

Sommes et produits

Exercice 1 (★). Soit $n \geq 5$ un entier et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Écrire les sommes suivantes à l'aide d'un symbole $\sum$.

1. $\frac{1^2}{e^2} + \frac{2^2}{e^3} + \dots + \frac{n^2}{e^{n+1}}$
2. $1 - a + a^2 - a^3 + \dots + a^{2n} - a^{2n+1}$
3. $a^n b + \frac{a^{n-1} b^2}{2} + \dots + \frac{a b^n}{n} + \frac{b^{n+1}}{n+1}$

Résultat attendu :

$$1. \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{e^{k+1}} \quad 2. \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a^k \text{ ou } \sum_{k=0}^n (a^{2k} - a^{2k+1}) \quad 3. \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a^{n-k+1} b^k}{k} \text{ ou } \sum_{k=0}^n \frac{a^{n-k} b^{k+1}}{k+1}$$

Exercice 2 (★). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies ? Pourquoi ?

1. $\sum_{k=1}^n (\alpha + a_k) = \alpha + \sum_{i=1}^n a_i$
2. $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{j=1}^n b_j$
3. $\sum_{k=1}^n \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^n a_k$
4. $\sum_{k=1}^n a_k^\alpha = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^\alpha$
5. $\sum_{k=1}^n a_k b_k = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)$

Résultat attendu :

1. Fausse (contre-exemple)
2. Vraie (linéarité)
3. Vraie (linéarité)
4. Fausse (contre-exemple)
5. Fausse (contre-exemple)

Pour les contre-exemples, partir du cas $n = 2$ permet de simplifier les expressions.

Exercice 3 (★). Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes (on donnera le résultat sous forme factorisée) :

1. $\sum_{\ell=0}^{3n} 2(\ell - 1)$
2. $\sum_{k=1}^n (3k + n - 1)$
3. $\sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n} \right)$
4. $\sum_{k=2}^n k(1 - k)$

Résultat attendu :

1. $(3n+1)(3n-2)$
2. $\frac{n(5n+1)}{2}$
3. $\frac{n+1}{2}$
4. $\frac{n(n+1)(1-n)}{3}$

Exercice 4 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme $\sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k+2}{k} \right)$.

Résultat attendu : C'est égal à $\sum_{k=1}^n (\ln(k+2) - \ln(k))$.

Ensuite, soit on adapte la démonstration du télescopage (avec un changement d'indice en $i = k + 2$), soit on constate que $\ln(k+2) - \ln(k) = (\ln(k+2) - \ln(k+1)) + (\ln(k+1) - \ln(k))$, ce qui permet de se ramener à la formule de télescopage classique. L'expression finale vaut $\ln(n+2) + \ln(n+1) - \ln(2) - \ln(1) = \ln \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)$.

Exercice 5 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n^2} \frac{1}{2^k}$
2. $\sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{3} \right)^{k+1}$
3. $\sum_{k=1}^n \frac{6}{2^k}$
4. $\sum_{k=1}^{n-1} x^k$

Résultat attendu :

1. $2 - \frac{1}{2^{n^2}}$
2. $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^{n+1}$
3. $6 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$
4. $n - 1$ si $x = 1$, $\frac{x - x^n}{1 - x}$ sinon

Exercice 6 (★★). Soit $n \geq 2$ un entier et y un réel. Calculer les sommes suivantes.

1. $\sum_{p=2}^{n^2} (3p + 2^{p+1})$
2. $\sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k}$
3. $\sum_{j=0}^n ((j+2)^3 - j^3)$
4. $\sum_{k=2}^{n+2} \frac{(1-y)^{k+1}}{2^{k-1}}$

Résultat attendu :

1. $\frac{3}{2} n^2 (n^2 + 1) - 11 + 2^{n^2+2}$
2. $3^{n+1} - 2^{n+1}$
3. $2n^3 + 9n^2 + 15n + 8$
4. $4(n+1)$ si $y = -1$, $4 \frac{1-y}{1+y} \left(\left(\frac{1-y}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-y}{2} \right)^{n+3} \right)$ sinon

Exercice 7 (★★). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$.

En calculant $T_n = \sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3)$ de deux façons différentes, retrouver la formule $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Résultat attendu : L'un des calculs se fait par télescopage et donne $T_n = n^3 + 3n^2 + 3n$, l'autre par linéarité après avoir développé l'intérieur de la somme et donne $T_n = 3S_n + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$.

Exercice 8 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes $\sum_{k=1}^n (k \times k!)$ et $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$.

Indication : $k = k+1 - 1$.

Résultat attendu : Dans les deux cas, on utilise l'indication pour faire apparaître un télescopage. On trouve :

$$\sum_{k=1}^n (k \times k!) = \sum_{k=1}^n ((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1 \text{ et de même } \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Exercice 9 (★★★). Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la suite u définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + b^{n+1}$. Déterminer une expression explicite du terme général de cette suite.

Résultat attendu : On commence par conjecturer une expression, qu'on montre ensuite par récurrence.

Si $b \neq 2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n \times a + \frac{b \times 2^n - b^{n+1}}{2 - b}$. Si $b = 2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n(a + n)$.

Exercice 10 (★). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes à double indice suivantes :

$$1. \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i + j) \quad 2. \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i + j)$$

Résultat attendu :

$$1. n^2(n+1) \quad 2. \frac{n(n+1)(n-1)}{2}$$

Exercice 11 (★★). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes à double indice suivantes :

$$1. \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} \frac{i}{k+1} \quad 2. \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$$

Résultat attendu :

$$1. \frac{n(n+1)}{4} \quad 2. \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 12 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\alpha \in \mathbb{R}$. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies ? Pourquoi ?

$$1. \prod_{k=1}^n (\alpha a_k) = \alpha \prod_{k=1}^n a_k \quad 2. \prod_{k=1}^n (a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \left(\prod_{k=1}^n b_k \right) \quad 3. \prod_{k=1}^n (a_k + b_k) = \prod_{k=1}^n a_k + \prod_{k=1}^n b_k$$

Résultat attendu :

1. Fausse (contre-exemple) 2. Vraie (l'ordre n'importe pas) 3. Fausse (contre-exemple)

Exercice 13 (★). On considère la suite définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} u_n$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{(2n-2)!}{(2^{n-1}(n-1)!)^2}.$$

Résultat attendu : On le montre par récurrence.

Exercice 14 (★★). Calculer les produits suivants.

$$1. \prod_{k=1}^n (k+n) \quad 2. \prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k-1} \quad 3. \prod_{p=2}^n \left(1 - \frac{1}{p^2} \right)$$

Résultat attendu :

$$1. \frac{(2n)!}{n!} \quad 2. 2n+1 \quad 3. \frac{n+1}{2n}$$

Exercice 15 (★★). Soit n un entier naturel. Calculer le produit $\prod_{1 \leq i, j \leq n} ij$.

Résultat attendu : Adapter les techniques de sommes doubles donne $\prod_{1 \leq i, j \leq n} ij = (n!)^{2n}$.

Exercice 16 (★★★). Démontrer par récurrence que pour tout entier n non nul :

$$\prod_{k=1}^n (2k)! \geq ((n+1)!)^n.$$

Résultat attendu : L'hérédité se montre à partir de l'hypothèse de récurrence, en effectuant des produits d'inégalités à termes positifs.

Exercice 17 (★). Calculer :

$$1. \binom{9}{4} \quad 2. \binom{10}{3} \quad 3. \binom{10}{6} \quad 4. \binom{9}{3}$$

Résultat attendu :

$$1. 126 \quad 2. 120 \quad 3. 210 \quad 4. 84$$

Exercice 18 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $B_n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 2^p$.

Résultat attendu : $A_n = 2^n$ et $B_n = 3^n$ par formule du binôme de Newton.

Exercice 19 (★). Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j \binom{j}{i}$.

Résultat attendu : $\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^n 2^j = 2^{n+1} - 1$ en utilisant la formule du binôme de Newton puis la formule de somme géométrique.

Exercice 20 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $C_n = \sum_{i=2}^{2n} \binom{2n}{i} (-1)^i$ et $D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 3^k x^{n-k}$.

Résultat attendu : $C_n = 2n - 1$ et $D_n = (x+3)^n - 3^n$ par formule du binôme de Newton.

Exercice 21 (Type DS). Soit $n \geq 1$, et f_n la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^k}{n}$.

1. Donner pour tout réel x une expression de $f_n(x)$ sans symbole $\sum$.
2. Dériver f_n sous ces deux formes pour calculer $\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k}$.
3. Retrouver le résultat de la question précédente sans utiliser la fonction f_n , en utilisant les propriétés des coefficients binomiaux.
4. Calculer $\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n} \binom{n}{k}$. On pourra écrire $k^2 = k(k-1) + k$.

Résultat attendu :

1. Par la formule du binôme de Newton, $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{n}(x+1)^n$.
2. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables, et on obtient en dérivant les deux formes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k x^{k-1} = \frac{1}{n} n(x+1)^{n-1}.$$

Pour $x = 1$, on trouve $\sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$, donc $\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$.

3. Pour $k \geq 1$, on a $\sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = 2^{n-1}$, en ayant utilisé le changement d'indice $i = k-1$. Ajouter le terme en $k=0$ donne alors le résultat demandé.

4. D'après l'indication, $\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)}{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)}{n} \binom{n}{k} + 2^{n-1}$.

Or $\sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)}{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=2}^n (n-1) \binom{n-2}{k-2} = (n-1) \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} = (n-1) 2^{n-2}$, où

on a posé le changement d'indice $i = k-2$. D'où $\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n} \binom{n}{k} = 2^{n-2}(n-1+2) = (n+1)2^{n-2}$.

Variante : on pouvait aussi obtenir ce résultat en dérivant une deuxième fois l'égalité de la question 1.