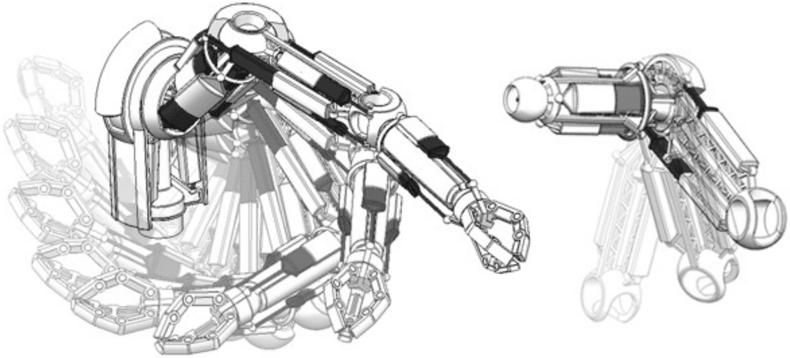
Modélisation des performances cinématiques des systèmes

N. Mesnier
Lycée Jean Perrin, Lyon

2024–2025

Définition (Cinématique)

Le mot cinématique dérive du grec *kinêma*, *kinêmatos* qui signifie mouvement et définit la partie de la mécanique qui étudie les mouvements indépendamment des causes qui les provoquent.



Objectifs

- Prédire les mouvements des solides des ensembles mécaniques connaissant ceux générés par les actionneurs ;
- caractériser les liens entre les mouvements d'entrée et de sortie des transmetteurs :
  - rapport de réduction des réducteurs (trains épicycloïdaux ou autres) ;
  - mécanismes de transformation de mouvement (bielle manivelle, croix de malte, pompe à pistons axiaux et radiaux, etc.).

Plan du cours

1 2 3 4

Introduction

Espace & temps

Cadre de travail : mécanique classique (non relativiste)

Nous avons vu que :

- caractère indéformable des solides $\Rightarrow$ conservation des angles et distances

  modèle de solide indéformable $=$ espace euclidien

- cadre de la physique newtonienne :

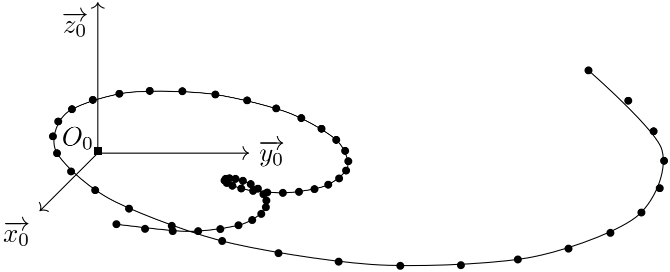
  temps indépendant de l'espace et des objets physiques

  $$\Downarrow$$

  changement de repère $\simeq$ *changement de référentiel*

1 2 3 4

Trajectoire, vitesse et accélération



Définition (Trajectoire d'un point d'un solide)

La trajectoire d'un point $M \in \mathcal{S}$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}_0$ est le lieu des positions successives (fixes dans $\mathcal{R}_0$) occupées par le point M dans le repère $\mathcal{R}_0$ au cours du temps ; soit :

$$\mathscr{C}(M) = \{M(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{R}_0$$

Les trajectoires sont orientées et suivent le sens du mouvement.

Définition (Vitesse d'un point d'un solide)

La vitesse à l'instant t d'un point $M \in \mathcal{S}$ dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0$, d'origine O_0, est égale à :

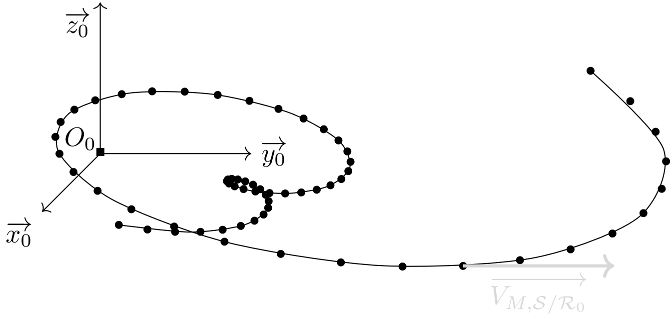
$$\overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\overrightarrow{O_0 M(t+\Delta t)} - \overrightarrow{O_0 M(t)}}{\Delta t} \right) = \left. \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_0 M}}{\mathrm{d}t}(t) \right|_{\mathcal{R}_0}$$

avec $\overrightarrow{O_0 M(t)}$ le vecteur position.

Notation des vecteurs vitesses
Comme le vecteur position, le vecteur vitesse dépend de l'instant choisi ; cependant, afin d'alléger les notations, cette dépendance ne sera jamais mentionnée explicitement.

Vitesse

d'un point d'un solide dans un référentiel

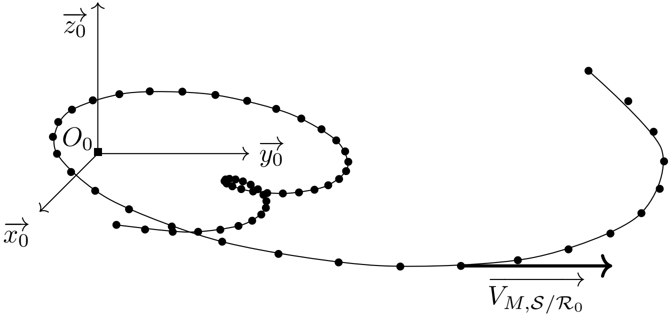


Représentation graphique : vecteur vitesse $\Rightarrow$ flèche

- origine confondue avec la position du point M à l'instant t ;
- le support (direction) est **tangent à la trajectoire** du point M dans le repère $\mathcal{R}_0$;
- le sens est celui du mouvement ;
- la norme est la valeur de la vitesse en m/s.

Vitesse

d'un point d'un solide dans un référentiel



Représentation graphique : vecteur vitesse $\Rightarrow$ flèche

- origine confondue avec la position du point M à l'instant t ;
- le support (direction) est **tangent à la trajectoire** du point M dans le repère $\mathcal{R}_0$;
- le sens est celui du mouvement ;
- la norme est la valeur de la vitesse en m/s.

Accélération

d'un point d'un solide dans un référentiel

Définition (Accélération d'un point d'un solide)

L'accélération à l'instant t d'un point $M \in \mathcal{S}$ dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0$, d'origine O_0, est égale à :

$$\overrightarrow{\Gamma_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} = \left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{O_0M}}{\mathrm{d}t^2}(t)\right|_{\mathcal{R}_0}$$

avec $\overrightarrow{O_0M(t)}$ le vecteur position.

Remarque sur le calcul de l'accélération

On calculera l'accélération d'un point d'un solide toujours à partir de la définition $\Rightarrow$ en dérivant la vitesse du point dans le référentiel d'étude.

Dérivation vectorielle
(Complément mathématique)

Soient $\mathscr{V}$ un espace vectoriel orienté de dimension 3 et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base othornormée directe de $\mathscr{V}$. Soit $\overrightarrow{u} : \mathbb{R} \to \mathscr{V}$ une application de classe C^1, appelée fonction vectorielle. Les composantes de $\overrightarrow{u}$ dans $\mathcal{B}$ sont trois applications $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ respectivement définies comme

$$\forall i \in [\![1, 3]\!], u_i(t) = \overrightarrow{u}(t) \cdot \overrightarrow{e_i} \ .$$

Définition (Dérivée d'une fonction vectorielle)

La dérivée de $\overrightarrow{u}$ à l'instant t dans la base $\mathcal{B}$ est le vecteur :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}t}(t)\right|_{\mathcal{B}} = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}(t)\ \overrightarrow{e_1} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}(t)\ \overrightarrow{e_2} + \frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t}(t)\ \overrightarrow{e_3}$$

admettant comme composantes dans la base $\mathcal{B}$ les dérivées par rapport au temps des composantes dans $\mathcal{B}$.

Dérivation vectorielle
(Complément mathématique)

Propriété

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux applications de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{V}$, f et g deux applications de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{B}$ une base othornormée directe de $\mathscr{V}$, alors il vient :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}}\wedge\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\wedge\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\left(f\,\overrightarrow{u}+g\,\overrightarrow{v}\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u}+f\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{v}+g\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}}$$

avec une notation « fonctions » supprimant les dépendances explicites en t.

Dérivation vectorielle
(Complément mathématique)

Définition (Vecteur mobile)

On appelle vecteur mobile sur $\mathscr{V}$ une application non constante de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{V}$.

Proposition (Dérivée d'un vecteur mobile unitaire)

La dérivée par rapport au temps d'un vecteur mobile unitaire est orthogonale à ce vecteur.

Définition (Base mobile)

On appelle base mobile sur $\mathscr{V}$ l'application $\mathcal{B} : t \mapsto (\overrightarrow{e_1}(t), \overrightarrow{e_2}(t), \overrightarrow{e_3}(t))$ qui associe à chaque instant une base orthonormée directe constituée de trois vecteurs mobiles unitaires.

Dérivation vectorielle
(Complément mathématique)

Proposition (Taux de rotation)

Il existe un unique vecteur permettant de définir le taux de rotation d'une base mobile orthonormée directe $\mathcal{B}(t) = (\overrightarrow{e_1}(t), \overrightarrow{e_2}(t), \overrightarrow{e_3}(t))$ *par rapport à une base orthonormée directe* $\mathcal{B}_0$*, noté* $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}}$*, tel que :*

$$\forall i \in [\![1, 3]\!], \quad \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_i}}{\mathrm{d}t}(t)\right|_{\mathcal{B}_0} = \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}}(t) \wedge \overrightarrow{e_i}(t)$$

Dérivation vectorielle
(Complément mathématique)

Théorème (Dérivation vectorielle)

Les dérivées temporelles d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ mobile dans deux bases différentes $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ liées entre elles par le taux de rotation $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}}$ sont liées par la relation :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_0} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} \wedge \overrightarrow{v}$$

souvent appelée « formule de Bour ».

Conséquences

- La dérivée temporelle d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$, de direction variable dans une base $\mathcal{B}_0$ mais constant dans une base $\mathcal{B}$, est orthogonale à ce vecteur.
- Si la dérivée d'un vecteur lui est colinéaire, ce vecteur a une direction constante dans la base de dérivation.

Dérivation vectorielle

(Complément mathématique)

Théorème (Dérivation vectorielle)

Les dérivées temporelles d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ mobile dans deux bases différentes $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ liées entre elles par le taux de rotation $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}}$ sont liées par la relation :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_0} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} \wedge \overrightarrow{v}$$

souvent appelée « formule de Bour ».

Conséquences

- La dérivée temporelle d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$, de direction variable dans une base $\mathcal{B}_0$ mais constant dans une base $\mathcal{B}$, est orthogonale à ce vecteur.
- Si la dérivée d'un vecteur lui est colinéaire, ce vecteur a une direction constante dans la base de dérivation.

Définition (Vecteur vitesse angulaire)

Le vecteur vitesse angulaire ou de rotation (instantané) du solide $\mathcal{S}$ dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}_0$ correspond au vecteur

$$\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}}$$

où $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}}$ est le taux de rotation qui caractérise les changements d'orientation de la base $\mathcal{B}$ par rapport à la base $\mathcal{B}_0$:

- sa direction correspond à l'axe autour duquel la base $\mathcal{B}$ tourne par rapport à la base $\mathcal{B}_0$;
- son sens correspond à celui de la rotation (selon la règle de la main droite) ;
- sa norme correspond à la vitesse angulaire en $\text{rad}{\cdot}\text{s}^{-1}$ à laquelle se fait cette rotation.

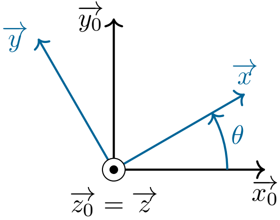
Proposition (Taux de rotation plane)

Lorsque deux bases orthonormées directes ont un axe confondu, le vecteur taux rotation est porté par l'axe commun et sa composante sur cet axe est la dérivée de l'angle qui repère la rotation.

Exemple

Taux de rotation reliant deux bases orthonormées directes $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$, de vecteur commun $\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{z}$ (la normale au plan de la figure) avec $\theta = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y})$:

$$\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{z}$$



1 2 3 4

Champ des vecteurs vitesses, torseur cinématique

Champ de vecteurs vitesses
d'un solide en mouvement dans un référentiel

Le mouvement d'un solide indéformable $\mathcal{S}$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}_0$ est complètement déterminé par :

- la vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$
  de la base associée au repère de $\mathcal{S}$ par rapport à celle de $\mathcal{R}_0$
- la vitesse $\overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$ d'un point $M \in \mathcal{S}$ par rapport à $\mathcal{R}_0$

À partir des vecteurs $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$ et $\overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$,
on peut déterminer la vitesse en tout point du solide $N \in \mathcal{S}$.

Théorème (Champ de vitesses)

Les vecteurs vitesses de deux points M et N d'un solide $\mathcal{S}$ en mouvement par rapport à un référentiel $\mathcal{R}_0$ sont liés par la formule de changement de point :

$$\overrightarrow{V_{N,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{MN}$$

Le mouvement d'un solide indéformable $\mathcal{S}$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}_0$ est complètement déterminé par :

- la vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$
  de la base associée au repère de $\mathcal{S}$ par rapport à celle de $\mathcal{R}_0$
- la vitesse $\overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$ d'un point $M \in \mathcal{S}$ par rapport à $\mathcal{R}_0$

À partir des vecteurs $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$ et $\overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$,
on peut déterminer la vitesse en tout point du solide $N \in \mathcal{S}$.

Théorème (Champ de vitesses)

Les vecteurs vitesses de deux points M et N d'un solide $\mathcal{S}$ en mouvement par rapport à un référentiel $\mathcal{R}_0$ sont liés par la formule de changement de point :

$$\overrightarrow{V_{N,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{MN}$$

Champ de vecteurs vitesses
d'un solide en mouvement dans un référentiel

Le mouvement d'un solide indéformable $\mathcal{S}$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}_0$ est complètement déterminé par :

- la vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$
  de la base associée au repère de $\mathcal{S}$ par rapport à celle de $\mathcal{R}_0$
- la vitesse $\overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$ d'un point $M \in \mathcal{S}$ par rapport à $\mathcal{R}_0$

À partir des vecteurs $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$ et $\overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$,
on peut déterminer la vitesse en tout point du solide $N \in \mathcal{S}$.

Théorème (Champ de vitesses)

Les vecteurs vitesses de deux points M et N d'un solide $\mathcal{S}$ en mouvement par rapport à un référentiel $\mathcal{R}_0$ sont liés par la formule de changement de point :

$$\overrightarrow{V_{N,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{MN}$$

Avec la formule de changement de point

$$\overrightarrow{V_{N,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{MN}$$

connaissant $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$ et $\overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$,
on peut déterminer la vitesse en tout point du solide $N \in \mathcal{S}$.

L'ensemble des vecteurs vitesses d'un solide $\mathcal{S}$ en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$

$$\left\{\overrightarrow{V_{P,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \mid P \in \mathcal{S}\right\}$$

est appelé **champ des vecteurs vitesses**.

Champ de vecteurs vitesses
d'un solide en mouvement dans un référentiel

Avec la formule de changement de point

$$\overrightarrow{V_{N,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{MN}$$

connaissant $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$ et $\overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$,
on peut déterminer la vitesse en tout point du solide $N \in \mathcal{S}$.

L'ensemble des vecteurs vitesses d'un solide $\mathcal{S}$ en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$

$$\left\{\overrightarrow{V_{P,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \mid P \in \mathcal{S}\right\}$$

est appelé **champ des vecteurs vitesses**.

Propriété fondamentale : **équiprojectivité**

Théorème (Équiprojectivité du champ de vitesses)

Le champ des vecteurs vitesses est équiprojectif,
c'est-à-dire qu'il vérifie la relation :

$$\overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{V_{N,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{MN}$$

Les champs vectoriels équiprojectifs (ou antisymétriques) sont appelés

TORSEURS

Équiprojectivité du champ de vecteurs vitesses

d'un solide en mouvement dans un référentiel

Propriété fondamentale : **équiprojectivité**

Théorème (Équiprojectivité du champ de vitesses)

Le champ des vecteurs vitesses est équiprojectif, c'est-à-dire qu'il vérifie la relation :

$$\overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{V_{N,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{MN}$$

Les champs vectoriels équiprojectifs (ou antisymétriques) sont appelés

TORSEURS

Équiprojectivité du champ de vecteurs vitesses

d'un solide en mouvement dans un référentiel

Propriété fondamentale : **équiprojectivité**

Théorème (Équiprojectivité du champ de vitesses)

Le champ des vecteurs vitesses est équiprojectif,
c'est-à-dire qu'il vérifie la relation :

$$\overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{V_{N,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{MN}$$

Les champs vectoriels équiprojectifs (ou antisymétriques) sont appelés

TORSEURS

Équiprojectivité du champ de vecteurs vitesses
d'un solide en mouvement dans un référentiel

Propriété fondamentale : **équiprojectivité**

Théorème (Équiprojectivité du champ de vitesses)

Le champ des vecteurs vitesses est équiprojectif,
c'est-à-dire qu'il vérifie la relation :

$$\overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{V_{N,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{MN}$$

Les champs vectoriels équiprojectifs (ou antisymétriques) sont appelés

TORSEURS

Définition (Torseur cinématique)

Le torseur cinématique du solide $\mathcal{S}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0$ traduit le champ de vitesses (équiprojectif) du solide $\mathcal{S}$ dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ et est noté :

$$\left\{\mathscr{V}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}\right\} = {}_M\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}\\ \overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}\end{array}\right\} = {}_N\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}\\ \overrightarrow{V_{N,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}\end{array}\right\}$$

Ce torseur est défini en tout point de l'espace et son expression en un point M fait appel aux éléments de réduction du torseur que sont :

- sa résultante $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$, qui est invariante (la même en tout point) ;
- son moment $\overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$, qui dépend du point de réduction, ici M.

Torseur cinématique
d'un solide en mouvement dans un référentiel

Intérêt

Le mouvement d'un solide $\mathcal{S}$ dans un référentiel $\mathcal{R}_0$ sera complètement défini par le torseur cinématique de $\mathcal{S}$ par rapport à $\mathcal{R}_0$, noté :

$$\left\{\mathscr{V}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}\right\}$$

Réduction du torseur en un point

$$\left\{\mathscr{V}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}\right\} = {}_M\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}\\ \overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}\end{array}\right\}$$

$$= {}_N\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}\\ \overrightarrow{V_{N,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}\end{array}\right\} = {}_N\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}\\ \overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{MN}\end{array}\right\}$$

Torseur cinématique
d'un solide en mouvement dans un référentiel

Intérêt

Le mouvement d'un solide $\mathcal{S}$ dans un référentiel $\mathcal{R}_0$ sera complètement défini par le torseur cinématique de $\mathcal{S}$ par rapport à $\mathcal{R}_0$, noté :

$$\left\{\mathscr{V}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}\right\}$$

Réduction du torseur en un point

$$\begin{aligned}\left\{\mathscr{V}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}\right\} &= {}_M\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}\\ \overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}\end{array}\right\}\\ &= {}_N\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}\\ \overrightarrow{V_{N,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}\end{array}\right\} = {}_N\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}\\ \overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}+\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}\wedge\overrightarrow{MN}\end{array}\right\}\end{aligned}$$

Propriétés/Caractéristiques

- Premier invariant du torseur : la résultante

$$\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$$

- Relation de changement de point :

$$\overrightarrow{V_{N,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{MN}$$

- Équiprojectivité :

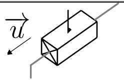
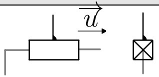
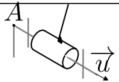
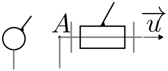
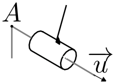
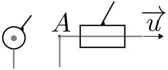
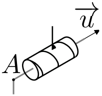
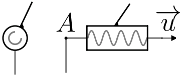
$$\overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{V_{N,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{MN}$$

- Second invariant ou invariant scalaire du torseur : l'automoment ou le produit scalaire des éléments de réduction en un point

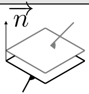
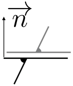
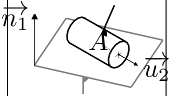
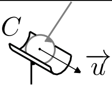
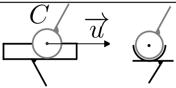
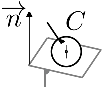
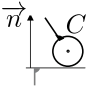
$$\overrightarrow{V_{M,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{V_{N,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}$$

- Pour que deux torseurs soient égaux, il faut que les éléments de réduction en un (même) point soient égaux.

Torseurs cinématiques des liaisons usuelles (1/2)

Liaison	Schém. spatiale	Schém. plane	Torseur cinématique
Glissière			$\forall M \quad \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V\vec{u} \end{array} \right\}_{\forall M}$
Pivot			$\forall B \in (A, \vec{u}), \quad \left\{ \begin{array}{c} \omega\vec{u} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{B}$
Pivot glissant			$\forall B \in (A, \vec{u}), \quad \left\{ \begin{array}{c} \omega\vec{u} \\ V\vec{u} \end{array} \right\}_{B}$
Hélicoïdale			$\forall B \in (A, \vec{u}), \quad \left\{ \begin{array}{c} \omega\vec{u} \\ \dfrac{p}{2\pi}\omega\vec{u} \end{array} \right\}_{B}$ pas p à droite

Torseurs cinématiques des liaisons usuelles (2/2)

Liaison	**Schém. spatiale**	**Schém. plane**	**Torseur cinématique**
Appui-plan			${}_A\left\{ \begin{array}{c} \omega \overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{V_A} \end{array} \right\}$ avec $\overrightarrow{V_A} \cdot \overrightarrow{n} = 0$
Sphérique			${}_C\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\omega} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$
Cylindre-plan			${}_A\left\{ \begin{array}{c} \omega_1 \overrightarrow{n_1} + \omega_2 \overrightarrow{u_2} \\ \overrightarrow{V_A} \end{array} \right\}$ avec $\overrightarrow{V_A} \cdot \overrightarrow{n_1} = 0$
Sphère-cylindre			${}_C\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\omega} \\ V \overrightarrow{u} \end{array} \right\}$
Sphère-plan			${}_C\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\omega} \\ \overrightarrow{V_C} \end{array} \right\}$ avec $\overrightarrow{V_C} \cdot \overrightarrow{n} = 0$

Axe central d'un torseur cinématique

d'un solide en mouvement dans un référentiel

À chaque instant, tout torseur cinématique dont la résultante est non nulle possède un axe central Δ.

Définition (Axe central)

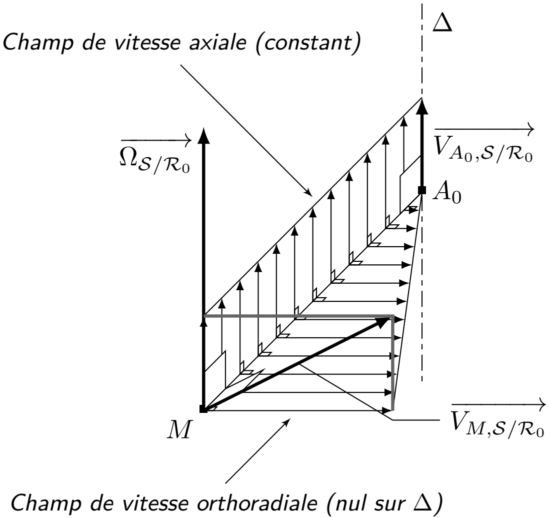
L'axe central d'un torseur cinématique correspond à
l'ensemble des points A où la vitesse (moment du torseur)
est colinéaire au vecteur de rotation (résultante du torseur) :

$$\overrightarrow{V_{A,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{0}$$

L'axe central est appelé axe instantané de rotation (ou de glissement).
Il n'existe que si la résultante est non nulle.

Axe central d'un torseur cinématique

d'un solide en mouvement dans un référentiel



Axe central d'un torseur cinématique

d'un solide en mouvement dans un référentiel

Théorème

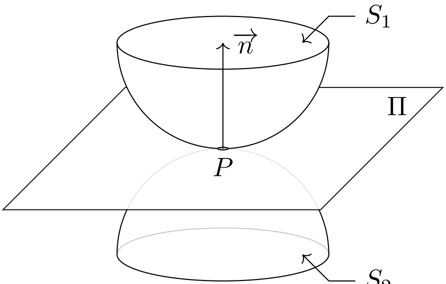
L'ensemble des points A de l'axe central d'un torseur cinématique du solide $\mathcal{S}$ par rapport au repère $\mathcal{R}_0$ est défini à partir d'un point M quelconque par la relation :

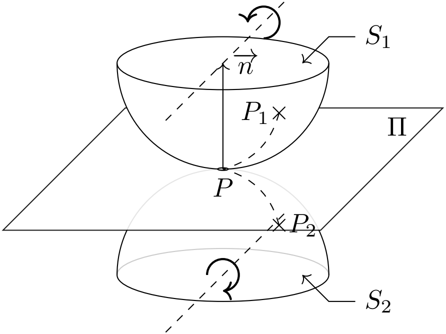
$$\overrightarrow{MA} = \lambda\,\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} - \frac{\overrightarrow{V_{M/\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}}{\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}}}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cas particulier du contact ponctuel

Deux solides S_1 et S_2 liés par une liaison sphère-plan sont en contact ponctuel.





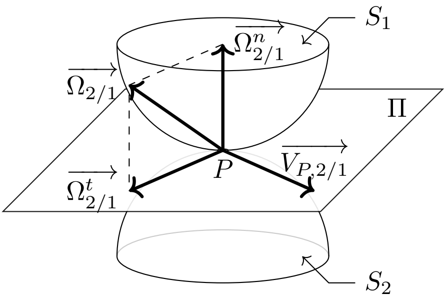
On note :

- P le **point coïncidant au contact** ;
- Π le plan tangent commun (plan osculateur au contact).

Cas particulier du contact ponctuel

Le torseur cinématique du mouvement de S_1/S_2 en P s'écrit :

$$\{\mathcal{V}_{S_2/S_1}\} = {}_P\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{P,2/1}} \end{array} \right\}$$



tel que :

$$\overrightarrow{V_{P,2/1}}.\overrightarrow{n} = 0$$

$$\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \overrightarrow{\Omega^n_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega^t_{2/1}}$$

avec :

- $nvectV_{P,2/1}$ le vecteur vitesse de glissement de S_2/S_1, dans Π ;
- $\overrightarrow{\Omega^n_{2/1}}$ le vecteur rotation de pivotement, porté par $\overrightarrow{n}$;
- $\overrightarrow{\Omega^t_{2/1}}$ le vecteur rotation de roulement, porté par $\overrightarrow{t}$.

Cas particulier du contact ponctuel
Roulement sans glissement (RSG)

Si deux solides en contact roulent l'un par rapport à l'autre sans glisser on parlera de **roulement sans glissement** (ni pivotement).

Exemple : roue qui roule sur la route sans glisser.

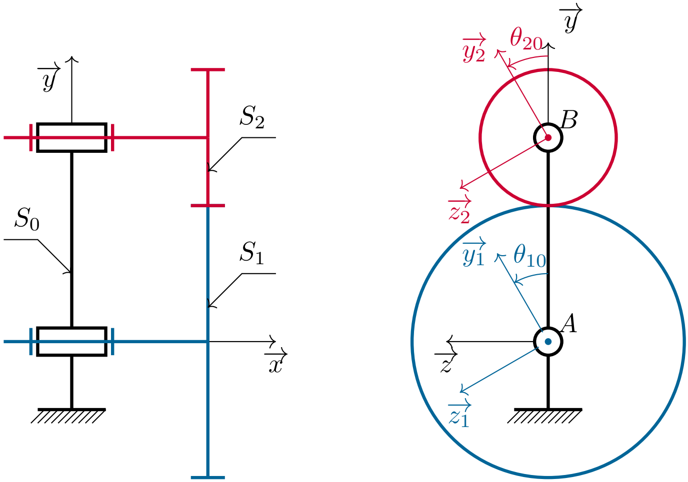
Les composantes du torseur cinématique de la liaison se simplifie alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overrightarrow{V_{P,2/1}} & = & \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\Omega^n_{2/1}} & = & \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\Omega^t_{2/1}} & \neq & \overrightarrow{0} \end{array}\right.$$

Utilisation : Calcul des vitesses de pièces des réducteurs à engrenages, des contacts impliquant des éléments roulants (billes, rouleaux).

Cas particulier du contact ponctuel

Exemple de roulement sans glissement (RSG)



Relation entre $\omega_{10} = \dot{\theta}_{10}$ et $\omega_{20} = \dot{\theta}_{20}$?

1 2 3 4

Composition des mouvements

Composition des vecteurs rotations

Quand plusieurs solides sont en mouvement les uns par rapport aux autres, les vecteurs rotations sont liés par le théorème suivant :

Théorème

La composition des vecteurs rotation s'écrit :

$$\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} = \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_{n-1}}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_{n-1}/\mathcal{R}_{n-2}}} + \cdots + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}$$

Composition des vecteurs vitesses

Pour étudier le mouvement du point $A \in \mathcal{R}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}_1$, il est toujours possible d'utiliser une composition de la forme :

$$\overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} = \overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}} + \overrightarrow{V_{A\in\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}$$

avec :

- $\overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}}$ vitesse absolue du point A dans le référentiel $\mathcal{R}_1$
- $\overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_2}}$ vitesse relative du point A dans le référentiel $\mathcal{R}_2$
- $\overrightarrow{V_{A\in\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} \overset{\text{déf.}}{=} \overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}$ vitesse d'entraînement du point A du solide $\mathcal{S}_2$ dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_1$
  « $A \in \mathcal{R}_2$ » signifie que l'on a « attaché le point A au solide $\mathcal{S}_2$ »

Composition des vecteurs vitesses

Théorème

De manière générale, on pourra toujours écrire :

$$\overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} = \overrightarrow{V_{A,\mathcal{R}/\mathcal{R}_{n-1}}} + \overrightarrow{V_{A\in\mathcal{R}_{n-1}/\mathcal{R}_{n-2}}} + \cdots + \overrightarrow{V_{A\in\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}$$

Composition des torseurs cinématiques

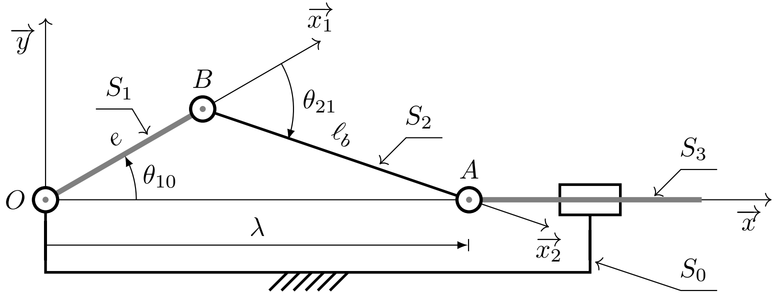
Les deux équations des théorèmes précédents on en déduit une loi de composition générale.

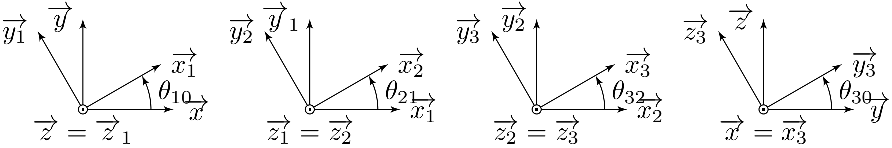
Théorème

La loi de composition des mouvements de solides s'écrit dans le cas général :

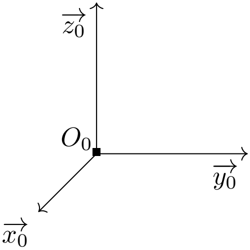
$$\left\{\mathscr{V}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_1}\right\} = \left\{\mathscr{V}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_n}\right\} + \left\{\mathscr{V}_{\mathcal{R}_n/\mathcal{R}_{n-1}}\right\} + \cdots + \left\{\mathscr{V}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}\right\}$$

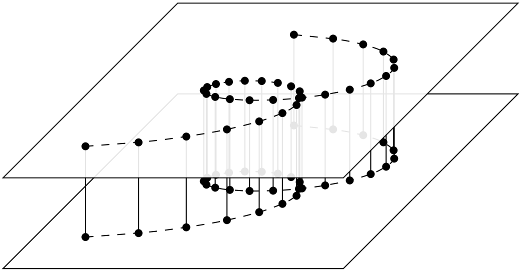
Exemple : Moteur thermique d'aéromodélisme





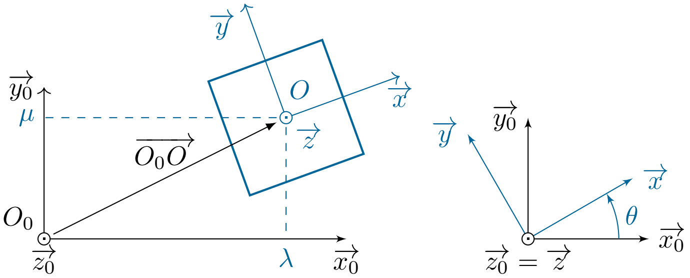
Mouvements plans sur plan





Définition (Mouvement plan)

Un solide est en mouvement plan dans un référentiel si tous ses points se déplacent dans des plans parallèles à un plan fixe de ce référentiel.



2 paramètres linéaires et 1 paramètre angulaire
tels que $\forall \mathcal{S}$ en mouvement dans $\mathcal{R}_0$:

$$\left\{\mathscr{V}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}\right\} = \underset{O}{} \left\{ \begin{array}{r} \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V_{O,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} = \dot{\lambda}(t)\,\overrightarrow{x_0} + \dot{\mu}(t)\,\overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}$$

et vérifie : $\overrightarrow{V_{O,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$