Ensemble des nombres complexes

Exercice 1 (★). Soit $x \in \mathbb{R}$. Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1. $z_1 = 3i(2ix-4)$
2. $z_2 = \dfrac{1}{i}$
3. $z_3 = i^3$
4. $z_4 = (3-i)^2$
5. $z_5 = \dfrac{3(2+i)}{1-i}$
6. $z_6 = \dfrac{i-e^x}{i+x}$
7. $z_7 = \dfrac{\cos(x)+2ix}{i} + (ie^x - e^x)(1+2i)$

Résultat attendu :

1. $z_1 = -6x - 12i$
2. $z_2 = -i$
3. $z_3 = -i$
4. $z_4 = 8 - 6i$
5. $z_5 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{2}i$
6. $z_6 = \dfrac{1-xe^x}{1+x^2} + \dfrac{x+e^x}{1+x^2}i$
7. $z_7 = 2x - 3e^x + i(-\cos(x) - e^x)$

Exercice 2 (★). Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer le module de :

1. $z_1 = 5i$
2. $z_2 = -3i$
3. $z_3 = 3-2i$
4. $z_4 = (2+i)(i-t)$
5. $z_5 = -2i(\sin(t) - it)$
6. $z_6 = \dfrac{2-i}{3-i}$
7. $z_7 = \dfrac{3i(1+it^2)}{e^t - i}$

Résultat attendu : Penser à utiliser les formules de module d'un produit, d'un quotient...

1. $|z_1| = 5$
2. $|z_2| = 3$
3. $|z_3| = \sqrt{13}$
4. $|z_4| = \sqrt{5}\sqrt{1+t^2}$
5. $|z_5| = 2\sqrt{\sin^2(t) + t^2}$
6. $|z_6| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
7. $|z_7| = \dfrac{3\sqrt{1+t^4}}{\sqrt{e^{2t}+1}}$

Exercice 3 (★★). Soit $t \in \mathbb{R}$.

1. Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique (en précisant s'il y a des valeurs de t interdites) :
   (a) $z_1 = \dfrac{2+i}{1+2i}$ (b) $z_2 = (1+i)^5$ (c) $z_3 = \dfrac{e^{-it}}{1+3i}$ (d) $z_4 = \dfrac{1+e^{it}}{e^{it} - e^{2it}}$.
2. Déterminer leurs modules.

Résultat attendu :

1. Seul z_4 a des valeurs de t interdites : il faut $e^{it} \neq e^{2it}$, c'est-à-dire que t ne soit pas un multiple de 2π.
   (a) $z_1 = \dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5}i$ (b) $z_2 = -4 - 4i$
   (c) $z_3 = \dfrac{\cos(t) - 3\sin(t)}{10} - \dfrac{\sin(t) + 3\cos(t)}{10}i$ (d) $z_4 = \dfrac{2\cos(\frac{t}{2})e^{i\frac{t}{2}}}{-2i\sin(\frac{t}{2})e^{\frac{3it}{2}}} = \dfrac{\sin(t)}{\tan(\frac{t}{2})} + \dfrac{\cos(t)}{\tan(\frac{t}{2})}i$
2. (a) $|z_1| = 1$ (b) $|z_2| = 4\sqrt{2}$ (c) $|z_3| = \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$ (d) $|z_4| = \dfrac{1}{|\tan(\frac{t}{2})|}$

Exercice 4 (★). Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Linéariser les expressions suivantes :

1. $\sin^2(2\theta)$
2. $\sin(2\theta)\cos(\theta)$
3. $\sin^3(\theta)$
4. $\cos(n\theta)\cos(\theta)$
5. $\cos^2((n+1)\theta)$
6. $\sin((n+1)\theta)\sin((n-1)\theta)$

Résultat attendu :

1. $\sin^2(2\theta) = \dfrac{1-\cos(4\theta)}{2}$
2. $\sin(2\theta)\cos(\theta) = \dfrac{\sin(3\theta) + \sin(\theta)}{2}$
3. $\sin^3(\theta) = \dfrac{3\sin(\theta) - \sin(3\theta)}{4}$
4. $\cos(n\theta)\cos(\theta) = \dfrac{\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta)}{2}$
5. $\cos^2((n+1)\theta) = \dfrac{1+\cos(2(n+1)\theta)}{2}$
6. $\sin((n+1)\theta)\sin((n-1)\theta) = \dfrac{\cos(2\theta) - \cos(2n\theta)}{2}$

Exercice 5 (★). Mettre les complexes suivants sous forme exponentielle :

1. $z = i$
2. $z = -3$
3. $z = -\sqrt{3} + i$
4. $z = -5e^{\frac{3i\pi}{4}}$
5. $z = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{-i\pi}{5}}$
6. $z = 1 - e^{\frac{i\pi}{4}}$.
7. $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$
8. $z = 1 + e^{i\frac{7\pi}{6}}$

Résultat attendu :

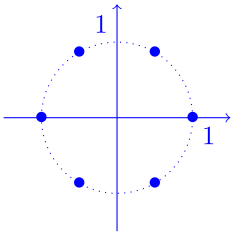
1. $z = e^{\frac{i\pi}{2}}$
2. $z = 3e^{i\pi}$
3. $z = 2e^{\frac{5i\pi}{6}}$
4. $z = 5e^{\frac{7i\pi}{4}}$
5. $z = 2\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)e^{\frac{i\pi}{10}}$
6. $z = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{-3i\pi}{8}}$
7. $z = 2\cos(\frac{\pi}{12})e^{i\frac{\pi}{12}}$
8. $z = -2\cos(\frac{7\pi}{12})e^{-i\frac{5\pi}{12}}$

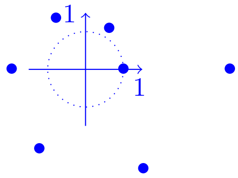
Pour les derniers cas, il faut penser à vérifier si les cosinus et sinus sont positifs, car un module ne peut pas être négatif.

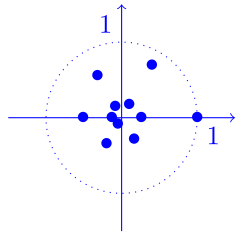
Exercice 6 (★). Pour les valeurs de $z \in \mathbb{C}$ suivantes, placer (approximativement) dans le plan complexe les nombres z^n, où $n \in \mathbb{N}$.

1. $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$
2. $z = \dfrac{5e^{i\frac{\pi}{3}}}{4}$
3. $z = \dfrac{4e^{i\frac{\pi}{3}}}{5}$

Résultat attendu :

1. 

2. 

3. 

Exercice 7 (★★).

1. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes qui vérifient $|z_1 - a| \leqslant 2$ et $|z_2 - a| \leqslant 3$, où a est le complexe $-2+i$. Montrer que $|z_1 - z_2| \leqslant 5$. On pourra commencer par faire un dessin de la situation.
2. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes qui vérifient $|z_1 - a| \leqslant 2$ et $|z_2 - b| \leqslant 3$, où $a = -2+i$ et $b = -2+2i$. Montrer que $|z_1 - z_2| \leqslant 6$. On pourra commencer par faire un dessin de la situation.

Résultat attendu : Dans les deux cas, on décompose $z_1 - z_2$ en une somme de davantage de termes, pour utiliser ensuite l'inégalité triangulaire.

Exercice 8 (★★). Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ qui vérifient $|z-1| = |z-i|$:

1. par un raisonnement purement géométrique ;
2. par un raisonnement purement algébrique.

Résultat attendu :

1. On cherche l'ensemble des z dont l'affixe est à même distance de celle de 1 et de i. Les solutions sont donc les points dont l'affixe se trouve sur la médiatrice entre les affixes de 1 et de i.
2. Un calcul (sous forme algébrique ou exponentielle) donne : $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\theta}{2})}$.

Exercice 9 (★). Soit $n \geqslant 2$, $p \in \mathbb{Z}$ et $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = 1$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega^k$

Résultat attendu :

1. n si $\omega = 1$, 0 sinon
2. n si $\omega^p = 1$, 0 sinon
3. $(\omega+1)^n - 1$

Exercice 10 (★). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, calculer $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \cos(ka) \right)$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \sin(ka) \right)$.

Résultat attendu : On trouve par binôme de Newton et formule d'Euler :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ika} = (e^{ia}+1)^n = \left(2\cos\left(\frac{a}{2}\right) e^{i\frac{a}{2}}\right)^n = 2^n \cos^n\left(\frac{a}{2}\right) \cos\left(\frac{na}{2}\right) + i 2^n \cos^n\left(\frac{a}{2}\right) \sin\left(\frac{na}{2}\right).$$

On en déduit que $S_1 = 2^n \cos^n\left(\frac{a}{2}\right) \cos\left(\frac{na}{2}\right)$ et $S_2 = 2^n \cos^n\left(\frac{a}{2}\right) \sin\left(\frac{na}{2}\right)$.

Exercice 11 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. En déduire sa limite pour $n \to +\infty$.

Résultat attendu : On utilise la relation $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \mathrm{Im}((e^{i\frac{\pi}{n}})^k)$ puis les formules de sommes géométriques. On trouve $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$, qui diverge vers $+\infty$ pour $n \to +\infty$.

Exercice 12 (★★). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, calculer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb)$.

__**Résultat attendu :**__ On utilise la relation $\sin(a+kb) = \operatorname{Im}(e^{ia}(e^{ib})^k)$, puis les formules de sommes géométriques.
On trouve $S = (n+1)\sin(a)$ si $b \equiv 0[2\pi]$, et $S = \dfrac{\sin\left(a+\frac{bn}{2}\right)\sin\left(\frac{b(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$ sinon.

Exercice 13 (★★). z et z' étant deux complexes non nuls et de même module, montrer que $U = \dfrac{(z+z')^2}{zz'}$ est un nombre réel positif.
__**Résultat attendu :**__ On utilise l'hypothèse sur le module pour trouver une relation entre z et z', qu'on utilise ensuite pour simplifier l'écriture de U jusqu'à obtenir un nombre qu'on sait être réel positif.

Exercice 14 (★★★). Pour quelles valeurs de n le complexe $\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ est-il un réel positif ?

__**Résultat attendu :**__ Soit $n \in \mathbb{Z}$, des calculs donnent $\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n = 2^{3n}\sqrt{2}^n e^{in\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{5\pi}{3}\right)}$
C'est un réel positif si et seulement si $n \in \left\{-\dfrac{24k}{11} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 15 (Type DS)**.** On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{\bar{z}+1}{z-1} \end{array}$.

1. (a) Déterminer les antécédents de 1 par f.
   (b) Déterminer l'ensemble $f(i\mathbb{R})$.
   (c) La fonction f est-elle injective de $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ dans $\mathbb{C}$? Surjective ? Bijective ?
2. Dans cette question, on note g la restriction de f à $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
   (a) Montrer que $g(\mathbb{R}\setminus\{1\}) \subset \mathbb{R}\setminus\{1\}$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, simplifier $g\circ g(x)$.
   (c) En déduire que g est une bijection de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et déterminer sa réciproque.

Résultat attendu :

1. (a) Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$,
$$f(z)=1 \Leftrightarrow \frac{\bar{z}+1}{z-1}=1 \Leftrightarrow \bar{z}+1=z-1 \Leftrightarrow \frac{z-\bar{z}}{2}=1 \Leftrightarrow i\,\mathrm{Im}(z)=1 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=-i,$$
où on a utilisé la formule $\frac{z-\bar{z}}{2i}=\mathrm{Im}(z)$. Or $\mathrm{Im}(z)\in\mathbb{R}$ et $-i\notin\mathbb{R}$, donc $f(z)=1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Donc 1 n'a pas d'antécédent par f.
Rmq : On pouvait aussi poser $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $z=a+ib$ et utiliser cette forme pour la résolution.
   (b) Soit $z\in i\mathbb{R}$, alors $\bar{z}=-z$, donc $f(z)=\dfrac{-z+1}{z-1}=-1$. Donc :
$$f(i\mathbb{R})=\{f(z)|z\in i\mathbb{R}\}=\{-1|z\in i\mathbb{R}\}=\{-1\}.$$
   (c) La question 1.b. donne que $f(i)=-1=f(2i)$. Or $i\neq 2i$. Donc f n'est pas injective de $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ dans $\mathbb{C}$. Donc f n'est pas non plus bijective de $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ dans $\mathbb{C}$.
On a de plus montré en question 1.a. que 1 n'a pas d'antécédent par f, donc f n'est pas surjective de $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ dans $\mathbb{C}$.
2. (a) Soit $y\in g(\mathbb{R}\setminus\{1\})$. Alors $\exists x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ tel que $y=g(x)$. Comme x est réel, $y=\dfrac{\bar{x}+1}{x-1}=\dfrac{x+1}{x-1}\in\mathbb{R}$.
Il reste à montrer que y ne peut pas valoir 1, ce qui découle directement de la question 1.a (si 1 n'a pas d'antécédent par f dans $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, il n'en a pas non plus par g dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$). Donc $y\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Donc $g(\mathbb{R}\setminus\{1\})\subset\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
Rmq : si on ne voyait pas comment utiliser 1.a, on pouvait aussi refaire la preuve dans ce cas particulier, c'est-à-dire montrer que $\frac{x+1}{x-1}=1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
   (b) La question précédente garantit que $g\circ g(x)$ est bien définie et on a :
$$g\circ g(x)=g(g(x))=g\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}=\frac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)-(x-1)}=\frac{2x}{2}=x.$$
   (c) Soit $y\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, alors par 2.a et 2.b $g(y)\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $g(g(y))=y$. Donc $g(y)$ est un antécédent de y par g. Donc g est surjective de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
Soit $(x_1,x_2)\in(\mathbb{R}\setminus\{1\})^2$, on suppose que $g(x_1)=g(x_2)$. Alors $g(g(x_1))=g(g(x_2))$, donc par 2.b $x_1=x_2$. Donc g est injective de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
Donc g est bijective de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, avec $g^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ y & \mapsto & g(y) \end{array}$.
Rmq : on est donc dans un cas particulier où $g^{-1}=g$.