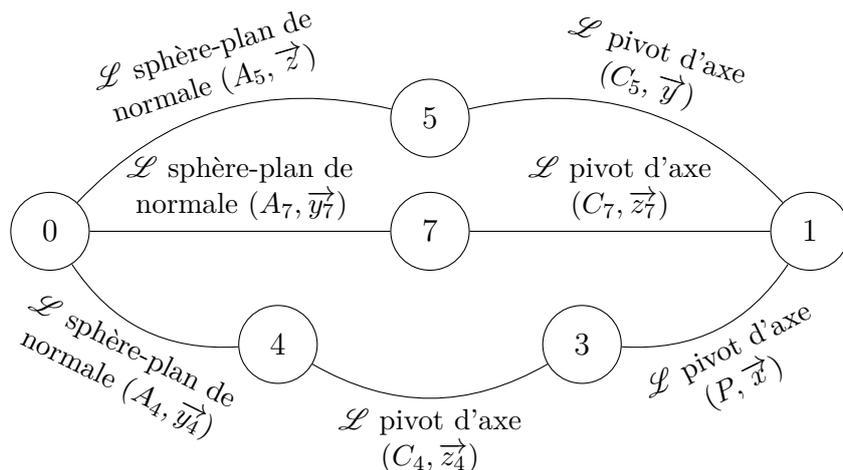
Question 3.7. Il est intéressant de réaliser une liaison sphère-plan par association en série d'une liaison sphérique (contact surfacique) et d'une liaison appui-plan (contact surfacique) afin de limiter les pressions de contact (infinie si contact ponctuel) et donc l'usure des pièces en mouvements relatifs.

Le choix du bronze pour les plots **5** est probablement motivé pour limiter les pertes par frottement lors des mouvements relatifs 5/6 et 5/1.

Axe d'un robot cartésien d'une cellule d'injection

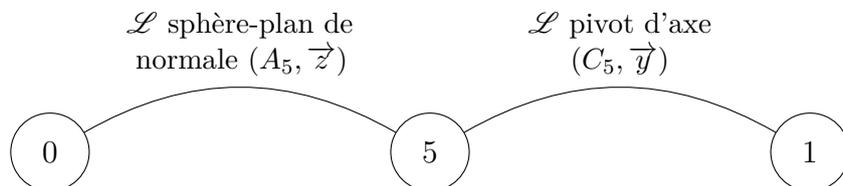
4.1 Liaison équivalente du module X gauche

Question 4.1. Avec la description donnée, il vient le graphe de structure :



où on notera simplement que sur la configuration de la figure 4.6, on a $\vec{y}_4 = \vec{y}$.

Question 4.2. On cherche la liaison équivalente aux deux liaisons en série



Approche cinématique Par composition des champs de vitesses, on a :

$$\{\mathcal{V}_{1/0}^{\text{éq}}\} = \{\mathcal{V}_{1/5}\} + \{\mathcal{V}_{5/0}\}$$

avec

— pour la liaison pivot

$$\forall M \in (C_5, \vec{y}), \quad \{\mathcal{V}_{1/5}\} = \begin{Bmatrix} q_{15} \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M$$

— pour la liaison sphère-plan

$$\{\mathcal{V}_{5/0}\} = \begin{Bmatrix} p_{50} \vec{x} + q_{50} \vec{y} + r_{50} \vec{z} \\ u_{50} \vec{x} + v_{50} \vec{y} \end{Bmatrix}_{C_5}$$

d'où, par somme au point C_5 :

$$\{\mathcal{V}_{1/0}^{\text{éq}}\}_{C_5} = \begin{Bmatrix} p_{50} \vec{x} + (q_{15} + q_{50}) \vec{y} + r_{50} \vec{z} \\ u_{50} \vec{x} + v_{50} \vec{y} \end{Bmatrix}$$

Avec une seule mobilité bloquée en translation dans la direction \vec{z} , on identifie le torseur cinématique caractéristique d'une liaison sphère-plan de normale (A_5, \vec{z}) . L'association série possède une mobilité interne en rotation autour de l'axe (C_5, \vec{y}) identifiable avec le couple $q_{15} + q_{50}$.

Approche statique La relation de compatibilité des torseurs d'actions mécaniques transmissibles s'écrit :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{éq}}\} = \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 5}\} = \{\mathcal{T}_{5 \rightarrow 1}\}$$

On note

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{éq}}\}_{C_5} = \begin{Bmatrix} X \vec{x} + Y \vec{y} + Z \vec{z} \\ L \vec{x} + M \vec{y} + N \vec{z} \end{Bmatrix}$$

les éléments de réduction au point C_5 du torseur d'actions mécaniques transmissibles de la liaison équivalente et avec

— pour la liaison sphère-plan

$$\forall M \in (C_5, \vec{z}), \quad \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 5}\}_M = \begin{Bmatrix} Z_{05} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

— pour la liaison pivot

$$\{\mathcal{T}_{5 \rightarrow 1}\}_{C_5} = \begin{Bmatrix} X_{51} \vec{x} + Y_{51} \vec{y} + Z_{51} \vec{z} \\ L_{51} \vec{x} + N_{51} \vec{z} \end{Bmatrix}$$

il vient les équations de compatibilité :

$$\begin{aligned} / \vec{x} : X &= 0 = X_{51} \\ / \vec{y} : Y &= 0 = Y_{51} \\ / \vec{z} : Z &= Z_{05} = Z_{51} \\ / (C_5, \vec{x}) : L &= 0 = L_{51} \\ / (C_5, \vec{y}) : M &= 0 = 0 \\ / (C_5, \vec{z}) : N &= 0 = N_{51} \end{aligned}$$

Des lignes (1), (2), (4), (5) et (6), on tire immédiatement :

$$\boxed{X = Y = 0 \text{ N}} \quad \text{et} \quad \boxed{L = M = N = 0 \text{ N}\cdot\text{m}}$$

d'où

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{éq}}\}_{C_5} = \begin{Bmatrix} Z \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

Seule la composante Z peut être non nulle donc le seul mouvement bloqué est une translation dans la direction \vec{z} . Avec $\dim(\mathcal{T}_{01}) = 1$ action mécanique transmissible, on identifie le torseur d'actions mécaniques transmissibles caractéristique d'une liaison sphère-plan de normale (C_5, \vec{z}) . On note de plus avec le « $0 = 0$ » de la ligne (5), que l'association série possède une mobilité interne autour de l'axe (C_5, \vec{y}) .

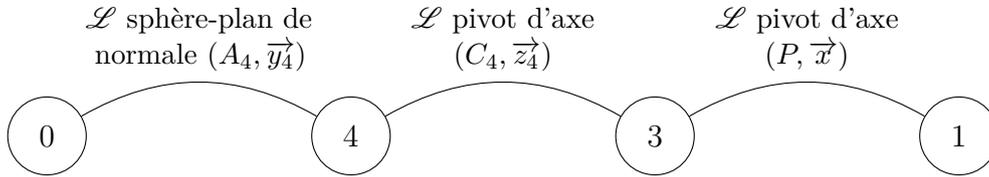
Avec les deux approches, on identifie donc que la liaison équivalente aux deux liaisons en série \mathcal{L}_{05} et \mathcal{L}_{51} est une liaison sphère-plan de normale $(C_5, \vec{z}) = (A_5C_5)$.

Par le changement de variables

$$\square_5 \rightarrow \square_7, \quad (\vec{y}, \vec{z}) \rightarrow (-\vec{z}_7, \vec{y}_7)$$

on en déduit que la liaison équivalente aux deux liaisons en série \mathcal{L}_{07} et \mathcal{L}_{71} est une liaison sphère-plan de normale $(C_7, \vec{y}_7) = (A_7C_7)$.

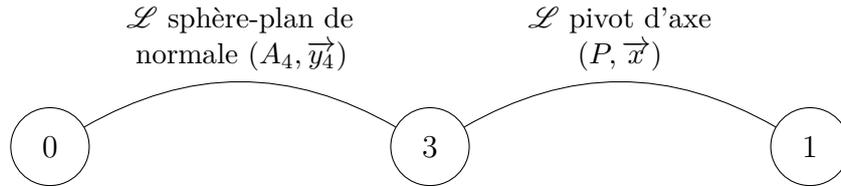
Question 4.3. On cherche la liaison équivalente aux trois liaisons en série



En tenant compte du résultat à la question précédente avec le changement de variables

$$\square_5 \rightarrow \square_4, \quad (\vec{y}, \vec{z}) \rightarrow (-\vec{z}_4, \vec{y}_4)$$

on en déduit que la liaison équivalente aux deux liaisons en série \mathcal{L}_{04} et \mathcal{L}_{43} est une liaison sphère-plan de normale $(C_4, \vec{y}_4) = (A_4C_4)$. Ainsi, on cherche la liaison équivalente aux deux liaisons en série



Par une approche statique, il vient la relation de compatibilité des torseurs d'actions mécaniques transmissibles :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{éq}}\} = \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}\} = \{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 1}\}$$

On note

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{éq}}\} = \left\{ \begin{array}{l} X \vec{x} + Y \vec{y}_4 + Z \vec{z}_4 \\ L \vec{x} + M \vec{y}_4 + N \vec{z}_4 \end{array} \right\}_{C_4}$$

les éléments de réduction au point C_4 du torseur d'actions mécaniques transmissibles de la liaison équivalente et avec

— pour la liaison sphère-plan

$$\forall M \in (C_4, \vec{y}_4), \quad \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}\} = \underset{M}{\left\{ \begin{array}{c} Y_{03} \vec{y}_4 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

— pour la liaison pivot

$$\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 1}\} = \underset{P}{\left\{ \begin{array}{c} X_{31} \vec{x} + Y_{31} \vec{y}_4 + Z_{31} \vec{z}_4 \\ M_{31} \vec{y}_4 + N_{31} \vec{z}_4 \end{array} \right\}}$$

avec, par changement de point :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{C_4,3 \rightarrow 1}} &= \overrightarrow{M_{P,3 \rightarrow 1}} + \overrightarrow{F_{3 \rightarrow 1}} \wedge \overrightarrow{PC_4} \\ &= M_{31} \vec{y}_4 + N_{31} \vec{z}_4 + (X_{31} \vec{x} + Y_{31} \vec{y}_4 + Z_{31} \vec{z}_4) \wedge -Z_p \vec{z}_4 \\ &= -Z_p Y_{31} \vec{x} + (M_{31} + Z_p X_{31}) \vec{y}_4 + N_{31} \vec{z}_4 \end{aligned}$$

il vient les équations de compatibilité :

$$\begin{aligned} / \vec{x} : X &= 0 = X_{31} \\ / \vec{y}_4 : Y &= Y_{03} = Y_{31} \\ / \vec{z}_4 : Z &= 0 = Z_{31} \\ / (C_4, \vec{x}) : L &= 0 = -Z_p Y_{31} \\ / (C_4, \vec{y}_4) : M &= 0 = M_{31} + Z_p X_{31} \\ / (C_4, \vec{z}_4) : N &= 0 = N_{51} \end{aligned}$$

Des lignes (1), (3), (4), (5) et (6), on tire immédiatement :

$$\boxed{X = Z = 0 \text{ N}} \quad \text{et} \quad \boxed{L = M = N = 0 \text{ N}\cdot\text{m}}$$

Sachant $Z_p \neq 0$, on tire de plus de la ligne (4)

$$Y_{31} = 0 \implies \boxed{Y = 0 \text{ N}}$$

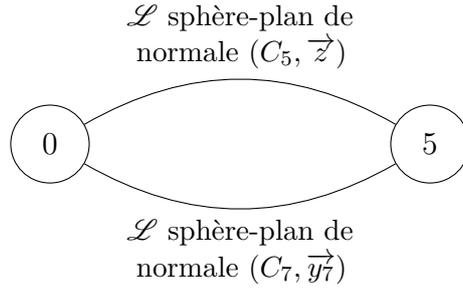
d'où

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{éq}}\} = \{0\}}$$

qui signifie qu'aucune mobilité est bloquée et que l'association série des liaisons \mathcal{L}_{04} , \mathcal{L}_{43} et \mathcal{L}_{31} possède six degrés de liberté (ce n'est pas une liaison). Cette association n'entre donc pas en compte dans la détermination globale de la liaison équivalente entre le rail **0** et le chariot **1**.

En tenant compte du ressort K_y , ce sous-ensemble permet de maintenir le contact des galets **5** et **7** sur le rail **0**.

Question 4.4. En tenant compte des résultats aux questions précédentes, il vient le graphe de structure simplifié :



On cherche une liaison équivalente à ces deux liaisons en parallèle. Par une approche statique, il vient :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{éq}}\} = \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{①}}\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{②}}\}$$

avec

$$\forall M \in (C_5, \vec{z}), \quad \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{①}}\} = \underset{M}{\left\{ \begin{array}{c} Z_1 \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

et

$$\forall M \in (C_7, \vec{y}_7), \quad \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{②}}\} = \underset{M}{\left\{ \begin{array}{c} Y_2 \vec{y}_7 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

En particulier, il vient à l'intersection des axes centraux des deux torseurs d'actions mécaniques transmissibles, noté

$$O = (C_5, \vec{z}) \cap (C_7, \vec{y}_7)$$

le torseur d'actions mécaniques transmissibles de la liaison équivalente :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{éq}}\} = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{c} Y_2 \vec{y}_7 + Z_1 \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

Sachant $\vec{y}_7 \wedge \vec{z} \neq \vec{0}$ alors (\vec{z}, \vec{y}_7) constitue une base du plan de normale \vec{x} d'où $\dim(\mathcal{T}_{01}^{\text{éq}}) = 2$. On identifie alors le torseur d'actions mécaniques transmissibles caractéristique d'une liaison sphère-cylindre de centre O et d'axe (O, \vec{x}) .

Question 4.5. Avec deux modules gauche, c'est-à-dire deux liaisons sphère-cylindre en parallèle, coaxiales et de centres O_1 et O_2 avec $O_1 O_2 = \ell \vec{x}$, il vient par une approche statique :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{éq}}\} = \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{①}}\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{②}}\}$$

avec

$$\forall k \in \{1, 2\}, \quad \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{①}}\} = \underset{O_k}{\left\{ \begin{array}{c} Y_k \vec{y} + Z_k \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

avec, par changement de point :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O_1, 0 \rightarrow 1}^{\text{②}}} &= \overrightarrow{M_{O_2, 0 \rightarrow 1}^{\text{②}}} + \overrightarrow{F_{0 \rightarrow 1}^{\text{②}}} \wedge \overrightarrow{O_2 O_1} \\ &= (Y_2 \vec{y} + Z_2 \vec{z}) \wedge -\ell \vec{x} \\ &= \ell (Y_2 \vec{z} - Z_2 \vec{y}) \end{aligned}$$

d'où, par somme :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{éq}}\} = {}_{O_1} \left\{ \begin{array}{l} (Y_1 + Y_2) \vec{y} + (Z_1 + Z_2) \vec{z} \\ \ell(Y_2 \vec{z} - Z_2 \vec{y}) \end{array} \right\}$$

En notant

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\text{éq}}\} = {}_{C_5} \left\{ \begin{array}{l} X \vec{x} + Y \vec{y} + Z \vec{z} \\ L \vec{x} + M \vec{y} + N \vec{z} \end{array} \right\}$$

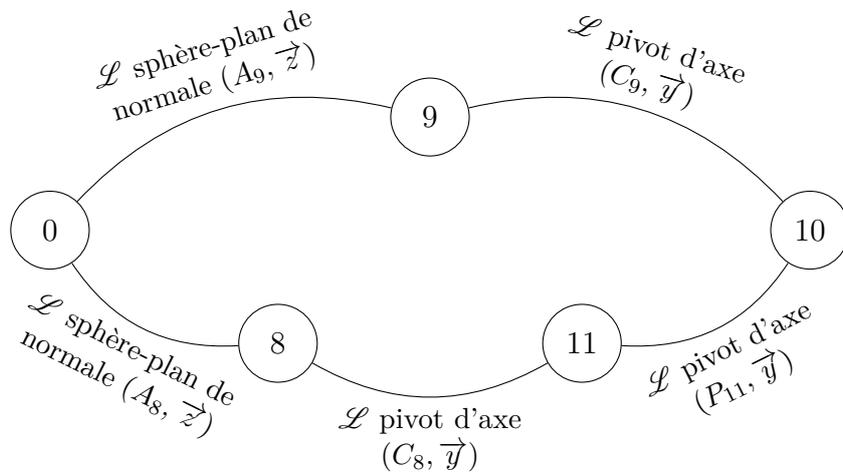
les éléments de réduction au point O_1 du torseur d'actions mécaniques transmissibles de la liaison équivalente, il vient le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} Y \\ Z \\ M \\ N \\ X \\ L \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

où l'on voit clairement que $\text{rang}(A) = 4$ et donc que l'on a $\dim(\mathcal{T}_{01}^{\text{éq}}) = 4$ actions mécaniques transmissibles. Avec deux mobilités qui sont la translation de direction \vec{x} et la rotation autour de l'axe (O, \vec{x}) , il vient que l'on identifie le torseur d'actions mécaniques transmissibles caractéristique d'une liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{x}) . La liaison globale réalisée par les deux chariots constituant le module X gauche de la liaison glissière est donc une liaison pivot glissant.

4.2 Liaison équivalente du module X droit

Question 4.6. Avec la description donnée, il vient le graphe de structure :



Question 4.7. Dans un premier temps, on cherche la liaison équivalente aux trois liaisons en série \mathcal{L}_{0-8} , \mathcal{L}_{8-11} et \mathcal{L}_{11-10} . Par une approche statique, il vient les conditions de compatibilité sur les torseurs d'actions mécaniques transmissibles :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 10}^{\text{éq}}\} = \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 8}\} = \{\mathcal{T}_{8 \rightarrow 11}\} = \{\mathcal{T}_{11 \rightarrow 10}\}$$

Sachant

$$\dim(\mathcal{T}_{0-8}) = 1 \implies 0 \leq \dim(\mathcal{T}_{0-8} \cap \mathcal{T}_{8-11}) \leq 1$$

et que la seule mobilité de la liaison pivot \mathcal{L}_{8-11} est autour de l'axe (C_8, \vec{z}) , confondu avec la normale de la liaison sphère-plan, il vient :

$$\dim(\mathcal{T}_{0-8} \cap \mathcal{T}_{8-11}) = 1 \quad \text{tel que} \quad \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\text{éq}}\} = \left\{ \begin{array}{c} Z_{011} \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{C_8}$$

On pose de plus pour la liaison pivot d'axe (P_{11}, \vec{y})

$$\{\mathcal{T}_{11 \rightarrow 10}\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{11} \vec{x} + Y_{11} \vec{y} + Z_{11} \vec{z} \\ L_{11} \vec{x} + N_{11} \vec{z} \end{array} \right\}_{P_{11}}$$

Par changement de point, il vient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{C_8, 11 \rightarrow 10}} &= \overrightarrow{M_{P_{11}, 11 \rightarrow 10}} + \overrightarrow{F_{11 \rightarrow 10}} \wedge \overrightarrow{P_{11}C_8} \\ &= L_{11} \vec{x} + N_{11} \vec{z} + (X_{11} \vec{x} + Y_{11} \vec{y} + Z_{11} \vec{z}) \wedge (X_{P_{11}} \vec{x} - Z_{P_{11}} \vec{z}) \\ &= (L_{11} - Z_{P_{11}} Y_{11}) \vec{x} + (X_{P_{11}} Z_{11} - Z_{P_{11}} X_{11}) \vec{y} + (N_{11} - X_{P_{11}} Y_{11}) \vec{z} \end{aligned}$$

il vient les équations de compatibilité :

$$\begin{aligned} / \vec{x} : X &= 0 = X_{11} \\ / \vec{y} : Y &= 0 = Y_{11} \\ / \vec{z} : Z &= Z_{011} = Z_{11} \\ / (C_8, \vec{x}) : L &= 0 = L_{11} - Z_{P_{11}} Y_{11} \\ / (C_8, \vec{y}) : M &= 0 = X_{P_{11}} Z_{11} - Z_{P_{11}} X_{11} \\ / (C_8, \vec{z}) : N &= 0 = N_{11} - X_{P_{11}} Y_{11} \end{aligned}$$

Des lignes (1), (2), (4), (5) et (6), on tire immédiatement :

$$\boxed{X = Y = 0 \text{ N}} \quad \text{et} \quad \boxed{L = M = N = 0 \text{ N}\cdot\text{m}}$$

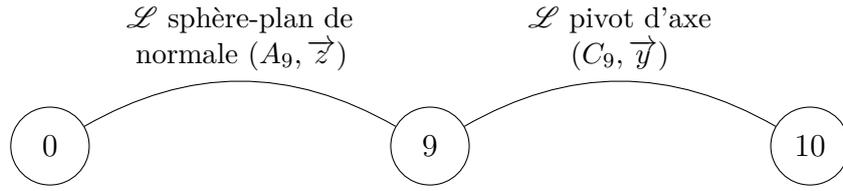
Sachant $X_{P_{11}} \neq 0$, on tire de plus de la ligne (5)

$$Z_{11} = 0 \implies \boxed{Z = 0 \text{ N}}$$

d'où

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 10}^{\text{éq}}\} = \{0\}}$$

qui signifie qu'aucune mobilité est bloquée et que l'association série des liaisons \mathcal{L}_{0-8} , \mathcal{L}_{8-11} et \mathcal{L}_{11-10} possède six degrés de liberté (ce n'est pas une liaison). Cette association n'entre donc pas en compte dans la détermination globale de la liaison équivalente entre le rail **0** et le chariot **10**. Il ne reste donc que :



Par une approche statique, il vient la relation de compatibilité des torseurs d'actions mécaniques transmissibles s'écrit :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 10}^{\text{éq}}\} = \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 9}\} = \{\mathcal{T}_{9 \rightarrow 10}\}$$

On note

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 10}^{\text{éq}}\} = \left\{ \begin{array}{c} X \vec{x} + Y \vec{y} + Z \vec{z} \\ L \vec{x} + M \vec{y} + N \vec{z} \end{array} \right\}_{C_9}$$

les éléments de réduction au point C_9 du torseur d'actions mécaniques transmissibles de la liaison équivalente et avec

— pour la liaison sphère-plan

$$\forall M \in (C_9, \vec{z}), \quad \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 9}\} = \left\{ \begin{array}{c} Z_{09} \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M$$

— pour la liaison pivot

$$\{\mathcal{T}_{9 \rightarrow 10}\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{910} \vec{x} + Y_{910} \vec{y} + Z_{910} \vec{z} \\ L_{910} \vec{x} + N_{910} \vec{z} \end{array} \right\}_{C_9}$$

il vient les équations de compatibilité :

$$\begin{aligned} / \vec{x} : X &= 0 = X_{910} \\ / \vec{y} : Y &= 0 = Y_{910} \\ / \vec{z} : Z &= Z_{09} = Z_{910} \\ / (C_9, \vec{x}) : L &= 0 = L_{910} \\ / (C_9, \vec{y}) : M &= 0 = 0 \\ / (C_9, \vec{z}) : N &= 0 = N_{910} \end{aligned}$$

Des lignes (1), (2), (4), (5) et (6), on tire immédiatement :

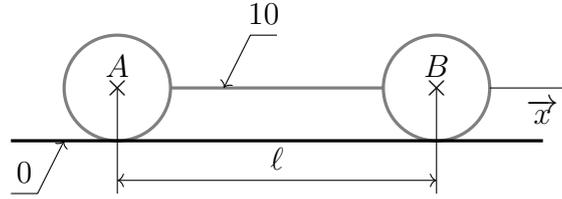
$$\boxed{X = Y = 0 \text{ N}} \quad \text{et} \quad \boxed{L = M = N = 0 \text{ N}\cdot\text{m}}$$

d'où

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 10}^{\text{éq}}\} = \left\{ \begin{array}{c} Z \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{C_9}}$$

Seule la composante Z peut être non nulle donc le seul mouvement bloqué est une translation dans la direction \vec{z} . Avec $\dim(\mathcal{T}_{0-10}) = 1$ action mécanique transmissible, on identifie le torseur d'actions mécaniques transmissibles caractéristique d'une liaison sphère-plan de normale (C_9, \vec{z}) . On note de plus avec le « 0 = 0 » de la ligne (5), que l'association série possède une mobilité interne autour de l'axe (C_9, \vec{y}) .

Question 4.8. En tenant compte des chariots avant et arrière constituant le module X droit, il vient le schéma cinématique :



tel que l'on ait le torseur d'actions mécaniques transmissibles par la liaison équivalente globale :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 10}^{\text{éq}}\} = \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 10}^{\text{A}}\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 10}^{\text{B}}\}$$

Avec

$$\forall k \in \{A, B\}, \quad \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 10}^{\text{k}}\} = \begin{Bmatrix} Z_k \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_k$$

et par changement de point

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M}_{A,0 \rightarrow 10}^{\text{B}} &= \overrightarrow{M}_{B, \rightarrow 10}^{\text{B}} + \overrightarrow{F}_{0 \rightarrow 10}^{\text{B}} \wedge \overrightarrow{BA} \\ &= Z_B \vec{z} \wedge -\ell \vec{x} \\ &= -\ell Z_B \vec{y} \end{aligned}$$

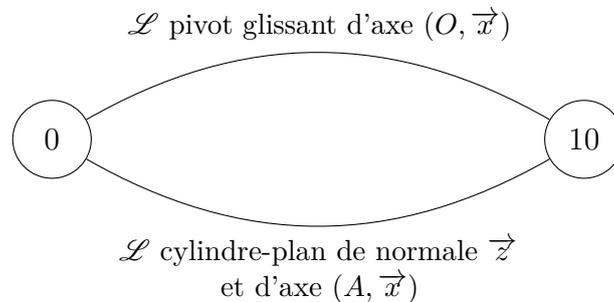
il vient , par somme au point A :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 10}^{\text{éq}}\} = \begin{Bmatrix} (Z_A + Z_B) \vec{z} \\ -\ell Z_B \vec{y} \end{Bmatrix}_A$$

avec $\dim(\mathcal{T}_{0-10}) = 2$, on identifie le torseur d'actions mécaniques transmissibles caractéristique d'une liaison cylindre-plan de normale \vec{z} et d'axe $(AB) = (A, \vec{x})$.

4.3 Liaison équivalente complète de la glissière X

Question 4.9. En tenant compte des études précédentes, il vient le graphe de structure :



Par une approche statique avec les deux liaisons en parallèle et avec :

— pour la liaison pivot glissant

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{1}}\} = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{l} Y_O \vec{y} + Z_O \vec{z} \\ M_O \vec{y} + N_O \vec{z} \end{array} \right\}}$$

— pour la liaison cylindre-plan

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{2}}\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} Z_A \vec{z} \\ M_A \vec{y} \end{array} \right\}}$$

avec, par changement de point :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow 1}^{\textcircled{2}}} &= \overrightarrow{M_{A,0 \rightarrow 1}^{\textcircled{2}}} + \overrightarrow{F_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{2}}} \wedge \overrightarrow{AO} \\ &= M_A \vec{y} + Z_A \vec{z} \wedge \ell \vec{y} \\ &= -\ell Z_A \vec{x} + M_A \vec{y} \end{aligned}$$

d'où, par somme :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{\text{éq}}}\} = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{l} Y_O \vec{y} + (Z_O + Z_A) \vec{z} \\ -\ell Z_A \vec{x} + (M_O + M_A) \vec{y} + N_O \vec{z} \end{array} \right\}}$$

Avec $\dim(\mathcal{T}_{01}^{\textcircled{\text{éq}}}) = 5$ et un seul degré de liberté en translation dans la direction \vec{x} , il vient que le torseur d'actions mécaniques transmissibles est caractéristique d'une liaison glissière de direction \vec{x} .

Question 4.10. Sachant que pour des liaisons en parallèle, on a que le degré d'hyperstatisme est défini par :

$$h = \sum_{k=1}^2 \dim(\mathcal{T}_{01}^{\textcircled{k}}) - \dim(\mathcal{T}_{01}^{\textcircled{\text{éq}}}) = 4 + 2 - 5 = 1$$

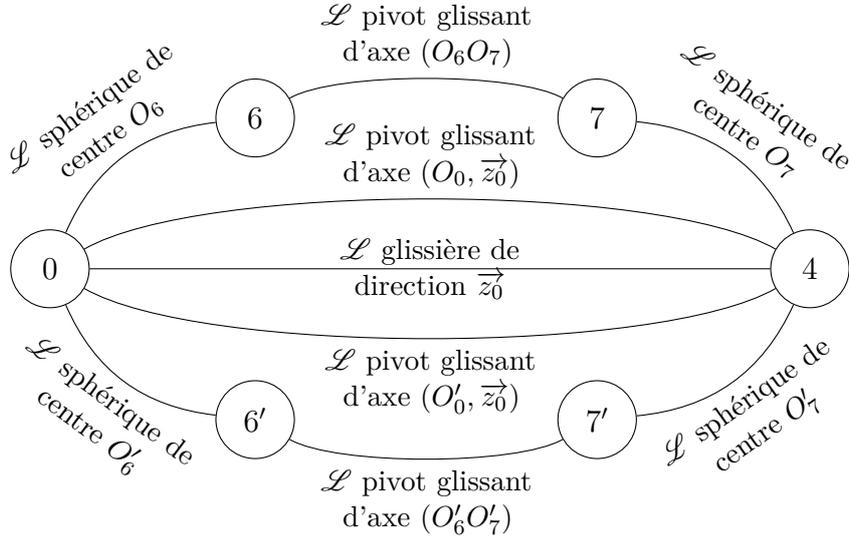
on obtient que l'association parallèle est hyperstatique de degré 1, visible avec le couple $M_O + M_A$ pour la contrainte bloquant la rotation deux fois autour de l'axe (O, \vec{y}) .

Pour rendre l'association isostatique, il faudrait supprimer un des deux modules X droit tel que la liaison équivalente à droite soit une simple liaison sphère-plan qui, associée à une liaison pivot glissant, permettrait de réaliser une liaison glissière avec

$$\sum_{k=1}^2 \dim(\mathcal{T}_{01}^{\textcircled{k}}) = 4 + 1 = 5.$$

Fouloir d'un mélangeur à rotors engrenants

Question 5.1. Avec la description donnée, il vient le graphe de structure :



Avec $L = 9$ liaisons et $S = 6$ classes d'équivalence, on a $\boxed{\gamma = L - S + 1 = 4}$ cycles.

Question 5.2. D'après la fonction du mécanisme, on identifie une mobilité utile $\boxed{m_u = 1}$ associée à la translation dans la direction \vec{z}_0 . De plus, chaque ensemble associé aux vérins possède 2 degrés de mobilité interne en rotation autour des axes (O_6O_7) et $(O'_6O'_7)$. Par somme, on en déduit $\boxed{m_i = 4}$ d'où $\boxed{m = m_u + m_i = 5}$.

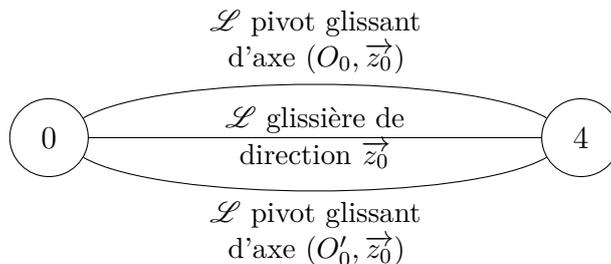
Question 5.3. Avec la relation de théorie des mécanismes

$$h - m = E_c - I_c \iff h = m + E_c - I_c$$

et $E_c = 6\gamma = 24$ et $I_c = 4 \times 3 + 4 \times 2 + 1 = 21$ avec 3 degrés de liberté par liaison sphérique, 2 par liaison pivot glissant et une pour la glissière, il vient :

$$\boxed{h = 8}$$

Question 5.4. En ne considérant que les solides **0** et **4**, il vient le graphe de structure :



qui ne possède que $\boxed{\gamma = 2}$ cycles avec $E_C = 6\gamma = 12$ et $I_c = 2 \times 2 + 1 = 5$. Par une approche cinématique, on en déduit que la liaison équivalente aux 3 liaisons en série doit vérifier les relations de compatibilité :

$$\{\mathcal{V}_{4/0}^{\text{éq}}\} = \{\mathcal{V}_{4/0}^{\text{①}}\} = \{\mathcal{V}_{4/0}^{\text{②}}\} = \{\mathcal{V}_{4/0}^{\text{③}}\}$$

avec

— pour la liaison pivot glissant d'axe $(O_0 \vec{z}_0)$:

$$\forall M \in (O_0, \vec{z}_0), \{\mathcal{V}_{4/0}^{\text{①}}\} = \underset{M}{\left\{ \begin{array}{l} r_1 \vec{z}_0 \\ w_1 \vec{z}_0 \end{array} \right\}}$$

— pour la liaison pivot d'axe $(O'_0 \vec{z}_0)$:

$$\forall M \in (O'_0, \vec{z}_0), \{\mathcal{V}_{4/0}^{\text{②}}\} = \underset{M}{\left\{ \begin{array}{l} r_2 \vec{z}_0 \\ w_2 \vec{z}_0 \end{array} \right\}}$$

— pour la liaison glissière de direction \vec{z}_0 :

$$\forall M, \{\mathcal{V}_{4/0}^{\text{③}}\} = \underset{M}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ w_3 \vec{z}_0 \end{array} \right\}}$$

Avec $\overrightarrow{O'_0 O_0} = \ell \vec{x}_0$, il vient par changement de point :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{O_0,4/0}^{\text{②}}} &= \overrightarrow{V_{O'_0,4/0}^{\text{②}}} + \overrightarrow{\Omega_{4/0}^{\text{②}}} \wedge \overrightarrow{O'_0 O_0} \\ &= w_2 \vec{z}_0 + r_2 \vec{z}_0 \wedge \ell \vec{x}_0 \\ &= \ell r_2 \vec{y}_0 + w_2 \vec{z}_0 \end{aligned}$$

En notant

$$\{\mathcal{V}_{4/0}^{\text{éq}}\} = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{l} p \vec{x}_0 + q \vec{y}_0 + r \vec{z}_0 \\ u \vec{x}_0 + v \vec{y}_0 + w \vec{z}_0 \end{array} \right\}}$$

les éléments de réduction au point O_0 du torseur cinématique de la liaison équivalente, il vient les équations de compatibilité :

$$\begin{aligned} / \vec{x}_0 : & p = 0 = 0 = 0 \\ / \vec{y}_0 : & q = 0 = 0 = 0 \\ / \vec{z}_0 : & r = r_1 = r_2 = 0 \\ / (O_0, \vec{x}_0) : & u = 0 = 0 = 0 \\ / (O_0, \vec{y}_0) : & v = 0 = \ell r_2 = 0 \\ / (O_0, \vec{z}_0) : & w = w_1 = w_2 = w_3 \end{aligned}$$

Des lignes (1) à (5), on tire immédiatement :

$$\boxed{p = q = r = 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}} \quad \text{et} \quad \boxed{u = v = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Seule la composante w peut être non nulle donc le seul mouvement qui n'est pas bloqué est une translation dans la direction \vec{z} . Avec $m_u = \dim(\mathcal{V}_{04}^{\text{éq}}) = 1$ mobilité utile, on identifie le torseur cinématique caractéristique d'une liaison glissière de direction \vec{z} .

Question 5.5. D'après les équations de compatibilité établies à la question précédente, on identifie 7 équations du type « $0 = 0$ » et deux équations liées sachant $\ell \neq 0$ (lignes 3 et 5). Par somme, on en déduit donc $\boxed{h = 8}$.

Une autre façon de retrouver ce résultat est de partir de la définition du degré d'hyperstatisme à partir des dimensions des sous-espaces vectoriels engendrés par les torseurs d'actions mécaniques transmissibles et d'exploiter la dualité telle que

$$h = \sum_{k=1}^3 \dim(\mathcal{T}_{04}^{\otimes k}) - \dim(\mathcal{T}_{04}^{\text{éq}}) = \sum_{k=1}^3 [6 - \dim(\mathcal{V}_{04}^{\otimes k})] - [6 - \dim(\mathcal{V}_{04}^{\text{éq}})] = 13 - 5 = 8$$

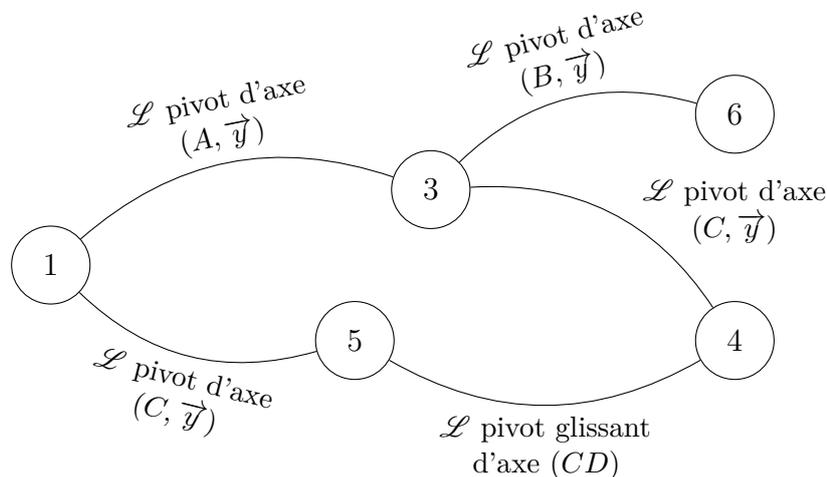
Enfin, avec la formule de théorie de mécanisme, sachant $E_C = 12$, $I_C = 5$, $m_u = 1$ (translation dans la direction \vec{z}) et $m_i = 0$ d'où $m = m_u + m_i = 1$, il vient :

$$h = m + E_c - I_c = 1 + 12 - 5 = 8$$

Ce sont les deux liaisons pivot glissant d'axes parallèles qui, ajoutées à la liaison glissière, induisent ce degré d'hyperstatisme ($8 = 2 \times 4$, elles ne sont pas nécessaires). Comme le degré d'hyperstatisme ne dépend pas des vérins (cf. question 5.3), le montage des vérins sur la structure formée des solides **0** et **4** peut se faire sans contrainte particulière.

Train d'atterrissage d'hélicoptère

Question 6.1. Avec la description donnée, il vient le graphe de structure :



qui possède $\boxed{\gamma = 1}$ cycle.

Question 6.2. Dans le cycle 1 – 3 – 4 – 5, on relève une mobilité utile associée à la loi entrée-sortie d'amortissement. Il n'y a pas de mobilité interne. On peut ajouter la mobilité en rotation (libre) de la roue **6**. D'où, par somme, $\boxed{m = m_u = 2}$ et $m_i = 0$.

Question 6.3. D'après la formule générale de théorie des mécanismes, on a :

$$h - m = E_C - I_C \iff h = m + E_c - I_c$$

et $E_C = 6\gamma = 6$ et $I_c = 4 \times 1 + 1 \times 2 = 6$ avec 1 degré de liberté par liaison pivot et 2 pour la liaison pivot glissant, il vient :

$$\boxed{h = 2}$$

qui signifie que le modèle est hyperstatique.

Question 6.4. Pour libérer cette hyperstaticité, il est nécessaire d'ajouter deux degrés de liberté :

- soit en modifiant une liaison pour lui ajouter 2 degrés de liberté (sans mobilité interne) ;
- soit en modifiant ici deux liaisons avec 2 ajouts de mobilité, là encore sans ajout de mobilité interne.

Ainsi, il est possible de changer la liaison pivot entre **1** et **3** par une liaison sphérique de centre A . Il n'est pas possible d'envisager cela en C ou en D car on aurait alors une mobilité interne autour de (CD) .

Une autre solution est de commuer la liaison pivot glissant entre **4** et **5** par une liaison sphère-cylindre de centre $E \in (CD)$, mais distinct de C et D , et d'axe (CD) .