Applications des nombres complexes

Exercice 1 (★). Sans faire le moindre calcul, déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1. $z = 1$ 2. $z = -1$ 3. $z = 5$ 4. $z = -5$ 5. $z = i$ 6. $z = 2i$ 7. $z = -5i$ 8. $z = 7e^{i\frac{\pi}{5}}$

Exercice 2 (★). Déterminer les racines carrées de $1 + i$:

1. en utilisant la forme trigonométrique de $1 + i$;
2. puis en utilisant la forme algébrique (chercher les $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(a + ib)^2 = 1 + i$).

Exercice 3 (★). Déterminer les racines carrées de $2i - 2$:

1. en utilisant la forme trigonométrique de $2i - 2$;
2. puis en utilisant la forme algébrique (chercher les $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(a + ib)^2 = 2i - 2$).

Exercice 4 (★). Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2 + (i + 3)z + 2 - 2i = 0$.

Exercice 5 (★). Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 3(i - 1)z + 2 - 3i = 0$.

Exercice 6 (★). Donner toutes les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $z^5 = i$. Combien y en a-t-il de différentes ? Montrer que leur somme fait 0.

Exercice 7 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(i + z)^n = (i - z)^n$.

Exercice 8 (★★). Soit $n \geqslant 2$ un entier. On considère l'équation $(z + i)^n = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que cette équation admet exactement n solutions, qu'on notera z_k avec $k \in [\![0, n - 1]\!]$.
2. Calculer la somme de ces solutions.
3. A l'aide d'une factorisation de type "angle milieu", déterminer $|z_k|$, pour tout $k \in [\![0, n - 1]\!]$.

Exercice 9 (★★★). Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2 + \frac{1}{z^2})^2 + (z + \frac{1}{z})^2 = 4$.

Exercice 10 (★). Résoudre l'équation $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$ sur $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 11 (★★). Pour $z \in \mathbb{C}$ on pose $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

1. Résoudre l'équation $e^{iz} = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
2. En déduire les solutions de l'équation $\cos(z) = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 12 (★). On considère le nombre complexe $z = 1 + 2i$. Quelle est son image par :

1. La translation de vecteur $1 - i$?
2. La rotation de centre $3i$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$?
3. L'homothétie de centre $-1 + i$ et de rapport 3 ?

Exercice 13 (Type DS)**.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $pz^p = \sum_{k=0}^{p-1} z^k$, qui s'écrit aussi $pz^p = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{p-2} + z^{p-1}$. Le but de l'exercice est de montrer que les solutions de (E) autres que $z = 1$ ont toutes un module strictement inférieur à 1. Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. On suppose que l'équation (E) admet une solution $a \neq 1$ de la forme $a = e^{i\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer qu'on a alors : $e^{i\frac{(p+1)}{2}\theta} = \dfrac{\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)}{p\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.
   Indication : dans un premier temps, se ramener à un calcul de somme géométrique.
   (b) En déduire que $e^{i\frac{p+1}{2}\theta}$ vaut 1 ou -1.
   Indication : on pourra remarquer que la question précédente donne $e^{i\frac{p+1}{2}\theta} \in \mathbb{U} \cap \mathbb{R}$.
   (c) En déduire que $a^{p+1} = 1$ (c'est-à-dire que $a \in \mathbb{U}_{p+1}$).
   (d) Rappeler ce que vaut l'ensemble $\mathbb{U}_{p+1}$.
   (e) Montrer que $\sum_{k=0}^{p} a^k = 0$, en déduire une contradiction.
2. On suppose que (E) admet une solution $b \in \mathbb{C}$ telle que $|b| > 1$.
   (a) Vérifier qu'alors : $p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{b^k}$.
   (b) En considérant le module dans cette égalité, en déduire une contradiction.
3. Conclure.