Étude de suites

Exercice 1 (★). Déterminer le comportement asymptotique (convergence/divergence, limite éventuelle) des suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

1. $a_n = \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$
2. $b_n = \left((-1)^n + n^3\right) e^{-n}$
3. $c_n = \left((-1)^n + e^{-n}\right) n^3$
4. $d_n = (\cos(n) + 3)\ln(n)$
5. $e_n = \dfrac{3n+1}{2n^2-1}$
6. $f_n = \dfrac{2n^2+3^n+1}{5n^2+4n-2}$
7. $g_n = \dfrac{(\ln(n))^2-2}{\ln(n)+n}$
8. $h_n = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}n) - 3n}{n+3}$
9. $i_n = \dfrac{(-1)^n + 2n}{n^2}$
10. $j_n = n^2\left(1 + \cos\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)\right)$
11. $k_n = n^2\left(\dfrac{11}{10} + \cos\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)\right)$
12. $\ell_n = n\left(2 + \cos\left(\dfrac{\pi n}{4}\right)\right) - \sqrt{n}$

Résultat attendu :

1. Converge vers 0
2. Converge vers 0
3. Diverge
4. Diverge vers $+\infty$
5. Converge vers 0
6. Diverge vers $+\infty$
7. Converge vers 0
8. Converge vers -3
9. Converge vers 0
10. Diverge
11. Diverge vers $+\infty$
12. Diverge vers $+\infty$

Exercice 2 (★). Démontrer que la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left((-1)^n - \dfrac{3}{n}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi n}{7}\right)$ est bornée.

Résultat attendu : On étudie $(|u_n|)$ pour éviter les problèmes de signe, puis un calcul direct donne une minoration par -4 et une majoration par 4.

Exercice 3 (★★). Démontrer que la suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{\ln(n+1)}{n+1} \times \dfrac{n^2+1}{n^2+2} + 3e^{-n} - 10\sin(n)$ est bornée.

Résultat attendu : Un calcul direct donne une minoration par -10 et une majoration par 14. On peut aussi utiliser les propriétés des suites convergentes, qui donnent l'existence d'un majorant sans fournir sa valeur.

Exercice 4 (★). Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $v_0 \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n(1-v_n)$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0,1]$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Résultat attendu : La suite v est décroissante, convergente et converge vers 0.

Exercice 5 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^3+k^3}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et donner sa limite.

Résultat attendu : On montre par théorème d'encadrement que v converge vers 0.

Exercice 6 (★). Démontrer que la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(\frac{\pi k^2}{7}) + 2}{2^k}$ est convergente.

Résultat attendu : On montre que u est croissante et majorée par 6, donc convergente.

Exercice 7 (★★). Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout n entier non nul par : $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
2. Montrer que pour tout n non nul, $u_{2n} - \dfrac{1}{2}u_n \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.
3. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Résultat attendu :

1. La suite est décroissante et minorée, donc converge.
2. On simplifie l'expression puis majore la somme obtenue.
3. On complète l'inégalité de la question précédente pour obtenir un encadrement de $u_{2n} - \frac{1}{2}u_n$, puis on passe à la limite dans cet encadrement. La suite u converge vers 0.

Exercice 8 (★★). Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que les trois suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{5n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que la suite u converge.
Résultat attendu : On utilise les propriétés des suites extraites pour montrer que $(u_{5n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite, puis que $(u_{5n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite. On conclut ensuite par propriété de cours.

Exercice 9 (★★). Montrer que la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ converge.
Indication : on pourra commencer par étudier les suites (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}).
Résultat attendu : On montre que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes, elles convergent donc vers une même limite. La convergence de u en découle.

Exercice 10 (★★★). On définit les deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $b_0 > a_0 > 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Montrer que ces deux suites sont bien définies et qu'elles convergent vers un même réel ℓ.
Résultat attendu : On montre séparément la convergence des deux suites, puis on passe à la limite dans la deuxième relation de récurrence.

Exercice 11 (★). Soit u la suite réelle définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer une expression de u_n en fonction de n.
Résultat attendu : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 3^n + 1$.

Exercice 12 (★). Soit w la suite définie par $w_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = -3w_n + 1$.

1. Déterminer le terme général de w.
2. Déterminer le comportement de w_n (convergence, divergence, limite) lorsque $n \to +\infty$.

Résultat attendu :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{1}{4}(-3)^n + \frac{1}{4}$.
2. (w_{2n}) diverge vers $+\infty$ et (w_{2n+1}) diverge vers $-\infty$, donc (w_n) diverge.

Exercice 13 (★★). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et u la suite réelle définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \lambda u_n + 3$. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer une expression de u_n en fonction de n.
Résultat attendu : Si $\lambda \neq 1$, $u_n = \lambda^n \left(2 - \frac{3}{1-\lambda}\right) + \frac{3}{1-\lambda}$. Si $\lambda = 1$, $u_n = 2 + 3n$.

Exercice 14 (★★). Dans chacune des situations suivantes, déterminer la limite de la suite réelle étudiée.

1. u est une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n + \frac{1}{3}$.
2. v est une suite positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leqslant \frac{3}{4} v_n$.
3. w est une suite telle que $\forall n \geqslant 3$, $\left|w_{n+1} - \sqrt{5}\right| \leqslant (e-2)\left|w_n - \sqrt{5}\right|$.

Résultat attendu : u diverge vers $+\infty$, v converge vers 0, w converge vers $\sqrt{5}$.
Pour le montrer, il faut exploiter les relations de récurrence fournies, de manière à établir des inégalités reliant le n-ième terme de la suite et son premier terme. On exploite ensuite ces inégalités avec un théorème d'encadrement ou de comparaison.

Exercice 15 (★). Pour chacune des suites réelles suivantes, exprimer le terme général de la suite en fonction de n :

1. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = 3w_{n+1} - 2w_n$, $w_0 = 0$ et $w_1 = 1$.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$, $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
3. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = -v_{n+1} - v_n$, $v_0 = 1$ et $v_1 = -1$.

Résultat attendu : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 2^n - 1$, $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n(-3n+1)$ et $v_n = \cos\left(-\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(-\frac{2n\pi}{3}\right)$.

Exercice 16 (★★). Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$, $u_0 = 1$, $u_1 = 2$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $v_n = \ln(u_n)$ existe.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire double.
3. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Résultat attendu :

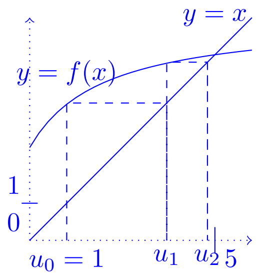
1. On montre par récurrence double que u_n existe et $u_n > 0$.
2. Par propriétés du logarithme, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{2\ln(2)}{3} - \frac{2\ln(2)}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Par passage à l'exponentielle, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{\frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}$.

Exercice 17 (★). Soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{6u_n+5}{u_n+2}$.

1. Étudier et tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{6x+5}{x+2}$. En déduire que la suite est bien définie, et tracer la représentation des réels u_0, u_1 et u_2.
2. Étudier la monotonie et les bornes éventuelles de la suite u.
3. Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.

Résultat attendu :

1. L'étude de f montre que $\mathbb{R}_+$ est stable par f, donc la suite u est bien définie.



2. La suite u est croissante et majorée (par 5 ou 6 suivant le choix de raisonnement).
3. La question 2 donne la convergence, puis le calcul se fait par théorème du point fixe : u converge vers 5.

Exercice 18 (★★). Soit u vérifiant $u_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Déterminer le comportement de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Résultat attendu : u est décroissante, et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 19 (★★★). Déterminer le comportement en $+\infty$ de la suite u définie par le premier terme $u_0 \geqslant 0$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

Résultat attendu : Si $u_0 \in \left[0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, la suite u est croissante et majorée. Sinon, elle est décroissante et minorée. Dans les deux cas, elle converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 20 (Type DS)**.** On définit la suite de terme général a_n par : $\forall n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{\sqrt{n}\binom{2n}{n}}{4^n}$.

1. Calculer a_1 puis, pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$: $a_n \leqslant \sqrt{\dfrac{n}{2n+1}}$.

   Indication : on pourra commencer par simplifier $\dfrac{n+1}{2n+3} - \dfrac{2n+1}{4n+4}$ pour en étudier le signe.
3. Déterminer le sens de variation de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis montrer qu'elle converge vers un réel ℓ tel que : $\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Résultat attendu :

1. $a_1 = \frac{\sqrt{1}\binom{2}{1}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. De plus soit $n \geqslant 1$, $a_n \neq 0$, donc on peut diviser :

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\sqrt{n+1}}{4^{n+1}} \frac{4^n}{\sqrt{n}} \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{n+1}{n}} \frac{(2n+2)!(n!)^2}{(2n)!((n+1)!)^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{n+1}{n}} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+1}{n}} \frac{2n+1}{n+1} \\
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}.
\end{aligned}$$

2. Soit $n \geqslant 1$, $\dfrac{n+1}{2n+3} - \dfrac{2n+1}{4n+4} = \dfrac{4n^2+8n+4-4n^2-8n-3}{(2n+3)(4n+4)} = \dfrac{1}{(2n+3)(4n+4)} \geqslant 0$.

   On montre alors par récurrence sur $\mathbb{N}^*$ la propriété $P(n)$: « $a_n \leqslant \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$ ».

   — $a_1 = \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{2+1}}$ donc $P(1)$ est vraie.

   — Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P(n)$ est vraie. Alors comme $a_n \neq 0$,

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} a_n \overset{P(n)}{\leqslant} \frac{a_{n+1}}{a_n}\sqrt{\frac{n}{2n+1}} \overset{1.}{=} \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}\sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \sqrt{\frac{2n+1}{4n+4}}.$$

   Or le calcul précédant la récurrence donne $\frac{n+1}{2n+3} \geqslant \frac{2n+1}{4n+4}$. Donc par croissance de $x \to \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$, $a_{n+1} \leqslant \sqrt{\frac{n+1}{2n+3}} = \sqrt{\frac{n+1}{2(n+1)+1}}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

   D'où le résultat demandé : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \overset{1.}{=} \dfrac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}} = \dfrac{\sqrt{(2n+1)^2}}{\sqrt{4n(n+1)}} = \sqrt{\dfrac{4n^2+4n+1}{4n^2+4n}} \geqslant \sqrt{1} = 1$, où on a conclu par croissance de la racine sur $\mathbb{R}_+$. Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

   De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant \sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2+\frac{1}{n}}} \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, puisque $\frac{1}{n} \geqslant 0$. Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Étant croissante et majorée, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ.

   La croissance et la majoration donnent de plus : $\forall n \geqslant 1$, $\frac{1}{2} = a_1 \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. En passant à la limite dans cette inégalité, on trouve $\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.