Exercices PCSI
É.Bouchet

Applications

Exercice 1 (★). Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. Une restriction au départ d'une fonction injective est une fonction injective.
2. Une restriction au départ d'une fonction surjective est une fonction surjective.
3. Un prolongement au départ d'une fonction injective est une fonction injective.
4. Un prolongement au départ d'une fonction surjective est une fonction surjective.

Résultat attendu :

1. Vraie 2. Fausse 3. Fausse 4. Vraie

Exercice 2 (★). Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y, x) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x+y) \end{array}$.

1. Déterminer les images par f de $A = (-1, 0)$ et $B = (1, 2)$.
2. Déterminer les images par g de $F = (2, 0, 1)$ et $G = (-3, 1, 2)$.
3. Déterminer les antécédents par f de F et G.
4. Déterminer les antécédents par g de A et B.
5. f et g sont-elles injectives ? surjectives ?
6. Définir les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.

Résultat attendu :

1. $f(A) = (-1, -1, -1)$, $f(B) = (3, -1, 1)$.
2. $g(F) = (3, 2)$, $g(G) = (0, -2)$.
3. F a pour antécédent $(1, 1)$. G n'a pas d'antécédent.
4. L'ensemble des antécédents de A est $\{(x, -x, -1) | x \in \mathbb{R}\} = \{(-y, y, -1) | y \in \mathbb{R}\}$.
   L'ensemble des antécédents de B est $\{(x, 2-x, -1) | x \in \mathbb{R}\} = \{(2-y, y, -1) | y \in \mathbb{R}\}$.
5. f est injective, mais pas surjective. g est surjective mais pas injective.
6. $f \circ g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+2y+z, z, x+y+z) \end{array}$ et $g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (3x, 2x) \end{array}$

Exercice 3 (★). Les applications suivantes sont-elles bien définies ? injectives ? surjectives ?

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{2} \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{2} \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$
5. $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \{-1, 1\} & \to & \mathbb{Z} \\ (a, s) & \mapsto & s \times a \end{array}$
6. $f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star & \to & \mathbb{Q} \\ (a, b) & \mapsto & \dfrac{a}{b} \end{array}$

Résultat attendu :

1. f_1 n'est pas bien définie.
2. f_2 est bien définie, injective et surjective.
3. f_3 est bien définie, injective, pas surjective.
4. f_4 est bien définie, injective, pas surjective.
5. f_5 est bien définie, pas injective, surjective.
6. f_6 est bien définie, pas injective, surjective.

Exercice 4 (★). Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y, x-y) \end{array}$. La fonction f est-elle bijective ? Si oui, définir f^{-1}.

Résultat attendu : f est bijective et $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \left(\dfrac{x+y}{3}, \dfrac{x-2y}{3}\right) \end{array}$. Le plus simple pour le montrer est de raisonner par équivalences, en résolvant un système linéaire bien choisi.

Exercice 5 (★). Soit $g : \begin{array}{cl} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto (x+y+z, x-y, x) \end{array}$.
En raisonnant par équivalences, montrer que g est bijective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa réciproque g^{-1}.

Résultat attendu : On trouve $g^{-1} : \begin{array}{cl} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (a,b,c) & \mapsto (c, c-b, a+b-2c) \end{array}$.

Exercice 6 (★★). Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Résultat attendu : f est bijective et $f^{-1} : y \mapsto \dfrac{y}{1-|y|}$. Le plus simple pour le montrer est de raisonner par équivalences.

Exercice 7 (★★). Pour chacune des fonctions f suivantes, montrer que f est bijective pour un ensemble J à déterminer. Expliciter ensuite sa réciproque f^{-1}.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & J \\ t & \mapsto & 1+e^t \end{array}$
2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & J \\ s & \mapsto & \dfrac{-1}{2}s-1 \end{array}$
3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & J \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$
4. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & J \\ t & \mapsto & t+t^2 \end{array}$

Résultat attendu : On conjecture J par lecture graphique, puis on fixe x dans l'ensemble de définition, y dans J, et on résout $y = f(x)$ par équivalences.

1. $J =]1,+\infty[$, $f^{-1} : y \mapsto \ln(y-1)$.
2. $J = \mathbb{R}$, $f^{-1} : y \mapsto -2(y+1)$.
3. $J =]0,1]$, $f^{-1} : y \mapsto \sqrt{\dfrac{1}{y}-1}$.
4. $J = [0,+\infty[$, $f^{-1} : y \mapsto \dfrac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}$.

Exercice 8 (★★). On pose la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{x^2}+1 \end{array}$.

Note : ici, e^{x^2} désigne le nombre $\exp(x^2)$ et pas $(\exp(x))^2$.

1. Montrer que f n'est ni injective, ni surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle J à préciser, ainsi qu'une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans J. On explicitera les applications réciproques de ces deux bijections.

Résultat attendu : $J = [2,+\infty[$. Les deux réciproques sont $\begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R}_+ \\ y & \mapsto & \sqrt{\ln(y-1)} \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R}_- \\ y & \mapsto & -\sqrt{\ln(y-1)} \end{array}$.
Le plus simple pour le montrer est de raisonner par équivalences, en introduisant une disjonction de cas quand elle devient nécessaire.

Exercice 9 (★★). Soit a une application définie de E dans F et b une application définie de F dans G.

1. Prouver que : $b \circ a$ injective de E dans $G \Longrightarrow a$ injective de E dans F.
2. Prouver que : $b \circ a$ surjective de E dans $G \Longrightarrow b$ surjective de F dans G.

Résultat attendu : On suppose que le membre de gauche de l'implication est vérifié, et on montre que le membre de droite est également vérifié en revenant à la définition d'injectif ou surjectif.

Exercice 10 (★★★). Soit A et B deux ensembles non vides de E et $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (A \cap X, B \cap X) \end{array}$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit surjective.
3. Quand f est bijective, déterminer sa réciproque.

Résultat attendu :

1. Une condition nécessaire et suffisante est $A \cup B = E$.
2. Une condition nécessaire et suffisante est $A \cap B = \emptyset$.
3. Quand les conditions précédentes sont vérifiées, on trouve $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) & \to & \mathcal{P}(E) \\ (X_1, X_2) & \to & X_1 \cup X_2 \end{array}$.

Exercice 11 (Type DS)**.** On s'intéresse à l'application $h\ :\ \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1-x^2 \end{array}$.

1. La fonction h est-elle injective ? surjective ?
2. Soit $h_1\ :\ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & 1-x^2 \end{array}$. Montrer que h_1 est bijective et déterminer h_1^{-1}.
3. Soit $h_2\ :\ \begin{array}{ccc} [-1,0] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & 1-x^2 \end{array}$. Montrer que h_2 est bijective et déterminer h_2^{-1}.

Résultat attendu :

1. $h(1) = 1 - 1^2 = 0$ et $h(-1) = 1 - (-1)^2 = 0$. Or $1 \neq -1$, donc h n'est pas injective.
   On suppose maintenant que 2 admet un antécédent par h. Alors $\exists x \in [-1,1]$ tel que $2 = 1 - x^2$. Donc $x^2 = -1 < 0$: impossible. Donc 2 n'admet pas d'antécédent par h, donc h n'est pas surjective.
   Rmq : dans un cas comme dans l'autre, on aurait pu choisir d'autres valeurs pour les contre-exemples.
2. Soit $x \in [0,1]$ et $y \in [0,1]$,
   $$y = h_1(x) \iff y = 1 - x^2 \iff x^2 = 1 - y \iff x = \sqrt{1-y} \quad \text{car } 1 - y \geqslant 0 \text{ et } x \geqslant 0.$$
   Donc h_1 est bijective et $\forall y \in [0,1]$, $h_1^{-1}(y) = \sqrt{1-y}$.
3. Soit $x \in [-1,0]$ et $y \in [0,1]$,
   $$y = h_2(x) \iff y = 1 - x^2 \iff x^2 = 1 - y \iff x = -\sqrt{1-y} \quad \text{car } 1 - y \geqslant 0 \text{ et } x \leqslant 0.$$
   Donc h_2 est bijective et $\forall y \in [0,1]$, $h_2^{-1}(y) = -\sqrt{1-y}$.