Exercices PCSI
É.Bouchet

Ensemble des nombres complexes

Exercice 1 (★). Soit $x \in \mathbb{R}$. Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1. $z_1 = 3i(2ix-4)$
2. $z_2 = \dfrac{1}{i}$
3. $z_3 = i^3$
4. $z_4 = (3-i)^2$
5. $z_5 = \dfrac{3(2+i)}{1-i}$
6. $z_6 = \dfrac{i-e^x}{i+x}$
7. $z_7 = \dfrac{\cos(x)+2ix}{i} + (ie^x - e^x)(1+2i)$

Exercice 2 (★). Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer le module de :

1. $z_1 = 5i$
2. $z_2 = -3i$
3. $z_3 = 3-2i$
4. $z_4 = (2+i)(i-t)$
5. $z_5 = -2i(\sin(t) - it)$
6. $z_6 = \dfrac{2-i}{3-i}$
7. $z_7 = \dfrac{3i(1+it^2)}{e^t - i}$

Exercice 3 (★★). Soit $t \in \mathbb{R}$.

1. Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique (en précisant s'il y a des valeurs de t interdites) :
   (a) $z_1 = \dfrac{2+i}{1+2i}$ (b) $z_2 = (1+i)^5$ (c) $z_3 = \dfrac{e^{-it}}{1+3i}$ (d) $z_4 = \dfrac{1+e^{it}}{e^{it}-e^{2it}}$.
2. Déterminer leurs modules.

Exercice 4 (★). Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Linéariser les expressions suivantes :

1. $\sin^2(2\theta)$
2. $\sin(2\theta)\cos(\theta)$
3. $\sin^3(\theta)$
4. $\cos(n\theta)\cos(\theta)$
5. $\cos^2((n+1)\theta)$
6. $\sin((n+1)\theta)\sin((n-1)\theta)$

Exercice 5 (★). Mettre les complexes suivants sous forme exponentielle :

1. $z = i$
2. $z = -3$
3. $z = -\sqrt{3} + i$
4. $z = -5e^{\frac{3i\pi}{4}}$
5. $z = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{-i\pi}{5}}$
6. $z = 1 - e^{\frac{i\pi}{4}}$.
7. $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$
8. $z = 1 + e^{i\frac{7\pi}{6}}$

Exercice 6 (★). Pour les valeurs de $z \in \mathbb{C}$ suivantes, placer (approximativement) dans le plan complexe les nombres z^n, où $n \in \mathbb{N}$.

1. $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$
2. $z = \dfrac{5e^{i\frac{\pi}{3}}}{4}$
3. $z = \dfrac{4e^{i\frac{\pi}{3}}}{5}$

Exercice 7 (★★).

1. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes qui vérifient $|z_1 - a| \leqslant 2$ et $|z_2 - a| \leqslant 3$, où a est le complexe $-2+i$. Montrer que $|z_1 - z_2| \leqslant 5$. On pourra commencer par faire un dessin de la situation.
2. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes qui vérifient $|z_1 - a| \leqslant 2$ et $|z_2 - b| \leqslant 3$, où $a = -2+i$ et $b = -2+2i$. Montrer que $|z_1 - z_2| \leqslant 6$. On pourra commencer par faire un dessin de la situation.

Exercice 8 (★★). Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ qui vérifient $|z-1| = |z-i|$:

1. par un raisonnement purement géométrique ;
2. par un raisonnement purement algébrique.

Exercice 9 (★). Soit $n \geqslant 2$, $p \in \mathbb{Z}$ et $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = 1$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega^k$

Exercice 10 (★). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, calculer $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\cos(ka)\right)$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\sin(ka)\right)$.

Exercice 11 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. En déduire sa limite pour $n \to +\infty$.

Exercice 12 (★★). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, calculer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb)$.

Exercice 13 (★★). z et z' étant deux complexes non nuls et de même module, montrer que $U = \dfrac{(z+z')^2}{zz'}$ est un nombre réel positif.

Exercice 14 (★★★). Pour quelles valeurs de n le complexe $\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ est-il un réel positif ?

Exercice 15 (Type DS)**.** On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{\bar{z}+1}{z-1} \end{array}$.

1. (a) Déterminer les antécédents de 1 par f.
   (b) Déterminer l'ensemble $f(i\mathbb{R})$.
   (c) La fonction f est-elle injective de $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ dans $\mathbb{C}$? Surjective ? Bijective ?
2. Dans cette question, on note g la restriction de f à $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
   (a) Montrer que $g(\mathbb{R}\setminus\{1\}) \subset \mathbb{R}\setminus\{1\}$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, simplifier $g \circ g(x)$.
   (c) En déduire que g est une bijection de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et déterminer sa réciproque.