

# Petits systèmes et inégalités

Cours de É. Bouchet – PCSI

25 septembre 2024

## Table des matières

|          |                                                    |          |
|----------|----------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Résolution de petits systèmes linéaires</b>     | <b>2</b> |
| 1.1      | Définitions . . . . .                              | 2        |
| 1.2      | Méthode de résolution . . . . .                    | 2        |
| <b>2</b> | <b>Inégalités réelles</b>                          | <b>4</b> |
| 2.1      | Premières propriétés et règles de calcul . . . . . | 4        |
| 2.2      | Ensembles et inégalités . . . . .                  | 5        |
| 2.3      | Borne supérieure . . . . .                         | 6        |
| <b>3</b> | <b>Valeur absolue</b>                              | <b>6</b> |
| 3.1      | Définition et premières manipulations . . . . .    | 6        |
| 3.2      | Inégalité triangulaire . . . . .                   | 7        |
| <b>4</b> | <b>Partie entière</b>                              | <b>8</b> |

# 1 Résolution de petits systèmes linéaires

## 1.1 Définitions

### Définition 1.1 (Système linéaire)

Soit  $p$  et  $n$  deux entiers naturels non nuls. On appelle **système linéaire** de  $n$  équations à  $p$  inconnues  $x_1, x_2, \dots, x_p$  tout système  $(\mathcal{S})$  pouvant s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

où  $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$  et  $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$  sont des réels fixés.

### Définition 1.2 (Solution d'un système linéaire)

Un  $p$ -uplet de réels  $(c_1, c_2, \dots, c_p)$  est **solution du système**  $(\mathcal{S})$  s'il est solution, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , de la  $i$ -ème équation  $L_i$  du système  $(\mathcal{S})$ .

- **Résoudre** le système  $(\mathcal{S})$  c'est déterminer l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{S})$ .
- Deux systèmes sont **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.

**Remarque.** Interprétation géométrique :

- Un système de  $n$  équations à trois inconnues correspond dans  $\mathbb{R}^3$  à une intersection de  $n$  plans.
- Un système de  $n$  équations à deux inconnues correspond dans  $\mathbb{R}^2$  à une intersection de  $n$  droites.

## 1.2 Méthode de résolution

### Définition 1.3 (Opérations élémentaires)

On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système linéaire  $(\mathcal{S})$  une opération de l'un des trois types suivants :

1. échange de deux lignes  $L_i$  et  $L_j$  avec  $i \neq j$ , codifiée :  $L_i \longleftrightarrow L_j$ .
2. multiplication de la ligne  $L_i$  par un réel non nul  $\alpha$ , codifiée :  $L_i \longleftarrow \alpha L_i$ .
3. addition de la ligne  $L_i$  et d'un multiple réel  $\beta$  de  $L_j$  avec  $i \neq j$ , codifiée :  $L_i \longleftarrow L_i + \beta L_j$ .

**Remarque.** On obtient un système linéaire équivalent à  $(\mathcal{S})$  en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de  $(\mathcal{S})$ . Stratégiquement, le plus intéressant est de se servir d'une ligne pour éliminer une inconnue de toutes les autres, puis de recommencer avec le système linéaire à  $p - 1$  inconnues obtenu.

**Remarque.** On peut aussi résoudre un système par substitution, mais on ne le fera pas dans ce chapitre : c'est en général plus calculatoire et moins efficace.

**Exercice 1.** En utilisant les opérations élémentaires, résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  le système  $\begin{cases} x + 3y = 8 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$ .

Solution : Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 3y = 8 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + 3y = 8 \\ 2x - 2x - 4y - 6y = 6 - 16 \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ &\iff \begin{cases} x + 3y = 8 \\ -10y = -10 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 8 \\ y = 1 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système a donc une unique solution, le couple  $(5, 1)$ .

**Exercice 2.** En utilisant les opérations élémentaires, résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  le système  $\begin{cases} x + 3y + 4z = 8 \\ 2x - 57y + z = 6 \\ -x + 6y - 3z = -1 \end{cases}$ .

Solution : Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 3y + 4z = 8 \\ 2x - 57y + z = 6 \\ -x + 6y - 3z = -1 \end{cases} &\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 4z = 8 \\ -63y - 7z = -10 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ 9y + z = 7 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 4z = 8 \\ 9y + z = \frac{10}{7} & (L_2 \leftarrow -\frac{1}{7}L_2) \\ 9y + z = 7 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 4z = 8 \\ 9y + z = \frac{10}{7} \\ 0 = 7 - \frac{10}{7} & (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \end{cases} \end{aligned}$$

Or  $7 \neq \frac{10}{7}$ , donc le système n'a pas de solution.

**Exercice 3.** En utilisant les opérations élémentaires, résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  le système  $\begin{cases} x + 3y + 4z = 8 \\ 2x - 57y + z = -33 \\ -x + 6y - 3z = -1 \end{cases}$ .

Solution : Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 3y + 4z = 8 \\ 2x - 57y + z = -33 \\ -x + 6y - 3z = -1 \end{cases} &\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 4z = 8 \\ -63y - 7z = -49 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ 9y + z = 7 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 4z = 8 \\ 9y + z = 7 & (L_2 \leftarrow -\frac{1}{7}L_2) \\ 9y + z = 7 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 4z = 8 \\ 9y + z = 7 \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 8 - 4t - \frac{7-t}{3} \\ y = \frac{7-t}{9} \\ z = t \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc le système a une infinité de solutions, les triplets de la forme  $(\frac{17-11t}{3}, \frac{7-t}{9}, t)$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .

Variante : utiliser  $y$  comme paramètre donnait des solutions de la forme  $(-20 + 33t, t, 7 - 9t)$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .

## 2 Inégalités réelles

### 2.1 Premières propriétés et règles de calcul

#### Définition 2.1 (Relation d'ordre)

On dit que la relation  $\leq$  est une **relation d'ordre** sur  $\mathbb{R}$  puisqu'elle vérifie les trois propriétés suivantes :

1. Réflexivité :  $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$ ,
2. Antisymétrie :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x \leq y \\ y \leq x \end{cases} \implies x = y$ ,
3. Transitivité :  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x \leq y \\ y \leq z \end{cases} \implies x \leq z$ .

#### Proposition 2.2 (Opérations usuelles sur les inégalités)

Soit  $(a, b, c, d)$  des réels.

$$\begin{aligned} a \leq b \text{ et } c \leq d &\implies a + c \leq b + d, \\ a \leq b \text{ et } c \geq 0 &\implies ac \leq bc, \quad a \leq b \text{ et } c \leq 0 \implies ac \geq bc, \\ 0 \leq ab &\implies a \text{ et } b \text{ sont de même signe,} \\ 0 \leq a \leq b \text{ et } 0 \leq c \leq d &\implies 0 \leq ac \leq bd, \\ 0 < a \leq b &\implies 0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Admis. □

**Remarque.** Attention, il est interdit de soustraire des inégalités, ou de les diviser, quels que soient les signes concernés. Pour « soustraire », on multiplie la deuxième inégalité par  $-1$  et on somme. Pour « diviser », on passe la deuxième inégalité à l'inverse et on multiplie.

**Exercice 4.** Soit  $x \in [0, 5]$ . Déterminer un encadrement de  $\frac{x+5}{11-2x}$  par deux constantes réelles.

Solution : Au numérateur,  $0 \leq x \leq 5$ , donc  $5 \leq x+5 \leq 10$ . Au dénominateur,  $0 \leq x \leq 5$ , donc  $0 \geq -2x \geq -10$ , donc  $11 \geq 11-2x \geq 1$ . Comme tout est positif, un passage à l'inverse donne :  $\frac{1}{11} \leq \frac{1}{11-2x} \leq 1$ .

Le produit entre les deux inégalités positives et de même sens donne alors :  $\frac{5}{11} \leq \frac{x+5}{11-2x} \leq 10$ .

**Exercice 5.** Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2}$ .

Solution : Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $1 \leq k \leq n$ .

Donc  $0 < n+1 \leq k+n \leq 2n$  et par passage à l'inverse,  $\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2n}$ .

En sommant pour  $k$  entre 1 et  $n$ , on trouve  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n}$ .

Les calculs de somme donnent alors  $\frac{n}{n+1} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \geq \frac{n}{2n}$ , et donc  $1 \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2}$ .

**Exercice 6.** Résoudre l'inéquation  $e^{3x}(e^{-2x} - 5) \leq 0$ , d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

Solution : Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} e^{3x}(e^{-2x} - 5) \leq 0 &\iff e^{-2x} - 5 \leq 0 \text{ puisque } e^{3x} > 0 \\ &\iff e^{-2x} \leq 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow -2x \leq \ln(5) \text{ puisque } \ln \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\Longleftrightarrow x \geq -\frac{\ln(5)}{2}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc  $[-\frac{\ln(5)}{2}, +\infty[$ .

Rmq : la *stricte* croissance est importante ici : la croissance justifie que le sens de l'inégalité ne change pas et le côté « strict » permet de revenir en arrière, ce qui est nécessaire pour raisonner par équivalences.

**Remarque.** On peut aussi manipuler des inégalités strictes, mais c'est souvent plus compliqué. Dans ce cas, il faut étudier à la main les cas d'égalité pour vérifier s'ils peuvent apparaître.

**Exercice 7.** Résoudre l'inéquation  $\frac{\ln(x)}{2-x} < 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{2\}$ .

Solution : Soit  $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{2\}$ , la stricte croissance d'exponentielle sur  $\mathbb{R}$  donne :

$$\frac{\ln(x)}{2-x} < 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \ln(x) < 0 \text{ et } 2-x > 0 \\ \text{ou} \\ \ln(x) > 0 \text{ et } 2-x < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x < 1 \text{ et } 2 > x \\ \text{ou} \\ x > 1 \text{ et } 2 < x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ \text{ou} \\ 2 < x \end{cases} \Longleftrightarrow x \in ]0, 1[ \cup ]2, +\infty[.$$

L'ensemble des solutions est donc  $]0, 1[ \cup ]2, +\infty[$ .

## 2.2 Ensembles et inégalités

### Définition 2.3 (Intervalle)

Soit  $I$  un ensemble de réels. On dit que  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  quand pour tous  $(a, b) \in I^2$  tels que  $a \leq b$ ,  $[a, b] \subset I$ .

**Exemple.**  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}_+$ ,  $[0, 5[$ ,  $]3, 18[$  sont des intervalles de  $\mathbb{R}$ . Par contre,  $\mathbb{R}^*$ ,  $\mathbb{N}$ ,  $[0, 1] \cup [2, 4]$  n'en sont pas.

### Définition 2.4 (Majorant, minorant)

Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ . Un **majorant** (resp. **minorant**) de  $A$  est un élément  $M$  de  $\mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \in A, \quad x \leq M \text{ (resp. } x \geq M \text{)}.$$

### Définition 2.5 (Ensemble majoré, minoré, borné)

Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ . On dit qu'il est **majoré** (resp. **minoré**) s'il admet un majorant (resp. minorant). On dit qu'il est **borné** quand il est à la fois majoré et minoré.

### Définition 2.6 (Maximum, minimum)

Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ . On dit qu'un réel  $M$  est le **maximum** (resp. **minimum**) de  $A$  si  $M \in A$  et

$$\forall x \in A, \quad x \leq M \text{ (resp. } x \geq M \text{)}.$$

**Remarque.** Un ensemble  $A$  ne possède pas nécessairement de majorant ou minorant, et s'ils existent, il ne sont pas uniques. De même,  $A$  n'admet pas nécessairement de maximum ou minimum. Par contre, s'ils existent, ils sont uniques.

**Exemple.**  $\mathbb{R}$  et  $[0, +\infty[$  ne possèdent pas de majorants, ni de maximum. Par contre,  $[0, 5]$  et  $[0, 5[$  possèdent des majorants : 5, 6, 10, ou plus généralement tout réel  $x \geq 5$ . L'ensemble  $[0, 5]$  possède également un maximum : 5, alors que  $[0, 5[$  ne possède pas de maximum.

## 2.3 Borne supérieure

### Proposition 2.7 (Théorème de la borne supérieure)

Tout sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}$  non vide et majoré (resp. minoré) admet un plus petit majorant (resp. un plus grand minorant). Il est appelé **borne supérieure** de  $A$  (resp. **borne inférieure**) et noté  $\sup(A)$  (resp.  $\inf(A)$ ).

*Démonstration.* Admis. □

**Exemple.**  $[0, 5]$  et  $[0, 5[$  ont tous les deux 5 comme borne supérieure.

**Remarque.** Si un intervalle non vide est borné, il contient alors tous les réels compris entre sa borne inférieure et sa borne supérieure.

**Remarque.** Dans le cas où  $A$  est non vide et majoré,

- $\sup(A)$  n'est pas forcément un élément de  $A$ , à la différence de  $\max(A)$  qui, **s'il existe**, est nécessairement un élément de  $A$ .
- si  $\max(A)$  existe, alors  $\max(A) = \sup(A)$ .
- $\sup(A)$  est unique, il y a par contre une infinité de majorants.

**Exercice 8.** Soit  $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$ . Déterminer (s'ils existent) : la borne supérieure de  $A$ , le maximum de  $A$ , la borne inférieure de  $A$ , le minimum de  $A$ .

Solution :

- $1 \in A$  (cas  $n = 1$ ) et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \leq 1$ , donc 1 majore  $A$ . Donc 1 est le maximum de  $A$ . C'est donc aussi la borne supérieure de  $A$ .
- Supposons que  $A$  admet un minimum  $\alpha$ . C'est un minorant de  $A$ , donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha \leq \frac{1}{n}$ . Par passage à la limite, on trouve  $\alpha \leq 0$ . De plus,  $\alpha \in A$ , donc il existe un entier  $n_0$  tel que  $\alpha = \frac{1}{n_0} > 0$  : absurde. Donc  $A$  n'admet pas de minimum.
- $A$  est non vide (il contient 1) et minoré par 0. Donc il admet une borne inférieure, qu'on note  $\beta$ . C'est un minorant de  $A$ , donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \beta \leq \frac{1}{n}$ . Par passage à la limite, on trouve  $\beta \leq 0$ . De plus 0 est minorant de  $A$  et  $\beta$  est le plus grand des minorants : on en déduit  $0 \leq \beta$ . Donc  $\beta = 0$  et 0 est la borne inférieure de  $A$ .

## 3 Valeur absolue

### 3.1 Définition et premières manipulations

#### Définition 3.1 (Valeur absolue)

Pour tout réel  $x$ , le maximum de l'ensemble  $\{x, -x\}$  est la **valeur absolue** de  $x$ , notée  $|x|$ .

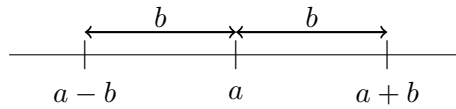
**Remarque.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ , on peut aussi écrire  $|x| = \sqrt{x^2}$ , ou  $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$ .

Cette dernière égalité permet de se ramener à des disjonctions de cas, ce qui est très pratique dans les calculs.

**Remarque.** Soit  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ , et  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|x - a| \leq b \iff \begin{cases} x - a \leq b & \text{et } x - a \geq 0 \\ \text{ou} \\ -x + a \leq b & \text{et } x - a \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \leq x \leq a + b \\ \text{ou} \\ a - b \leq x \leq a \end{cases} \iff a - b \leq x \leq a + b.$$

La condition  $|x - a| \leq b$  signifie donc que sur la droite réelle, le point  $x$  se situe à une distance inférieure à  $b$  du point  $a$  :



**Exercice 9.** Calculer  $I = \int_{-1}^1 \exp(-|x| + 1)dx$ .

Solution :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^0 \exp(x+1)dx + \int_0^1 \exp(-x+1)dx \\ &= [\exp(x+1)]_{-1}^0 + [-\exp(-x+1)]_0^1 \\ &= e - 1 + (-1) - (-e) \\ I &= 2(e - 1) \end{aligned}$$

**Exercice 10.** Résoudre l'équation  $|-3x + 6| = 7$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

Solution : Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|-3x + 6| = 7 \iff \begin{cases} -3x + 6 = 7 & \text{et } -3x + 6 \geq 0 \\ \text{ou} \\ 3x - 6 = 7 & \text{et } -3x + 6 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{3} & \text{et } x \leq 2 \\ \text{ou} \\ x = \frac{13}{3} & \text{et } x \geq 2 \end{cases} \iff x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = \frac{13}{3}.$$

L'équation a donc deux solutions,  $-\frac{1}{3}$  et  $\frac{13}{3}$ .

**Exercice 11.** Résoudre l'équation  $\sqrt{(1-5x)^2} = 2x - 5$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

Solution : Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \sqrt{(1-5x)^2} = 2x - 5 &\iff |1-5x| = 2x - 5 \\ &\iff \begin{cases} 1-5x = 2x-5 & \text{si } 1-5x \geq 0 \\ 5x-1 = 2x-5 & \text{sinon} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{6}{7} & \text{si } x \leq \frac{1}{5} \\ x = -\frac{4}{3} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Or  $\frac{6}{7} > \frac{1}{5}$  et  $-\frac{4}{3} < \frac{1}{5}$ . L'équation n'a donc pas de solution.

## 3.2 Inégalité triangulaire

### Proposition 3.2 (Inégalité triangulaire)

Pour tout  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$ .

*Démonstration.* On montre le résultat dans le cas d'une somme de deux termes (le principe est le même pour une somme de  $n$  termes). Soit  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . On commence par élever  $|x_1 + x_2|$  et  $|x_1| + |x_2|$  au carré pour les comparer :

$$\begin{aligned} (|x_1 + x_2|)^2 - (|x_1| + |x_2|)^2 &= (x_1 + x_2)^2 - |x_1|^2 - |x_2|^2 - 2|x_1||x_2| \\ &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2 - 2|x_1||x_2| \\ &= 2(x_1x_2 - |x_1x_2|) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

D'où  $(|x_1 + x_2|)^2 \leq (|x_1| + |x_2|)^2$ . En composant par la fonction racine carrée, qui est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , on trouve  $||x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$ , ce qui donne l'inégalité désirée en retirant les valeurs absolues surnuméraires.  $\square$

## 4 Partie entière

### Définition 4.1 (Partie entière)

Pour tout réel  $x$ , il existe un unique entier  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $n \leq x < n + 1$ . L'entier  $n$  est appelé la **partie entière** de  $x$ , que l'on note  $\lfloor x \rfloor$ .

*Démonstration.* On admet l'existence (nécessite d'utiliser que  $\mathbb{R}$  est archimédien, ce qui n'est pas au programme), montrons l'unicité. Supposons que  $n$  et  $n'$  sont deux entiers qui conviennent. On a  $n \leq x < n' + 1$ , comme ce sont des entiers on en déduit  $n \leq n'$ . De même,  $n' \leq n$ , et donc  $n = n'$ . D'où l'unicité.  $\square$

**Remarque.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La définition de la partie entière donne  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ . L'entier  $\lfloor x \rfloor$  est ainsi le plus grand entier inférieur à  $x$ .

**Exemple.** On a :  $\lfloor 2,5 \rfloor = 2$ ,  $\lfloor 2 \rfloor = 2$ ,  $\lfloor -2,5 \rfloor = -3$ ,  $\lfloor 0,8 \rfloor = 0$ .

### Proposition 4.2 (Partie entière de la somme d'un réel et un entier)

Soit  $n \in \mathbb{Z}$ , et  $x \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor.$$

*Démonstration.* On cherche l'encadrement de  $n + x$  par deux entiers successifs qui pourra permettre d'utiliser la définition. Par définition de  $\lfloor x \rfloor$ ,  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ . Donc en ajoutant  $n$  à tous les membres,

$$\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1,$$

avec  $\lfloor x \rfloor + n \in \mathbb{Z}$ . Donc par définition de la partie entière de  $n + x$ ,  $\lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$ .  $\square$

**Remarque.** Attention : la plupart des autres opérations que l'on pourrait vouloir effectuer avec la partie entière sont fausses. On ne peut notamment pas sommer dans le cas général, ni multiplier par un réel.

**Exemple.**  $\lfloor 2\frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$  alors que  $2 \lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 2 \times 0 = 0$ , donc  $\lfloor 2\frac{1}{2} \rfloor \neq 2 \lfloor \frac{1}{2} \rfloor$ .

### Exercice 12.

1. Soit  $y \in \mathbb{R}$ . Déterminer un encadrement de  $\lfloor y \rfloor$  en fonction de  $y$ .
2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Déduire de la question précédente la limite de la suite  $\left( \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

Solution :

1. Par définition de la partie entière,  $\lfloor y \rfloor \leq y$  et  $y < \lfloor y \rfloor + 1$ . Donc  $\lfloor y \rfloor \leq y$  et  $y - 1 < \lfloor y \rfloor$ , ce qui donne  $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on applique la question 1 à  $y = nx$  :  $\frac{nx - 1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq \frac{nx}{n}$ . On a donc  $x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$ , et la suite converge vers  $x$  par théorème d'encadrement.

**Exercice 13.** Déterminer les  $x \in \mathbb{R}$  pour lesquels  $\lfloor \frac{2x}{3} \rfloor = 4$ .

Solution : Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\left\lfloor \frac{2x}{3} \right\rfloor = 4 \iff 4 \leq \frac{2x}{3} < 5 \iff 12 \leq 2x < 15 \iff 6 \leq x < \frac{15}{2}.$$

L'ensemble des solutions est donc  $[6, \frac{15}{2}[$ .