Calcul de primitives

Cours de É. Bouchet – PCSI

27 novembre 2024

Table des matières

1 Primitive d'une fonction sur un intervalle

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.1 (Primitive)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une fonction F est **une primitive** de f sur l'intervalle I lorsque F est dérivable sur I et que $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Remarque. Il n'y a pas unicité, on doit donc dire « une primitive » et pas « la primitive ».

Remarque. La notation F est classique pour noter une primitive de f, mais il faut la définir avant toute utilisation.

Proposition 1.2 (Ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit F une primitive de f sur l'intervalle I et G une fonction définie sur I. Alors G est une primitive de f sur I si et seulement si $G - F$ est une fonction constante sur I.

Démonstration. On a :

— Si G est une primitive de f sur I, alors G est dérivable sur I et $G - F$ est dérivable sur I par somme de fonctions dérivables. Sa dérivée est $f - f = 0$. Et donc, par propriété de monotonie des fonctions dérivables sur un intervalle, $G - F$ est une fonction constante sur I.

— Réciproquement, on suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tel que $\forall x \in I$, $(G - F)(x) = a$. Alors $\forall x \in I$, $G(x) = F(x) + a$. G est donc dérivable sur I par somme de fonctions dérivables, et $G' = F' + 0 = f$. Donc G est une primitive de f sur I.

□

Remarque. Attention, ce résultat (comme beaucoup d'autres du chapitre) n'est valable que pour les intervalles (pas pour les ensembles quelconques).

Proposition 1.3 (Opérations)

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit F et G des primitives de f et g sur cet intervalle I. Alors :

— $\alpha F + G$ est une primitive de $\alpha f + g$ sur I.

— $G \times F$ est une primitive de $fG + gF$ sur I.

— $\frac{1}{F}$ est une primitive de $-\frac{f}{F^2}$ sur I (si $\forall x \in I$, $F(x) \neq 0$).

Démonstration. Pour chaque résultat, il suffit de dériver la primitive annoncée pour vérifier qu'elle convient. □

Remarque. Une primitive d'un produit N'EST PAS le produit de primitives.

1.2 Primitives usuelles à connaître

Ces formules sont valides pour tout intervalle de dérivabilité de la fonction F.

$f(x) =$	$F(x) =$
e^x	e^x
k (constante)	kx
x^α, $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert)$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$

$f(x) =$	$F(x) =$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$

$f(x) =$	$F(x) =$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, on obtient par composition les formules suivantes, à connaître également :

Fonction	Primitive
$u'e^u$	e^u
$u'u^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u \rvert)$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$

Fonction	Primitive
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin(u)$

Remarque. Soit F une primitive de f. Si $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, une primitive de $x \mapsto f(ax+b)$ est $x \mapsto \frac{1}{a}F(ax+b)$.

Exemple. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 3\cos(5x+2)$ est $x \mapsto \frac{3}{5}\sin(5x+2)$.

Exemple. Si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto e^{\lambda x}$ est $x \mapsto \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}$.
Cette primitive très classique nous resservira dans la suite du chapitre.

Exercice 1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \tan(x)$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Solution : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\cos'(x)}{\cos(x)}$. Une primitive est donc la fonction F définie par $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $F(x) = -\ln(\lvert\cos(x)\rvert) = -\ln(\cos(x))$ (puisque cos est strictement positive sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$).

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+a^2}$ sur $\mathbb{R}$.
Solution : On remarque que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a}\frac{\frac{1}{a}}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}.$$

Une primitive est donc $x \mapsto \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$.

2 Intégrale d'une fonction

2.1 Généralités sur les intégrales

Proposition 2.1 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. Soit $a \in I$, on définit la fonction H par : $\forall x \in I$,

$$H(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Alors H est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Démonstration. Admis. □

Remarque. On utilise pour ce résultat la définition d'intégrale vue en Terminale, comme aire algébrique sous la courbe. Une définition plus complète sera proposée au second semestre.

Remarque. Une fonction à valeurs complexes est continue sur un intervalle I lorsque ses parties réelle et imaginaire sont des fonctions continues sur I. Si f est à valeurs complexes, son intégrale est définie par :

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x \mathrm{Re}(f(t))dt + i\int_a^x \mathrm{Im}(f(t))dt.$$

Remarque. Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Ses primitives sont donc les fonctions du type $x \mapsto \int_a^x f(t)dt + C$ où $a \in I$ et C est une constante.

Proposition 2.2 (Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit a et b deux réels de I et F une primitive de f sur I. Alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Démonstration. F et $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ sont deux primitives de f, donc il existe $K \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt + K.$$

En particulier, pour $x = a$, on trouve $F(a) = \int_a^a f(t)dt + K = K$, et pour $x = b$, $F(b) = \int_a^b f(t)dt + K$. Ces deux relations donnent bien $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. □

Remarque. Cette formule permet de mémoriser deux relations déjà connues :

$$\int_a^a f(t)dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt.$$

2.2 Quelques calculs

Exercice 3. Après avoir justifié leur existence, calculer les réels suivants :

1. pour $x > 0$, $J(x) = \int_1^x (1 - \frac{1}{t})(\ln(t) - 2)dt$.
   Solution : La fonction $t \mapsto (1 - \frac{1}{t})(\ln(t) - 2)$ est continue entre 1 et x, donc l'intégrale existe, et

$$J(x) = \int_1^x \left(\ln(t) - \frac{\ln(t)}{t} - 2 + \frac{2}{t}\right) = \left[t\ln(t) - t - \frac{1}{2}(\ln(t))^2 - 2t + 2\ln(|t|)\right]_1^x,$$

$$J(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}(\ln(x))^2 - 3x + 2\ln(x) + 3.$$

2. $K = \int_0^1 \sqrt{1-t}dt$.
   Solution : La fonction $t \mapsto \sqrt{1-t}$ est continue sur $[0, 1]$, donc l'intégrale existe, et

$$K = \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{2}}dt = \left[-\frac{2}{3}(1-t)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

3. $L = \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)du$.
   Solution : La fonction $u \mapsto \cos^2 u$ est continue sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$, donc l'intégrale existe, et

$$L = \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2u)}{2}du = \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\sin(-\pi)}{4} - 0 = -\frac{\pi}{4}.$$

4. $M = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}$.
   Solution : La fonction $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue sur $[\sqrt{3}, 2\sqrt{2}]$, donc l'intégrale existe, et

$$M = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{2tdt}{2\sqrt{t^2+1}} = \left[\sqrt{t^2+1}\right]_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1.$$

Proposition 2.3 (Relation de Chasles)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a, b et c trois réels de I. Alors

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt.$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I (qui existe puisque f est continue). On a :

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(t)dt.$$

□

Remarque. La formule est vraie sans contrainte d'ordre entre a, b et c.

Exercice 4. Après avoir justifié son existence, calculer $N = \displaystyle\int_{-1}^1 \inf(t,0)dt$.

Solution : La fonction $t \mapsto \inf(t,0)$ est continue sur $[-1,1]$, donc l'intégrale existe, et

$$N = \int_{-1}^0 \inf(t,0)dt + \int_0^1 \inf(t,0)dt = \int_{-1}^0 tdt + \int_0^1 0dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^0 = -\frac{1}{2}.$$

3 Méthodes de calcul

3.1 Intégration par parties

Proposition 3.1 (Intégration par parties)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et soit u et v deux fonctions de classe C^1 entre a et b, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Démonstration. u et v sont de classe C^1 entre a et b, donc $t \mapsto u'(t)v(t)$ et $t \mapsto u(t)v'(t)$ sont continues sur l'intervalle associé et les deux intégrales existent. On trouve alors par calcul de primitive :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt = \int_a^b \big(u'(t)v(t) + u(t)v'(t)\big)\, dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b.$$

D'où le résultat en passant l'une des intégrales de l'autre côté de l'égalité. □

Exercice 5. Calculer la valeur de :

$$I = \int_0^1 x^2 \exp(2x)dx.$$

Solution : $x \mapsto x^2 \exp(2x)$ est continue sur $[0,1]$, donc I est bien définie.
On pose $u\ : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto \frac{e^{2x}}{2}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$, avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = e^{2x}$ on peut donc effectuer une intégration par parties :

$$I = \left[x^2 \frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 2x\frac{e^{2x}}{2}dx = \frac{e^2}{2} - 0 - \int_0^1 xe^{2x}dx.$$

Les fonctions $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto \frac{e^{2x}}{2}$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$, avec $f'(x) = 1$ et $g'(x) = e^{2x}$ on peut donc effectuer une nouvelle intégration par parties :

$$I = \frac{e^2}{2} - \left[x\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + 0 + \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_0^1 = \frac{e^2-1}{4}.$$

Exercice 6. Déterminer la primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.
Solution : ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc cette primitive existe, et vaut $x \mapsto \int_1^x \ln(t)dt$. Il ne reste plus qu'à calculer cette intégrale. Soit $x > 0$, $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v : t \mapsto t$ sont de classe C^1 entre 1 et x, avec $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = 1$, une intégration par parties donne donc :

$$\int_1^x \ln(t)dt = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x t\frac{1}{t}dt = x\ln(x) - (x-1) = x\ln(x) - x + 1.$$

La primitive recherchée est donc $x \mapsto x\ln(x) - x + 1$.

Remarque. Quelques conseils sur les choix de fonction à dériver ou primitiver pour une intégration par parties :
— S'il y a une fonction qu'on ne sait pas primitiver, c'est qu'il faut la dériver.
— On a souvent envie de dériver ln car sa dérivée est beaucoup plus simple que ses primitives.
— Si on n'est pas dans un des cas précédents, on a souvent envie de dériver les polynômes.

3.2 Changement de variable

Proposition 3.2 (Changement de variable)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $u : t \mapsto u(t)$ une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans I. Alors

$$\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))\, u'(t)dt.$$

Démonstration. La fonction f est continue sur I, donc admet une primitive F sur cet intervalle. Soit $h = F \circ u$. La fonction h est de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$ (par composée de fonctions de classe C^1), et pour tout $t \in [\alpha, \beta]$,

$$h'(t) = F'(u(t))u'(t) = f(u(t))u'(t).$$

Cette fonction étant continue sur $[\alpha, \beta]$, on peut passer à l'intégrale et on trouve :

$$\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt = h(\beta) - h(\alpha) = F(u(\beta)) - F(u(\alpha)) = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx.$$

□

Remarque. Ce changement de variable se note $x = u(t)$ et on s'autorise la notation $dx = u'(t)dt$ pour interpréter la formule :

$$\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\underbrace{u(t)}_{x})\underbrace{u'(t)dt}_{dx}.$$

Exercice 7. En utilisant le changement de variable $t = x - 4$, calculer la valeur de :

$$J = \int_0^4 \exp(x-4)dx.$$

Solution : $x \mapsto \exp(x-4)$ est continue sur $[0, 4]$, donc J existe. $x \mapsto x - 4$ est de classe C^1 sur $[0, 4]$, on peut donc poser le changement de variables $t = x - 4$, avec $dt = dx$:

$$J = \int_{-4}^0 \exp(t)dt = [\exp(t)]_{-4}^0 = 1 - \exp(-4).$$

Exercice 8. En utilisant le changement de variable $t = \cos(x)$, calculer la valeur de :

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx.$$

Solution : $x \mapsto \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$ est continue sur $[0,\pi]$, donc I existe. $x \mapsto \cos(x)$ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$, on peut donc poser le changement de variables $t = \cos(x)$ avec $dt = -\sin(x)dx$:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{-1}{1+\cos^2(x)}(-\sin(x))dx = \int_{\cos(0)}^{\cos(\pi)} \frac{-1}{1+t^2}dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque. Si u est strictement monotone sur l'intervalle $[\alpha,\beta]$, alors u réalise une bijection de $[\alpha,\beta]$ sur un intervalle $[a,b]$ et

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f\left(u(t)\right)u'(t)dt.$$

Exercice 9. En utilisant le changement de variable $x = \cos(t)$, calculer la valeur de :

$$K = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$

Solution : $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[0,1]$, donc K existe. $t \mapsto \cos(t)$ est de classe C^1 sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et bijective à valeurs dans $[0,1]$. On peut donc poser le changement de variables "à l'envers" $x = \cos(t)$ avec $dx = -\sin(t)dt$, en utilisant arccos pour les bornes :

$$K = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1-\cos^2(t)}(-\sin(t))dt = \int_{\arccos(\frac{\pi}{2})}^{\arccos(0)} |\sin(t)|\sin(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)dt.$$

Il ne reste plus qu'à linéariser l'expression pour déterminer une primitive :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2t)}{2}dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0 - 0 + 0\right) = \frac{\pi}{4}.$$

(Dans le cas de cet exemple, on aurait aussi pu poser $t = \arccos(x)$, mais la relation $dt = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ aurait été beaucoup plus difficile à manipuler, d'où le choix du changement de variables "à l'envers".)

3.3 Autres techniques classiques

3.3.1 Linéariser

Exercice 10. Déterminer une primitive de $f : t \mapsto \sin^5(t)$ sur $\mathbb{R}$.
Solution : On utilise les formules d'Euler et du binôme de Newton : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \sin^5(t) = \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^5 = \frac{e^{5it} - 5e^{3it} + 10e^{it} - 10e^{-it} + 5e^{3it} - e^{-5it}}{2^5 i} = \frac{\sin(5t) - 5\sin(3t) + 10\sin(t)}{16}.$$

Chacun de ces termes est facilement primitivable, ce qui permet de proposer comme primitive la fonction F définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = \frac{-\cos(5t)}{5\times 16} - 5\frac{-\cos(3t)}{3\times 16} + 10\frac{-\cos(t)}{16} = -\frac{\cos(5t)}{80} + \frac{5\cos(3t)}{48} - \frac{5\cos(t)}{8}.$$

3.3.2 Utiliser des exponentielles complexes

Exercice 11. Déterminer une primitive de $g : t \mapsto e^{2t}\cos(5t)$ sur $\mathbb{R}$.
Solution : On remarque que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = e^{2t}\cos(5t) = e^{2t}\,\mathrm{Re}(e^{5it}) = \mathrm{Re}(e^{2t+5it}) = \mathrm{Re}(e^{t(2+5i)}).$$

Une primitive complexe de $t \mapsto e^{t(2+5i)}$ sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto \frac{1}{2+5i}e^{t(2+5i)}$. Or,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2+5i}e^{t(2+5i)} = \frac{2-5i}{4+25}e^{2t}(\cos(5t) + i\sin(5t)) = \frac{e^{2t}}{29}(2\cos(5t) + 5\sin(5t) + 2i\sin(5t) - 5i\cos(5t)).$$

Cela permet de proposer comme primitive pour g sur $\mathbb{R}$ la fonction G définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2+5i}e^{t(2+5i)}\right) = \frac{e^{2t}}{29}(2\cos(5t) + 5\sin(5t)).$$

3.3.3 Primitiver $t \mapsto \frac{1}{at^2+bt+c}$

Exercice 12. Déterminer une primitive de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+1}$ sur un intervalle I (à déterminer) où g est bien définie.
Solution : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+2x+1 = (x+1)^2$, donc on peut poser $I =]-\infty, -1[$ ou $I =]-1, +\infty[$. On obtient alors :

$$\forall x \in I, \quad g(x) = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Une primitive sur I est donc $x \mapsto -\frac{1}{x+1}$.

Exercice 13. Déterminer une primitive de la fonction $f : \ t \mapsto \dfrac{1}{2t^2-6t+4}$ sur un intervalle I (à déterminer) où f est bien définie.
Solution : Soit $t \in \mathbb{R}$, le discriminant de $2t^2-6t+4$ vaut $\Delta = 36-32 = 4 > 0$, ce qui fournit deux racines $\frac{6+2}{4} = 2$ et $\frac{6-2}{4} = 1$.
On peut donc poser $I =]-\infty, 1[$ ou $I =]1, 2[$ ou $I =]2, +\infty[$ et obtenir :

$$\forall t \in I, \quad f(x) = \frac{1}{2t^2-6t+4} = \frac{1}{2(t-1)(t-2)}.$$

Décomposons en éléments simples : on cherche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall t \in I$,

$$\frac{1}{2(t-1)(t-2)} = \frac{\alpha}{t-1} + \frac{\beta}{t-2}.$$

Multiplier par $t-2$ puis faire tendre t vers 2 donne $\beta = \frac{1}{2}$. Multiplier par $t-1$ puis faire tendre t vers 1 donne $\alpha = -\frac{1}{2}$. Donc :

$$\forall t \in I, \quad f(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{t-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{t-2}.$$

Une primitive sur I est donc $t \mapsto -\frac{1}{2}\ln(|t-1|) + \frac{1}{2}\ln(|t-2|)$.

Exercice 14. Déterminer une primitive de la fonction $h : u \mapsto \dfrac{1}{u^2+2u+4}$ sur un intervalle I (à déterminer) où h est bien définie.
Solution : Soit $u \in \mathbb{R}$, le discriminant de u^2+2u+4 vaut $\Delta = 4-16 = -12 < 0$, on peut donc poser $I = \mathbb{R}$. On obtient alors, en passant sous forme canonique :

$$\forall u \in I, \quad h(u) = \frac{1}{u^2+2u+4} = \frac{1}{(u+1)^2+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(\frac{u+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{u+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}.$$

Une primitive sur I est donc $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{u+1}{\sqrt{3}}\right)$.