Ensemble des nombres complexes

Cours de É. Bouchet – PCSI

13 novembre 2024

Table des matières

1 Nombres complexes

1.1 Présentation

Définition 1.1 (Nombre complexe)

On appelle **nombre complexe** tout élément z pouvant s'écrire sous la forme $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et i une solution de l'équation $i^2 = -1$.

Remarque. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est muni de deux opérations internes, l'addition et la multiplication, dont les règles de calculs sont identiques à celles de $\mathbb{R}$, en tenant compte de l'égalité $i^2 = -1$. Les formules usuelles sur les sommes (somme de termes d'une suite géométrique, télescopage, binôme de Newton, identités remarquables...) restent valides dans $\mathbb{C}$.

Exercice 1. Simplifier le produit $(1 + 3i)(2 - 5i)$.
<u>Solution :</u> $(1 + 3i)(2 - 5i) = 2 + 6i - 5i - 15i^2 = 2 + 15 + i(6 - 5) = 17 + i$.

Remarque. Si $z = a + ib$ avec (a, b) un couple de réels différent de $(0, 0)$, alors $z \neq 0$ et on a :

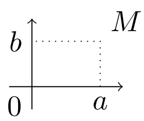
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 - i^2 b^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Exercice 2. Simplifier le quotient $\dfrac{1}{3i - 2}$.
<u>Solution :</u> $\dfrac{1}{2 - 3i} = \dfrac{-2 - 3i}{(-2 + 3i)(-2 - 3i)} = \dfrac{-2 - 3i}{4 + 9} = -\dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13}i$.

1.2 Représentation graphique

Définition 1.2 (Affixe)

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, aussi appelé **plan complexe**.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et M le point du plan de coordonnées (a, b). Le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé **l'affixe** du point M. C'est aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.



Proposition 1.3 (Affixe d'un vecteur quelconque)

Soit A et B deux points du plan complexe d'affixes z_A et z_B. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

Démonstration. Découle directement de la relation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. □

Proposition 1.4 (Affixe du milieu d'un segment)

Soit A et B deux points du plan complexe d'affixes z_A et z_B. Le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $\frac{z_A + z_B}{2}$.

Démonstration. On note C le milieu du segment et z_C son affixe. Alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, donc $z_C - z_A = z_B - z_C$, donc $2z_C = z_A + z_B$ et $z_C = \frac{z_A + z_B}{2}$. □

1.3 Écriture algébrique

Définition 1.5 (Partie réelle, partie imaginaire)

L'écriture du nombre complexe z sous la forme $z = a + ib$ avec a et b des réels est appelée **l'écriture algébrique** de z. Le réel a est appelé la **partie réelle** de z et b est sa **partie imaginaire**.
On note $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

Remarque. Attention : contrairement à ce que son nom pourrait laisser penser, la partie imaginaire est un réel.

Proposition 1.6 (Unicité de l'écriture algébrique)

L'écriture algébrique d'un nombre complexe z est unique.

Démonstration. On suppose qu'il existe $(a, b, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4$ tels que $z = a + ib = \alpha + i\beta$. Alors $(a - \alpha) = -i(b - \beta)$.
- Si $b = \beta$, alors $a = \alpha$ et les deux écritures sont identiques.
- Si $b \neq \beta$, alors $i = -\frac{a-\alpha}{b-\beta} \in \mathbb{R}$, ce qui est impossible.

D'où l'unicité.
Variante : en mettant au carré l'égalité $(a - \alpha) = -i(b - \beta)$, on trouve $(a - \alpha)^2 = -(b - \beta)^2$ et les deux carrés sont donc nuls. Donc $a = \alpha$ et $b = \beta$. □

Proposition 1.7 (Écriture algébrique de la somme et du produit)

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Alors :

$$\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2), \quad \mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2),$$

$$\mathrm{Re}(z_1 z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Re}(z_2) - \mathrm{Im}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2), \quad \mathrm{Im}(z_1 z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2) + \mathrm{Re}(z_2)\,\mathrm{Im}(z_1).$$

Démonstration. On pose $a_1 = \mathrm{Re}(z_1)$, $a_2 = \mathrm{Re}(z_2)$, $b_1 = \mathrm{Im}(z_1)$ et $b_2 = \mathrm{Im}(z_2)$. On a alors $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$. Les opérations de calcul sur les nombres complexes donnent directement :

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2) \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(b_1 a_2 + b_2 a_1).$$

□

Définition 1.8 (Nombre imaginaire pur)

Le complexe z est dit **imaginaire pur** si $\mathrm{Re}(z) = 0$. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres imaginaires purs.

Exemple. $3i$ est un imaginaire pur, $2 + 3i$ n'en est pas un.

2 Conjugaison et module

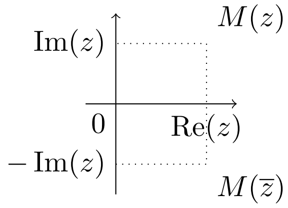
2.1 Conjugaison

Définition 2.1 (Conjugué)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Le **conjugué** du nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.

Remarque. On a donc $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$.

Remarque. Dans le plan complexe, l'image $M(\overline{z})$ du nombre complexe $\overline{z}$ est le symétrique par rapport à l'axe des abscisses du point $M(z)$:



Proposition 2.2 (Lien entre conjugué et partie réelle/imaginaire)

Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

Démonstration. On pose $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$. Alors $z + \overline{z} = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2ib = 2i\,\mathrm{Im}(z)$. □

Remarque. En particulier, $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z$.

Proposition 2.3 (Opérations sur le conjugué)

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ et $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$. Si de plus z_2 est non nul, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Démonstration. On pose $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$, avec $(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{R}^4$. Alors :

$$\overline{z_1 + z_2} = a_1 + a_2 - i(b_1 + b_2) = a_1 - ib_1 + a_2 - ib_2 = \overline{z_1} + \overline{z_2},$$

$$\overline{z_1.z_2} = \overline{a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)} = a_1a_2 - b_1b_2 - ia_1b_2 - ia_2b_1 = (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = \overline{z_1}.\overline{z_2}.$$

On obtient la dernière égalité par produit avec $\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \frac{a_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{b_2}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{1}{\overline{z_2}}$. □

2.2 Module

Définition 2.4 (Module)

Soit $z = a + ib$ où (a, b) est un couple de réels. Le **module** de z, noté $|z|$, est le réel

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Remarque. Comme $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$, ces deux expressions sont bien égales.

Proposition 2.5 (Propriétés du module)

Pour tout nombre complexe z,

$$|z| = |\overline{z}|, \qquad |z| \geqslant 0 \quad \text{et} \quad |z| = 0 \iff z = 0.$$

Démonstration. Découle directement de la définition du module. □

Proposition 2.6 (Relations entre $|\mathrm{Re}(z)|$, $|\mathrm{Im}(z)|$ et $|z|$)

Pour tout nombre complexe z,

$$|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z| \quad \text{et} \quad \mathrm{Re}(z) = |z| \iff z \in \mathbb{R}_+,$$

$$|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z| \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) = |z| \iff z \in i\mathbb{R}_+.$$

Démonstration. On montre la première relation, la deuxième s'obtient de la même manière. Soit $z \in \mathbb{C}$, par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$|\mathrm{Re}(z)| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2} \leqslant \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = |z|\,,$$

de plus,

$$\mathrm{Re}(z) = |z| \iff (\mathrm{Re}(z) \geqslant 0 \text{ et } \mathrm{Re}(z)^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2) \iff (\mathrm{Re}(z) \geqslant 0 \text{ et } \mathrm{Im}(z) = 0) \iff z \in \mathbb{R}_+,$$

où on invoque la stricte croissance du carré sur $\mathbb{R}_+$ pour justifier la première équivalence. □

Proposition 2.7 (Module du produit et du quotient)

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes. Alors $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$, et si $z_2 \neq 0$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Démonstration. Comme $z_1\overline{z_1} = |z_1|^2 \geqslant 0$, on peut écrire $|z_1 z_2| = \sqrt{z_1 z_2 \overline{z_1 z_2}} = \sqrt{z_1\overline{z_1}}\sqrt{z_2\overline{z_2}} = |z_1|\,|z_2|$.
Et si $z_2 \neq 0$, on a de même $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}} = \sqrt{\frac{z_1\overline{z_1}}{z_2\overline{z_2}}} = \frac{\sqrt{z_1\overline{z_1}}}{\sqrt{z_2\overline{z_2}}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$. □

Proposition 2.8 (Inégalité triangulaire)

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes. Alors

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

et $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}_+$.

Remarque. La condition $z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}_+$ signifie que les vecteurs d'affixes z_1 et z_2 sont colinéaires et de même sens.

Démonstration. On procède d'abord comme dans le cas réel :

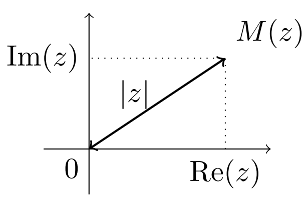
$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 - (|z_1| + |z_2|)^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} - |z_1|^2 - |z_2|^2 - 2\,|z_1|\,|z_2| \\
&= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) - |z_1|^2 - |z_2|^2 - 2\,|z_1|\,|\overline{z_2}| \\
&= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + |z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 - 2\,|z_1\overline{z_2}| \\
&= 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) - 2\,|z_1\overline{z_2}| \leqslant 0.
\end{aligned}$$

D'où $|z_1 + z_2|^2 \leqslant (|z_1| + |z_2|)^2$, et en passant à la racine (croissante sur $\mathbb{R}_+$), comme les modules sont tous positifs, $|z_1 + z_2| \leqslant (|z_1| + |z_2|)$. De plus, on a égalité si et seulement si $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = |z_1\overline{z_2}| \iff z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}_+$. □

2.3 Interprétation géométrique du module

Proposition 2.9 (Module et distance à l'origine)

Soit $z \in \mathbb{C}$. Dans le plan complexe, $|z|$ représente la distance de l'origine 0 au point $M(z)$.



Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème de Pythagore. □

Proposition 2.10 (Module et distance entre deux points)

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et A, B leurs images dans le plan complexe. La valeur $|a - b|$ correspond à la distance entre les points A et B.

Démonstration. $|a - b|$ correspond à la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (d'après le résultat précédent), donc à la distance entre A et B. $\square$

Remarque. On déduit directement de ces propriétés que si A est un point d'affixe a et r est un réel strictement positif,
- Le cercle de centre A et de rayon r correspond à l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} | \, |z - a| = r\}$.
- Le disque fermé de centre A et de rayon r correspond à l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} | \, |z - a| \leqslant r\}$.
- Le disque ouvert de centre A et de rayon r correspond à l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} | \, |z - a| < r\}$.

Exercice 3. Montrer que le point d'affixe $2 + i$ se trouve sur le cercle de centre d'affixe $2i$ et de rayon $\sqrt{5}$.
Solution : Il suffit de vérifier que $|2 + i - 2i| = |2 - i| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$.

3 Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

3.1 Nombres complexes de module 1

Définition 3.1 (Cercle trigonométrique)

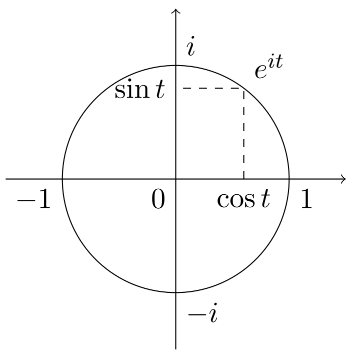
On pose $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| = 1\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
Dans le plan complexe, $\mathbb{U}$ s'identifie au cercle trigonométrique, de centre 0 et de rayon 1.

Définition 3.2 (e^{it}, $t \in \mathbb{R}$)

Soit $t \in \mathbb{R}$, on note e^{it} le nombre complexe $\cos(t) + i \sin(t)$.

Remarque. Attention, l'exponentielle est ici une simple notation. Notamment, il ne FAUT PAS appliquer ln à des exponentielles complexes pour les simplifier.

Remarque. Comme tout point du cercle trigonométrique a des coordonnées du type $(\cos(t), \sin(t))$ avec $t \in \mathbb{R}$, on a donc $\mathbb{U} = \{e^{it} | t \in \mathbb{R}\}$.



Proposition 3.3 (Produit de termes en e^{it})

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$.

Démonstration. Il suffit de revenir à la définition :

$$e^{ia}e^{ib} = (\cos(a) + i \sin(a))(\cos(b) + i \sin(b))$$

$$
\begin{aligned}
&= \cos(a)\cos(b) + i\cos(a)\sin(b) + i\sin(a)\cos(b) + i^2\sin(a)\sin(b)\\
&= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)) + i\,(\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b))\\
&= \cos(a+b) + i\sin(a+b)\\
e^{ia}e^{ib} &= e^{i(a+b)}
\end{aligned}
$$

□

Proposition 3.4 (Quotient de termes en e^{it})

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{ia}} = e^{-ia} = \dfrac{1}{e^{ia}}$.

Démonstration. Un calcul et les parités de sinus et cosinus donnent :

$$\overline{e^{ia}} = \overline{\cos(a) + i\sin(a)} = \cos(a) - i\sin(a) = \cos(-a) + i\sin(-a) = e^{-ia}.$$

Par ailleurs,

$$\frac{1}{e^{ia}} = \frac{1}{\cos(a) + i\sin(a)} = \frac{\cos(a) - i\sin(a)}{\cos^2(a) + \sin^2(a)} = \frac{e^{-ia}}{1} = e^{-ia}.$$

□

Remarque. On déduit immédiatement des deux derniers résultats que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{e^{ia}}{e^{ib}} = e^{i(a-b)}$.

Proposition 3.5 (Module de termes en e^{it})

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left|e^{it}\right| = 1$.

Démonstration. Il suffit de faire le calcul : $\left|e^{it}\right| = |\cos(t) + i\sin(t)| = \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)} = \sqrt{1} = 1$. □

3.2 Formules d'Euler et technique de l'angle moitié

Proposition 3.6 (Formules d'Euler)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Démonstration. Comme $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$,

$$\cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}}}{2} = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}}}{2i} = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

□

Remarque. Ces formules permettent d'utiliser des technique de l'angle moitié pour factoriser des expressions : soit $(t,\theta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$e^{it} + e^{i\theta} = e^{i\frac{t+\theta}{2}}\left(e^{i\frac{t-\theta}{2}} + e^{-i\frac{t-\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{t-\theta}{2}\right)e^{i\frac{t+\theta}{2}}.$$

$$e^{it} - e^{i\theta} = e^{i\frac{t+\theta}{2}}\left(e^{i\frac{t-\theta}{2}} - e^{-i\frac{t-\theta}{2}}\right) = 2i\sin\left(\frac{t-\theta}{2}\right)e^{i\frac{t+\theta}{2}}.$$

Le cas particulier $t = 0$ permet entre autres de traiter les formes $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$. Ces relations permettent entre autres de retrouver des formules trigonométriques, en prenant les parties réelles ou imaginaires.

Exercice 4. Soit $(t,\theta)\in\mathbb{R}^2$. En appliquant les techniques d'angle moitié à $e^{it}+e^{i\theta}$, factoriser $\cos(t)+\cos(\theta)$.
Solution : $\cos(t)+\cos(\theta)=\operatorname{Re}\left(e^{it}+e^{i\theta}\right)=2\cos\left(\dfrac{t-\theta}{2}\right)\operatorname{Re}\left(e^{i\frac{t+\theta}{2}}\right)=2\cos\left(\dfrac{t-\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{t+\theta}{2}\right)$.

Exercice 5. Soit $\theta\in]-\pi,\pi[$. **Linéariser** $\cos^3(\theta)$ (c'est-à-dire modifier cette expression pour faire disparaître le produit et se ramener à une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques).
Solution : On applique successivement les formules d'Euler, le binôme de Newton, et de nouveau les formules d'Euler :

$$\begin{aligned}\cos^3(\theta)&=\frac{(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^3}{8}\\&=\frac{1}{8}\left(e^{3i\theta}+3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}+e^{-3i\theta}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}}{2}+3\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)\\\cos^3(\theta)&=\frac{\cos(3\theta)+3\cos(\theta)}{4}.\end{aligned}$$

Exercice 6. Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer la somme $S=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(3k)$.

Solution : Soit $T=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}e^{i3k}$, alors $S=\operatorname{Re}(T)$. On commence donc par calculer T. Par la formule de somme géométrique (puisque $e^{i3}\neq 1$) puis en appliquant la formule de l'angle moitié, on trouve :

$$T=\sum_{k=0}^{n}(e^{3i})^k=\frac{1-e^{3i(n+1)}}{1-e^{3i}}=\frac{e^{\frac{3i(n+1)}{2}}(e^{-\frac{3i(n+1)}{2}}-e^{\frac{3i(n+1)}{2}})}{e^{\frac{3i}{2}}(e^{-\frac{3i}{2}}-e^{\frac{3i}{2}})}=\frac{e^{\frac{3i(n+1)}{2}}(-2i\sin(\frac{3(n+1)}{2}))}{e^{\frac{3i}{2}}(-2i\sin(\frac{3}{2}))}=\frac{\sin(\frac{3(n+1)}{2})}{\sin(\frac{3}{2})}e^{\frac{3in}{2}}.$$

D'où par passage à la partie réelle, $S=\frac{\sin(\frac{3(n+1)}{2})}{\sin(\frac{3}{2})}\cos\left(\frac{3n}{2}\right)$.

3.3 Formule de Moivre

Proposition 3.7 (Formule de Moivre)

Soit $\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$,
$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta).$$

Démonstration. Il suffit de passer sous forme exponentielle : $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$. □

Exercice 7. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
Solution : La formule de Moivre donne :

$$\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)=(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^3=\cos^3(\theta)+3i\cos^2(\theta)\sin(\theta)-3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-i\sin^3(\theta).$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on trouve :

$$\cos(3\theta)=\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)\sin^2(\theta)\quad\text{et}\quad\sin(3\theta)=3\cos^2(\theta)\sin(\theta)-\sin^3(\theta).$$

4 Forme trigonométrique

4.1 Forme trigonométrique et arguments

Définition 4.1 (Argument)

Soit $z\in\mathbb{C}^*$. Tout réel θ tel que $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)=|z|\,e^{i\theta}$ est appelé un **argument** de z.

Remarque. Si θ est un argument de z, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\theta + 2k\pi$ est encore un argument de z. De plus, si θ et θ' sont deux arguments de z, alors $\theta \equiv \theta'[2\pi]$.

Remarque. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On suppose que $a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Alors :

$$a = r(\cos\theta) \text{ et } b = r(\sin\theta),$$

$$r = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Exercice 8. Trouver le module et un argument de $z = 1+i$.
Solution : $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, donc le module de z vaut $\sqrt{2}$.
De plus, $z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Or $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc $\frac{\pi}{4}$ est un argument de z.

Définition 4.2 (Forme trigonométrique)

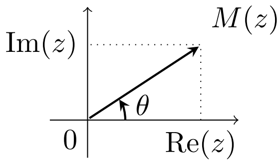
Tout nombre complexe z non nul s'écrit sous la **forme trigonométrique**

$$z = re^{i\theta},$$

avec $r > 0$ et θ réel. On a alors $r = |z|$ et θ est un argument de z.

Remarque. Attention, contrairement à la forme algébrique, cette écriture n'est pas unique (puisqu'on peut trouver plusieurs arguments différents).

Remarque. Soit z un nombre complexe d'argument θ et M son image dans le plan complexe. Alors θ correspond à une valeur de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ en radians.



4.2 Transformation de $a\cos(t) + b\sin(t)$

Proposition 4.3 (Transformation de $a\cos(t) + b\sin(t)$)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Alors il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}$, $a\cos(t) + b\sin(t) = r\cos(t-\varphi)$.

Démonstration. On pose $r = \sqrt{a^2+b^2} > 0$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a\cos(t) + b\sin(t) = r\left(\frac{a}{r}\cos(t) + \frac{b}{r}\sin(t)\right).$$

Or $\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{r^2} = 1$. Donc il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{a}{r} = \cos(\varphi)$ et $\frac{b}{r} = \sin(\varphi)$. Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a\cos(t) + b\sin(t) = r\left(\cos(\varphi)\cos(t) + \sin(\varphi)\sin(t)\right) = r\cos(t-\varphi).$$

□

Exercice 9. Soit $t \in \mathbb{R}$, déterminer une expression de $\cos(t) + \sqrt{3}\sin(t)$ sous la forme $r\cos(t-\varphi)$.
Solution : On calcule $r = \sqrt{1+3} = 2$. D'où la factorisation :

$$\cos(t) + \sqrt{3}\sin(t) = 2\left(\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(t)\right).$$

On reconnaît maintenant $\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, d'où :

$$\cos(t) + \sqrt{3}\sin(t) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(t) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(t)\right) = 2\cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right).$$