Calcul de primitives

Exercice 1 (★). Après avoir justifié leur existence (ou éventuellement avoir déterminé pour quels $x \in \mathbb{R}$ elles étaient définies), calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_{-1}^{1}(2t^2-3)dt$
2. $\int_{-1}^{x}(2s+1)^4 ds$
3. $\int_0^x \frac{dt}{(2t+1)^4}$
4. $\int_x^2 \sqrt{u+1}du$
5. $\int_{2x}^{x^2} 2s(s^2+1)^3 ds$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)\sin^5(2t)dt$
7. $\int_1^{1+2x} \frac{\ln(u)}{u}du$

Résultat attendu : La justification d'existence se fait par étude de la continuité.

1. $\frac{-14}{3}$
2. $\frac{(2x+1)^5+1}{10}$
3. $\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{(2x+1)^3}\right)$ (si $x \in]-\frac{1}{2},+\infty[$)
4. $\frac{2}{3}\left(3^{\frac{3}{2}}-(x+1)^{\frac{3}{2}}\right)$ (si $x \in [-1,+\infty[$)
5. $\frac{(x^4+1)^4-(4x^2+1)^4}{4}$
6. 0
7. $\frac{(\ln(1+2x))^2}{2}$ (si $x \in]-\frac{1}{2},+\infty[$)

Exercice 2 (★). Après avoir justifié leur existence (ou éventuellement avoir déterminé pour quels $x \in \mathbb{R}$ elles étaient définies), calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_{-x}^{x}\sin(3t)dt$
2. $\int_{x^2}^{1}\cos\left(\frac{s-1}{2}\right)ds$
3. $\int_0^x \cos^2(t)dt$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{5}}\sin^2(5u)du$
5. $\int_{-x^2}^{2x^2} e^{3t}dt$
6. $\int_0^1 e^{(2i-5)t}dt$
7. $\int_1^x se^{2s^2}ds$

Résultat attendu : La justification d'existence se fait par étude de la continuité.

1. 0
2. $-2\sin\left(\frac{x^2-1}{2}\right)$
3. $\frac{x}{2}+\frac{\sin(2x)}{4}$
4. $\frac{\pi}{10}$
5. $\frac{e^{6x^2}-e^{-3x^2}}{3}$
6. $\frac{(1-e^{2i-5})(5+2i)}{29}$
7. $\frac{e^{2x^2}-e^2}{4}$

Exercice 3 (★). Après avoir justifié leur existence (ou éventuellement avoir déterminé pour quels $x \in \mathbb{R}$ elles étaient définies), calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_3^x \frac{1}{t+2}dt$
2. $\int_{-5}^{x}\frac{1}{t+2}dt$
3. $\int_{-1}^{x}\frac{1}{3-2s}ds$
4. $\int_{-1}^{1}\frac{2u+1}{1+u+u^2}du$
5. $\int_0^{3x}\tan(t)dt$
6. $\int_{-1}^{0}\frac{3t}{\sqrt{2t^2+1}}dt$
7. $\int_{x-1}^{x+1}\frac{1}{e^s\sqrt{2e^{-s}+1}}ds$

Résultat attendu : La justification d'existence se fait par étude de la continuité.

1. $\ln(x+2)-\ln(5)$ (si $x \in]-2,+\infty[$)
2. $\ln(-x-2)-\ln(3)$ (si $x \in]-\infty,-2[$)
3. $\ln\left(\sqrt{\frac{5}{3-2x}}\right)$ (si $x \in]-\infty,\frac{3}{2}[$)
4. $\ln(3)$
5. $-\ln(\cos(3x))$ (si $x \in]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}[$)
6. $\frac{3}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)$
7. $\sqrt{2e^{-x+1}+1}-\sqrt{2e^{-x-1}+1}$

Exercice 4 (★). Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de validité de la primitive calculée.

1. $f_1 : t \mapsto \cos(t)e^{-t}$
2. $f_2 : t \mapsto \sin(2t)e^t$
3. $f_3 : t \mapsto \sin^2(t)e^t$

Résultat attendu :

1. $\forall t \in \mathbb{R},\ F_1(t) = \frac{e^{-t}}{2}(\sin(t)-\cos(t))$
2. $\forall t \in \mathbb{R},\ F_2(t) = \frac{e^t}{5}(\sin(2t)-2\cos(2t))$
3. $\forall t \in \mathbb{R},\ F_3(t) = \frac{e^t}{2}-\frac{e^t}{10}(\cos(2t)+2\sin(2t))$

Exercice 5 (★). Calculer les intégrales suivantes :

1. $A = \int_1^2 t\ln(t)dt$
2. $B = \int_0^1 t\arctan(t)dt$

Résultat attendu : Dans les deux cas, on procède par intégration par parties.

1. $A = 2\ln(2)-\frac{3}{4}$
2. $B = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

Exercice 6 (★). En procédant par intégration par parties, déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de validité de la primitive calculée.

1. $f_1 : t \mapsto t\sin(t)$
2. $f_2 : t \mapsto t\ln(t)$
3. $f_3 : t \mapsto t^2e^{-t}$
4. $f_4 : t \mapsto \arctan(t)$
5. $f_5 : t \mapsto t\sin(t)\cos(2t)$

Résultat attendu :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_1(x) = \sin(x)-x\cos(x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F_2(x) = \ln(x)\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{4}$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_3(x) = e^{-x}(-x^2-2x-2)$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_4(x) = x\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_5(x) = \frac{x\cos(x)}{2}-\frac{x\cos(3x)}{6}+\frac{\sin(3x)}{18}-\frac{\sin(x)}{2}$

Exercice 7 (★). Calculer les intégrales suivantes en effectuant le changement de variable proposé :

1. $M = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))(\sin(x))^2 dx \quad (u = \sin(x))$
2. $L = \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{t+1}} \quad (u = \sqrt{t+1})$

Résultat attendu :

1. $M = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}$
2. $L = \frac{14}{15}\sqrt{2} - \frac{16}{15}$

Exercice 8 (★). En utilisant des changements de variables, déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de validité de la primitive calculée.

1. $f_1 : t \mapsto \frac{2t}{1+t^4}$
2. $f_2 : t \mapsto \frac{e^{2t}}{1+e^t}$
3. $f_3 : t \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}$
4. $f_4 : t \mapsto \frac{\sin(t)\cos(t)}{\sin^2(t)+1}$

Résultat attendu :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_1(x) = \arctan(x^2)$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_2(x) = e^x - \ln(1+e^x)$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_3(x) = 2\arctan(e^x)$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_4(x) = \frac{\ln(\sin^2(x)+1)}{2}$

Exercice 9 (★★). Calculer l'intégrale $I = \int_1^4 \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{4+x^2} dx$ en posant le changement de variable $t = \frac{4}{x}$.
Résultat attendu : Le changement de variable donne $I = -I$, donc $I = 0$.

Exercice 10 (★★). En utilisant des changements de variables, déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de validité de la primitive calculée.

1. $g_1 : t \mapsto \frac{e^t - 1}{e^t + 1}$
2. $g_2 : t \mapsto \frac{t^2}{(1-t^2)^{3/2}}$
3. $g_3 : t \mapsto \arcsin^2(t)$

Indication : pour g_2, poser $t = \sin(s)$.

Résultat attendu :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ G_1(x) = 2\ln(e^x+1) - \ln(e^x)$
2. $\forall x \in]-1,1[,\ G_2(x) = \tan(\arcsin(x)) - \arcsin(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin(x)$
3. $\forall x \in [-1,1],\ G_3(x) = x\arcsin(x) + 2\arcsin(x)\sqrt{1-x^2} - 2x$

Exercice 11 (★). Déterminer une primitive (intervalle(s) de validité à préciser) de :

1. $f : t \mapsto \frac{1}{2t+1}$
2. $g : t \mapsto \frac{2t}{2t+1}$
3. $h : t \mapsto \frac{3t+1}{2t+1}$
4. $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t^2-2t-3}$
5. $\psi : t \mapsto \frac{1}{2t^2-3t-2}$
6. $\mu : t \mapsto \frac{1}{4t^2+4t+1}$
7. $u : t \mapsto \frac{1}{t^2-4t+5}$
8. $v : t \mapsto \frac{1}{t^2+t+1}$.

Résultat attendu :

1. $\forall x \in]-\infty, -\frac{1}{2}[$ ou $\forall x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$, $F(x) = \frac{\ln(|2x+1|)}{2}$.
2. $\forall x \in]-\infty, -\frac{1}{2}[$ ou $\forall x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$, $G(x) = x - \frac{\ln(|2x+1|)}{2}$.
3. $\forall x \in]-\infty, -\frac{1}{2}[$ ou $\forall x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$, $H(x) = \frac{3x}{2} - \frac{\ln(|4x+2|)}{4}$.
4. $\forall x \in]-\infty, -1[$ ou $\forall x \in]-1, 3[$ ou $\forall x \in]3, +\infty[$, $\Phi(x) = \frac{\ln(|x-3|)}{4} - \frac{\ln(|x+1|)}{4}$.
5. $\forall x \in]-\infty, -\frac{1}{2}[$ ou $\forall x \in]-\frac{1}{2}, 2[$ ou $\forall x \in]2, +\infty[$, $\Psi(x) = \frac{\ln(|t-2|)}{5} - \frac{\ln\left(\left|t+\frac{1}{2}\right|\right)}{5}$.
6. $\forall x \in]-\infty, -\frac{1}{2}[$ ou $\forall x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$, $M(x) = -\frac{1}{4x+2}$.
7. $\forall x \in \mathbb{R},\ U(x) = \arctan(x-2)$.
8. $\forall x \in \mathbb{R},\ V(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2(t+1)}{\sqrt{3}}\right)$.

Exercice 12 (★★). Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. À quelle condition les intégrales suivantes sont-elles définies, et que valent-elles ?

1. $\int_0^\pi (1 - pt)\sin(pt)dt$
2. $\int_{-1}^x (t + x)^p dt$
3. $\int_0^1 \frac{e^{2s}}{e^s+1} ds$
4. $\int_{-x}^x \frac{ds}{\sqrt{1-as}}$
5. $\int_0^{e^p} \ln(1 + r^2)dr$
6. $\int_1^2 \frac{dt}{t+t\ln(t)}$
7. $\int_{-a}^{2a} t\sqrt{p - t^2}dt$
8. $\int_1^x \frac{\ln(au)}{\sqrt{2u}} du$
9. $\int_0^{x^2} \frac{ds}{s^2-p^2}$
10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)e^{a\sin(t)}dt$

Résultat attendu :

1. $\frac{1-(1-p\pi)\cos(p\pi)-\sin(p\pi)}{p}$
2. $\frac{(2x)^{p+1}-(x-1)^{p+1}}{p+1}$
3. $e - 1 - \ln(e + 1) + \ln(2)$
4. $-\frac{2}{a}\left(\sqrt{1 - ax} - \sqrt{1 + ax}\right)$ (il faut $ax \in [-1, 1]$)
5. $e^p \ln(1 + e^{2p}) - 2e^p + 2\arctan(e^p)$
6. $\ln(1 + \ln(2))$
7. $\frac{(\sqrt{p-a^2})^3-(\sqrt{p-4a^2})^3}{2}$ (il faut $p \geqslant 4a^2$)
8. $\ln(ax)\sqrt{x} - \ln(a) - 2\sqrt{x} + 2$ (il faut $x > 0$)
9. $\frac{1}{2p}\ln\left(\left|\frac{x^2-p}{x^2+p}\right|\right)$ (il faut $x^4 \neq p^2$)
10. $\frac{2}{a}\left(e^a - \frac{e^a}{a} + \frac{1}{a}\right)$

Exercice 13 (★). Étudier le sens de variation de la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = \int_{-2}^x \frac{u-1}{u^4+1} du$.

Résultat attendu : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \frac{x-1}{x^4+1}$. Donc g est décroissante sur $]-\infty, 1[$ et croissante sur $]1, +\infty[$.

Exercice 14 (★★). On pose, pour tout $x > 0$, $G(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$. Justifier que G est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, déterminer l'expression de sa dérivée, et ses variations.

Indication : inutile de calculer une primitive de $t \mapsto \frac{e^t}{t}$.

Résultat attendu : $\forall x > 0$, $G'(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{x} \geqslant 0$. Donc G est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 15 (★). Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Si f est impaire sur $[-a, a]$, que peut-on dire de $\int_{-a}^a f(x)dx$? Prouvez-le.
2. Même question si f est paire.
3. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, que peut-on dire de $\int_{a+T}^{b+T} f(t)dt$? Prouvez-le.

Résultat attendu : Des changements de variables judicieux donnent :

1. $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$
2. $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(t)dt$
3. $\int_{a+T}^{b+T} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$

Exercice 16 (Type DS)**.** Pour tout couple d'entiers $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on note $I(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.

1. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, justifier l'existence de $I(p,q)$. Calculer $I(0,0)$, $I(1,0)$ et $I(1,1)$.
2. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $I(p,q) = I(q,p)$.
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, déterminer $I(p,0)$.
4. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $I(p,q+1) = \frac{q+1}{p+1} I(p+1,q)$.
5. Déduire des deux questions précédentes la valeur pour $p \in \mathbb{N}$ de $I(p,1)$, puis celle de $I(p,2)$.
6. Montrer par récurrence que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.
7. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. En déduire la valeur de l'intégrale $J(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(\theta)\cos^{2q+1}(\theta) d\theta$.
   Indication : poser le changement de variable $t = \sin^2(\theta)$.

Résultat attendu :

1. Pour tous $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, la fonction $t \mapsto t^p(1-t)^q$ est continue sur $[0,1]$, donc $I(p,q)$ est bien définie. On calcule $I(0,0) = \int_0^1 1dt = 1$, puis $I(1,0) = \int_0^1 tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$ et :
$$I(1,1) = \int_0^1 t(1-t)dt = \int_0^1 tdt - \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{2} - \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$
2. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. La fonction $t \mapsto 1-t$ est de classe C^1 sur $[0,1]$, on peut donc poser le changement de variable $s = 1-t$. On a alors $ds = -dt$, et :
$$I(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt = \int_1^0 (1-s)^p s^q (-ds) = \int_0^1 s^q(1-s)^p ds = I(q,p).$$
3. Soit $p \in \mathbb{N}$, $I(p,0) = \int_0^1 t^p dt = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$.
4. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Les fonctions $t \mapsto \frac{t^{p+1}}{p+1}$ et $t \mapsto (1-t)^{q+1}$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$, donc une intégration par parties donne : $I(p,q+1) = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^{q+1}dt = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}(1-t)^{q+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{p+1}}{p+1}(-1)(q+1)(1-t)^q dt$.
   On en déduit alors $I(p,q+1) = 0 + \dfrac{q+1}{p+1}\displaystyle\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^q dt = \dfrac{q+1}{p+1} I(p+1,q)$.
5. Soit $p \in \mathbb{N}$. La question 4 donne $I(p,0+1) = \frac{0+1}{p+1} I(p+1,0)$. Or, d'après la question 3, $I(p+1,0) = \frac{1}{p+2}$. Donc $I(p,1) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$.
   Soit $p \in \mathbb{N}$, la question 4 donne $I(p,1+1) = \frac{1+1}{p+1} I(p+1,1)$. Appliquer le résultat précédent (valable pour tout entier) en $p+1$ donne $I(p+1,1) = \frac{1}{(p+2)(p+3)}$. Donc $I(p,2) = \frac{2}{(p+1)(p+2)(p+3)}$.
6. Soit $q \in \mathbb{N}$, on pose $P(q)$: « $\forall p \in \mathbb{N}$, $I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$ ».
   — $\forall p \in \mathbb{N}$, $I(p,0) = \frac{1}{p+1} = \frac{p!}{(p+1)!} = \frac{p!0!}{(p+0+1)!}$, donc $P(0)$ est vraie.
   — Soit $q \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(q)$ est vraie. Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la question 4 et $P(q)$,
$$I(p,q+1) = \frac{q+1}{p+1} I(p+1,q) = \frac{q+1}{p+1}\frac{(p+1)!q!}{(p+q+2)!} = \frac{p!(q+1)!}{(p+q+2)!}.$$
   Donc $P(q+1)$ est vraie.
   Donc pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.
7. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. La fonction $\theta \mapsto \sin^2(\theta)$ est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc on peut poser le changement de variable $t = \sin^2(\theta)$. On a alors $dt = 2\cos\theta \sin\theta d\theta$. Préparons son application :
$$J(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^p (\cos^2\theta)^q \sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^p(1-\sin^2\theta)^q(2\sin\theta\cos\theta)d\theta$$
   Le changement de variable et les questions précédentes donnent alors :
$$J(p,q) = \frac{1}{2}\int_0^1 t^p(1-t)^q dt = \frac{1}{2} I(p,q) = \frac{1}{2}\frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}.$$