Applications des nombres complexes

Exercice 1 (★). Sans faire le moindre calcul, déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1. $z = 1$ 2. $z = -1$ 3. $z = 5$ 4. $z = -5$ 5. $z = i$ 6. $z = 2i$ 7. $z = -5i$ 8. $z = 7e^{i\frac{\pi}{5}}$

Résultat attendu :

1. ± 1 2. $\pm i$ 3. $\pm\sqrt{5}$ 4. $\pm i\sqrt{5}$ 5. $\pm e^{i\frac{\pi}{4}}$ 6. $\pm\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ 7. $\pm\sqrt{5}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ 8. $\pm\sqrt{7}e^{i\frac{\pi}{10}}$

Exercice 2 (★). Déterminer les racines carrées de $1+i$:

1. en utilisant la forme trigonométrique de $1+i$;
2. puis en utilisant la forme algébrique (chercher les $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(a+ib)^2 = 1+i$).

Résultat attendu :

1. Les racines carrées sont $\pm\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$.
2. Les racines carrées sont $\pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$.

Exercice 3 (★). Déterminer les racines carrées de $2i-2$:

1. en utilisant la forme trigonométrique de $2i-2$;
2. puis en utilisant la forme algébrique (chercher les $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(a+ib)^2 = 2i-2$).

Résultat attendu :

1. Les racines carrées sont $\pm\sqrt{2\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{8}}$.
2. Les racines carrées sont $\pm(\sqrt{\sqrt{2}-1} + i\sqrt{\sqrt{2}+1})$.

Exercice 4 (★). Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2 + (i+3)z + 2 - 2i = 0$.
Résultat attendu : Le discriminant vaut $\Delta = -2i$, dont les racines complexes sont $\pm(1-i)$. Cela donne comme solutions de l'équation $-1+i$ et $2i$.

Exercice 5 (★). Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 3(i-1)z + 2 - 3i = 0$.
Résultat attendu : Le discriminant vaut $\Delta = -6i - 8$, dont les racines complexes sont $\pm(1-3i)$. Cela donne comme solutions de l'équation 1 et $2-3i$.

Exercice 6 (★). Donner toutes les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $z^5 = i$. Combien y en a-t-il de différentes ? Montrer que leur somme fait 0.
Résultat attendu : L'ensemble des solutions est $\left\{e^{i\frac{\pi}{10}} \times e^{\frac{2ik\pi}{5}} | k \in [\![0,4]\!]\right\} = \left\{e^{i\frac{\pi}{10}}, e^{i\frac{5\pi}{10}}, e^{i\frac{9\pi}{10}}, e^{i\frac{13\pi}{10}}, e^{i\frac{17\pi}{10}}\right\}$. Il y a donc cinq solutions différentes. Le calcul de somme se fait ensuite au choix en se ramenant aux racines 5-ièmes de l'unité ou en utilisant les propriétés des sommes géométriques.

Exercice 7 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(i+z)^n = (i-z)^n$.
Résultat attendu : On se ramène aux racines n-ièmes de l'unité. Suivant les choix effectués au cours du calcul, l'ensemble des solutions s'écrit $\left\{-\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right) \middle| k \in [\![0, n-1]\!] \setminus \{\frac{n}{2}\}\right\}$ ou $\left\{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right) \middle| k \in [\![0, n-1]\!] \setminus \{\frac{n}{2}\}\right\}$.

Exercice 8 (★★). Soit $n \geqslant 2$ un entier. On considère l'équation $(z+i)^n = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que cette équation admet exactement n solutions, qu'on notera z_k avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.
2. Calculer la somme de ces solutions.
3. A l'aide d'une factorisation de type "angle milieu", déterminer $|z_k|$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Résultat attendu :

1. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - i$.
2. La somme vaut $-ni$.
3. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on trouve $|z_k| = 2\left|\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{4}\right)\right|$ ou $|z_k| = 2\left|\cos\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$.

Exercice 9 (★★★). Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2 + \frac{1}{z^2})^2 + (z + \frac{1}{z})^2 = 4$.
Résultat attendu : Comme on ne sait pas résoudre cette équation, il faut poser une nouvelle variable (exprimée en fonction de z) qui permettra de se ramener à des formes connues.
L'ensemble des solutions est $\{i, -i, \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \frac{\sqrt{3}-i}{2}, \frac{-\sqrt{3}-i}{2}, \frac{-\sqrt{3}+i}{2}\}$.

Exercice 10 (★). Résoudre l'équation $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$ sur $z \in \mathbb{C}$.
Résultat attendu : $3\sqrt{3} - 3i = 6e^{-i\frac{\pi}{6}}$, donc l'ensemble des solutions est $\{\ln(6) + i(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi) | k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 11 (★★). Pour $z \in \mathbb{C}$ on pose $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

1. Résoudre l'équation $e^{iz} = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
2. En déduire les solutions de l'équation $\cos(z) = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Résultat attendu :

1. Le calcul se fait en utilisant la forme algébrique de z. L'ensemble des solutions est $\{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.
2. On se ramène par calcul à la question précédente, l'ensemble des solutions est donc $\{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 12 (★). On considère le nombre complexe $z = 1 + 2i$. Quelle est son image par :

1. La translation de vecteur $1 - i$?
2. La rotation de centre $3i$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$?
3. L'homothétie de centre $-1 + i$ et de rapport 3 ?

Résultat attendu :

1. L'image est $2 + i$.
2. L'image est $\sqrt{2} + 3i$.
3. L'image est $5 + 4i$.

Exercice 13 (Type DS)**.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $pz^p = \sum_{k=0}^{p-1} z^k$, qui s'écrit aussi $pz^p = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{p-2} + z^{p-1}$. Le but de l'exercice est de montrer que les solutions de (E) autres que $z = 1$ ont toutes un module strictement inférieur à 1. Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. On suppose que l'équation (E) admet une solution $a \neq 1$ de la forme $a = e^{i\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer qu'on a alors : $e^{i\frac{(p+1)}{2}\theta} = \frac{\sin(\frac{p\theta}{2})}{p\sin(\frac{\theta}{2})}$.
   Indication : dans un premier temps, se ramener à un calcul de somme géométrique.
   (b) En déduire que $e^{i\frac{p+1}{2}\theta}$ vaut 1 ou -1.
   Indication : on pourra remarquer que la question précédente donne $e^{i\frac{p+1}{2}\theta} \in \mathbb{U} \cap \mathbb{R}$.
   (c) En déduire que $a^{p+1} = 1$ (c'est-à-dire que $a \in \mathbb{U}_{p+1}$).
   (d) Rappeler ce que vaut l'ensemble $\mathbb{U}_{p+1}$.
   (e) Montrer que $\sum_{k=0}^{p} a^k = 0$, en déduire une contradiction.
2. On suppose que (E) admet une solution $b \in \mathbb{C}$ telle que $|b| > 1$.
   (a) Vérifier qu'alors : $p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{b^k}$.
   (b) En considérant le module dans cette égalité, en déduire une contradiction.
3. Conclure.

Résultat attendu :

1. (a) $a \neq 1$, donc par formule de somme géométrique, techniques d'angle moitié et formule d'Euler :

$$\sum_{k=0}^{p-1} a^k = \frac{1-a^p}{1-a} = \frac{1-e^{ip\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{p\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{p\theta}{2}} - e^{i\frac{p\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} = \frac{e^{i\frac{p\theta}{2}}(-2i)\sin(\frac{p\theta}{2})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(-2i)\sin(\frac{\theta}{2})} = e^{i\frac{(p-1)\theta}{2}} \frac{\sin(\frac{p\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}.$$

   Or a est solution de (E), cette somme vaut donc pa^p. Donc $pe^{ip\theta} = e^{i\frac{(p-1)\theta}{2}} \frac{\sin(\frac{p\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}$.

   Diviser par p et par $e^{i\frac{(p-1)\theta}{2}}$ donne alors $e^{i(p-\frac{p-1}{2})\theta} = \frac{\sin(\frac{p\theta}{2})}{p\sin(\frac{\theta}{2})}$ et donc $e^{i\frac{(p+1)\theta}{2}} = \frac{\sin(\frac{p\theta}{2})}{p\sin(\frac{\theta}{2})}$.

   (b) $e^{i\frac{(p+1)\theta}{2}} \in \mathbb{U}$ et $\frac{\sin(\frac{p\theta}{2})}{p\sin(\frac{\theta}{2})} \in \mathbb{R}$, donc $e^{i\frac{p+1}{2}\theta} \in \mathbb{U} \cap \mathbb{R}$. Or $\mathbb{U} \cap \mathbb{R} = \{-1, 1\}$ (géométriquement, il s'agit des points à la fois sur la droite réelle et sur le cercle trigonométrique). Donc $e^{i\frac{(p+1)\theta}{2}} = \pm 1$.

   (c) Comme $e^{i\frac{(p+1)\theta}{2}} = \pm 1$, on trouve $a^{p+1} = e^{i(p+1)\theta} = 1$.

   (d) Le cours donne $\mathbb{U}_{p+1} = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{p+1}} | k \in [\![0, p]\!] \right\}$.

   (e) Comme $a \neq 1$ et $a^{p+1} = 1$, $\sum_{k=0}^{p} a^k = \frac{1-a^{p+1}}{1-a} = \frac{1-1}{1-a} = 0$.

   Or a est solution de (E), donc $0 = \sum_{k=0}^{p} a^k = \sum_{k=0}^{p-1} a^k + a^p = pa^p + a^p = (p+1)a^p$.

   Donc $(p+1)a^p = 0$, ce qui implique $a = 0$: absurde puisque $a = e^{i\theta}$.

2. (a) b est solution de (E) donc $pb^p = 1 + b + b^2 + \cdots + b^{p-1}$, donc $p = \frac{1}{b^p} + \frac{1}{b^{p-1}} + \frac{1}{b^{p-2}} + \cdots + \frac{1}{b} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{b^k}$.

   (b) La question précédente et l'inégalité triangulaire donnent : $p = \left|\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{b^k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{p} \left|\frac{1}{b^k}\right| = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{|b|^k}$. Comme $|b| > 1$, on a $|b|^k > 1$ et donc $\frac{1}{|b|^k} < 1$. Donc $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{|b|^k} < \sum_{k=1}^{p} 1 = p$. Donc $p < p$: absurde.

3. On a montré qu'une solution de (E) autre que 1 ne pouvait pas avoir un module égal à 1 (question 1) ou strictement supérieur à 1 (question 2). Ces solutions ont donc toutes un module strictement inférieur à 1.