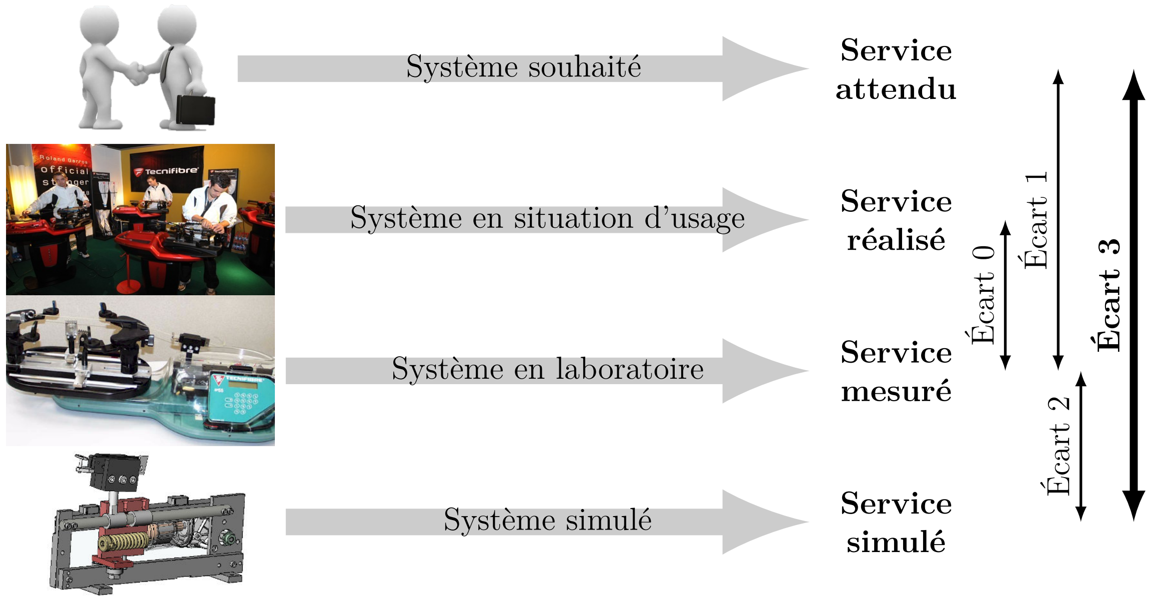
SII – PCSI / Séquence n° 5 – Modélisation, prévision et vérification des performances cinématiques des systèmes

# Modélisation et comportement cinématique des systèmes

## — *Éléments de correction des TDs* —




**Écart 0** – évalue la fiabilité et la fidélité du système de laboratoire didactisé par rapport au système réel. Il répond aux questions « le système de laboratoire est-il représentatif du système réel ? Permet-il de l'étudier de manière fiable ? »

**Écart 1** – évalue le respect du CDCF par le système réel sur prototype instrumenté en laboratoire. Il répond à la question « le système réalisé, répond-il au CDCF ? ».

**Écart 2** – évalue la fiabilité du modèle et de ses hypothèses. Il répond à la question « le modèle est-il correct ? ».

**Écart 3** – évalue, en phase de conception, le respect du CDCF à partir d'un modèle simulé. Il répond à la question « le modèle du système satisfait-il les exigences du CDCF ? ».

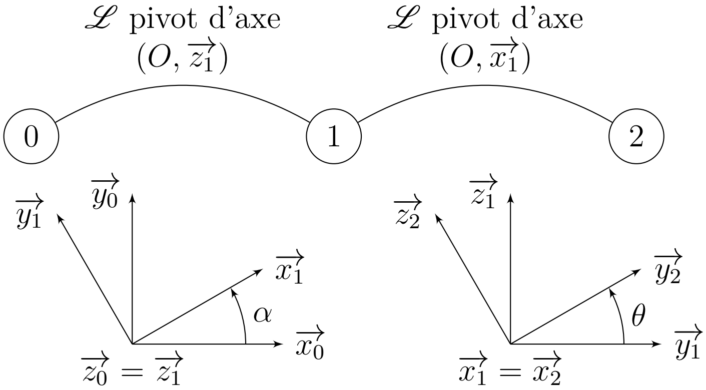
*Activités de TD*

## Exercices

— Exercice 1 —

# Éolienne à pâle endommagée

**Question 1.1.**




**Question 1.2.** Par définition, avec la première figure géométrale de normale $\overrightarrow{z_0}$ et de variation d'angle $\dot{\alpha}$, il vient :

$$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\alpha}\,\overrightarrow{z_1}$$

De même, avec l'autre figure géométrale, on trouve :

$$\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \dot{\theta}\overrightarrow{x_1}$$

Il vient alors par composition des taux de rotation :

$$\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\theta}\overrightarrow{x_1} + \dot{\alpha}\,\overrightarrow{z_1}$$

**Question 1.3.** Par composition des mouvements, la trajectoire du point $G_2$ d'une pâle **2** dans son mouvement par rapport au mât **0** dépend de deux contributions :

$T_{G_2/1}$ Comme $\{\mathscr{V}_{2/1}\}$ est une rotation d'axe $(O, \overrightarrow{x_1})$, la trajectoire du point $G_2$ dans $\mathcal{R}_2$ est un cercle de centre $B$, de rayon $c$, dans le plan de normale $\overrightarrow{x_1}$ ;

$T_{G_2\in 1/0}$ Comme $\{\mathscr{V}_{1/0}\}$ est une rotation d'axe $(O, \overrightarrow{z_1})$, le point $G_2 \in S_1$ décrit dans $\mathcal{R}_0$ un cercle de centre $H$, le projeté orthogonal du point $G_2$ sur la droite $(O, \overrightarrow{z_1})$, de rayon $\left\|\overrightarrow{OG_2} \wedge \overrightarrow{z_1}\right\| \in \left[b, \sqrt{b^2+c^2}\right]$, dans le plan de normale $\overrightarrow{z_1}$.

La trajectoire du point $G_2$ d'une pâle par rapport au mât **0** évolue donc sur une surface sphérique de centre $O$ et de rayon $\sqrt{b^2+c^2}$, limitée dans la direction $\overrightarrow{z_1}$ par deux plans situés à $c$ du point $O$.

**Question 1.4.** Par définition, on a :

$$\overrightarrow{V_{B,1/0}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OB}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_0} = b\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x_1}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_0}$$

avec, par formule de dérivation vectorielle,

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x_1}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_0} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x_1}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{x_1} = \dot{\alpha}\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{x_1} = \dot{\alpha}\overrightarrow{y_1}$$

il vient finalement

$$\boxed{\overrightarrow{V_{B,1/0}} = b\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1}}$$

**Question 1.5.** Par définition, on a :

$$\overrightarrow{V_{G_2,2/1}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{BG_2}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_1} = c\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_2}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_1}$$

avec, par formule de dérivation vectorielle,

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_2}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_1} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_2}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{z_2} = \dot{\theta}\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{z_2} = -\dot{\theta}\overrightarrow{y_2}$$

il vient finalement

$$\boxed{\overrightarrow{V_{G_2,2/1}} = -c\dot{\theta}\overrightarrow{y_2}}$$

**Question 1.6.** Considérant que le point $G_2$ appartient au corps **1**, c'est-à-dire considérant la liaison pivot entre le corps **1** et la pâle **2** bloquée avec $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \overrightarrow{0}$, il vient par définition :

$$\overrightarrow{V_{G_2\in 1/0}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG_2}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_0} = b\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x_1}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_0} + c\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_2}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_0}$$

avec, par formule de dérivation vectorielle,

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_2}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_0} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_2}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{z_2} = \dot{\alpha}\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{z_2} = \sin(\theta)\dot{\alpha}\overrightarrow{x_1}$$

il vient finalement

$$\boxed{\overrightarrow{V_{G_2\in 1/0}} = \dot{\alpha}\left(c\sin(\theta)\overrightarrow{x_1} + b\overrightarrow{y_1}\right)}$$

**Question 1.7.** Par définition, on a :

$$\overrightarrow{V_{G_2,2/0}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG_2}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_0} = \underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OB}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_0}}_{\overrightarrow{V_{B,1/0}}} + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{BG_2}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_0}$$

avec, par formule de dérivation vectorielle,

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{BG_2}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_0} = \underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{BG_2}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_1}}_{\overrightarrow{V_{G_2,2/1}}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{BG_2}$$

et

$$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{BG_2} = \dot{\alpha}\overrightarrow{z_1} \wedge c\overrightarrow{z_2} = c\sin(\theta)\dot{\theta}\overrightarrow{x_1}$$

On reconnait

$$\overrightarrow{V_{B,1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{BG_2} = \dot{\alpha}\left(c\sin(\theta)\overrightarrow{x_1} + b\overrightarrow{y_1}\right) = \overrightarrow{V_{G_2\in 1/0}}$$

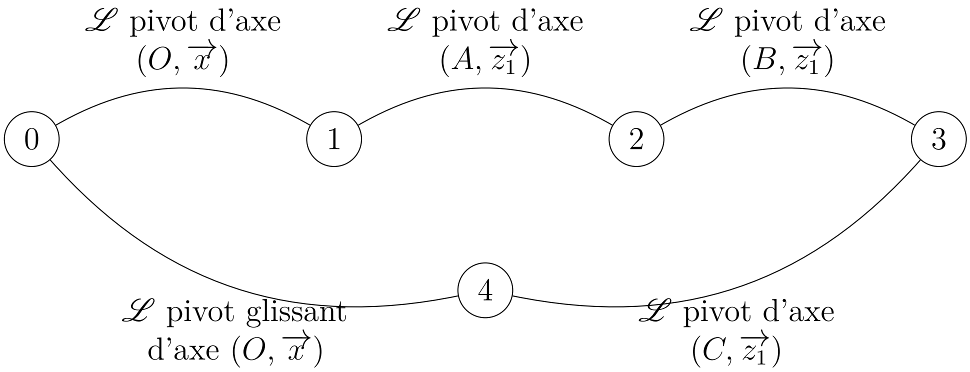
d'où, finalement

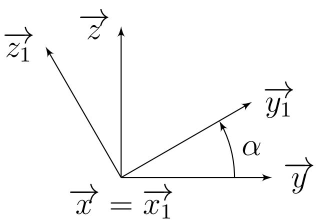
$$\boxed{\overrightarrow{V_{G_2,2/0}} = \overrightarrow{V_{G_2,2/1}} + \overrightarrow{V_{G_2\in 1/0}}}$$

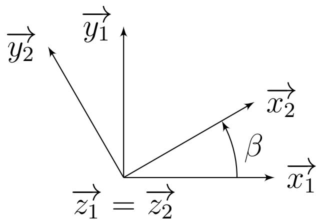
## — EXERCICE 2 —

# Régulateur de Watt

**Question 2.1.**




**Question 2.2.** Sachant que la liaison entre **0** et **1** est une pivot d'axe $(O, \overrightarrow{x})$, on a

$$\forall M \in (O, \overrightarrow{x}), \quad \{\mathscr{V}_{1/0}\} = {}_M\left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha}\,\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$$

d'où, par relation de changement de point :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{A,1/0}} &= \underbrace{\overrightarrow{V_{O,1/0}}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{OA} \\ &= \dot{\alpha}\,\overrightarrow{x} \wedge R\overrightarrow{y_1} \\ &= R\dot{\alpha}\overrightarrow{z_1} \end{aligned}$$

**Question 2.3.** Sachant que la liaison entre **1** et **2** est une liaison pivot d'axe $(A, \overrightarrow{z_1})$, on a

$$\forall M \in (A, \overrightarrow{z_1}), \quad \{\mathscr{V}_{2/1}\} = {}_M\left\{ \begin{array}{c} \dot{\beta}\overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$$

d'où, par relation de changement de point :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{B,2/1}} &= \underbrace{\overrightarrow{V_{A,2/1}}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{AB} \\ &= \dot{\beta}\overrightarrow{z_1} \wedge \ell\overrightarrow{x_2} \\ &= \ell\dot{\beta}\overrightarrow{y_2} \end{aligned}$$

**Question 2.4.** Par composition des vitesses au point $B$, on a :

$$\overrightarrow{V_{B,2/0}} = \overrightarrow{V_{B,2/1}} + \overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$$

avec, par relation de changement de point :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{B\in 1/0}} &= \overrightarrow{V_{A,1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB} \\ &= R\dot{\alpha}\overrightarrow{z_1} + \dot{\alpha}\,\overrightarrow{x} \wedge \ell\overrightarrow{x_2} \\ &= \dot{\alpha}\left(R + \ell\sin(\beta)\right)\overrightarrow{z_1}\end{aligned}$$

d'où, par somme :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{B,2/0}} = \dot{\alpha}\left(R + \ell\sin(\beta)\right)\overrightarrow{z_1} + \ell\dot{\beta}\overrightarrow{y_2}}$$

**Question 2.5.** Commençons par exprimer les éléments de réduction canoniques de la liaison pivot d'axe $(B, \overrightarrow{z_1})$ entre **2** et **3**, notamment le taux de rotation $\overrightarrow{\Omega_{3/2}}$.

Dans le plan de normale $\overrightarrow{z_1}$, on a :

$$(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) + (\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}) + (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{x_1}) \equiv 0\ [2\pi]$$

Sachant le triangle $ABC$ isocèle en $B$, on a $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{x_1}) = \beta$, d'où

$$(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}) \equiv -2\beta\ [2\pi]$$

Par dérivation, il vient alors :

$$\overrightarrow{\Omega_{3/2}} = -2\dot{\beta}\overrightarrow{z_1}$$

tel que

$$\forall M \in (B, \overrightarrow{z_1}), \quad \{\mathscr{V}_{3/2}\} = {}_M\begin{Bmatrix} -2\dot{\beta}\overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix}$$

d'où, par relation de changement de point :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{C,3/2}} &= \underbrace{\overrightarrow{V_{B,3/2}}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{\Omega_{3/2}} \wedge \overrightarrow{BC} \\ &= -2\dot{\beta}\overrightarrow{z_1} \wedge \ell\overrightarrow{x_3} \\ &= -2\ell\dot{\beta}\overrightarrow{y_3}\end{aligned}$$

**Question 2.6.** Par composition des vitesses au point $C$, on a :

$$\overrightarrow{V_{C,3/0}} = \overrightarrow{V_{C,3/2}} + \overrightarrow{V_{C\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{C\in 1/0}}$$

avec, par relation de changement de point :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{C\in 2/1}} &= \overrightarrow{V_{B,2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{BC} \\ &= \ell\dot{\beta}\overrightarrow{y_2} + \dot{\beta}\overrightarrow{z_1} \wedge \ell\overrightarrow{x_3} \\ &= \ell\dot{\beta}\left(\overrightarrow{y_2} + \overrightarrow{y_3}\right)\end{aligned}$$

et, comme $C \in \left(A, \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right)$, c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$, alors

$$\overrightarrow{V_{C\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A,1/0}}$$

Par somme, il vient :

$$\overrightarrow{V_{C,3/0}} = \dot{\alpha} R \overrightarrow{z_1} + \ell\dot{\beta}\left(\overrightarrow{y_2} - \overrightarrow{y_3}\right) \iff \boxed{\overrightarrow{V_{C,3/0}} = \dot{\alpha} R \overrightarrow{z_1} - 2\ell \sin(\beta)\dot{\beta}\,\overrightarrow{x}}$$

**Question 2.7.** Pour vérifier le cahier des charges, il suffit de prendre la situation extrême avec $\beta \equiv \pi/2\ [2\pi]$ constant. Dans ce cas, il vient :

$$\left\|\overrightarrow{V_{B,2/0}}\right\| = |\dot{\alpha}|\,(R + \ell)$$

Avec une vitesse de rotation de $|\dot{\alpha}| = 200\,\mathrm{tr/\,min} \approx 20\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$, $R = 20\,\mathrm{mm}$ et $\ell = 80\,\mathrm{mm}$, il vient :

$$\left\|\overrightarrow{V_{B,2/0}}\right\| \approx 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = v_{\max}$$

Donc le cahier des charges est vérifié.