Exercices PCSI
É.Bouchet

Équations différentielles

Exercice 1 (★). Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes (fonctions à valeurs réelles) :

1. $y' + 3y = 0$
2. $y' - 2ty = 0$
3. $y' + ay = 0$
4. $y' + \sin(3t)y = 0$
5. $y' + \frac{e^t}{e^t+1}y = 0$

Résultat attendu : Les ensembles de solutions sont :

1. $\{t \mapsto Ce^{-3t} | C \in \mathbb{R}\}$
2. $\{t \mapsto Ce^{t^2} | C \in \mathbb{R}\}$
3. $\{t \mapsto Ce^{-at} | C \in \mathbb{R}\}$
4. $\{t \mapsto Ce^{\frac{\cos(3t)}{3}} | C \in \mathbb{R}\}$
5. $\{t \mapsto \frac{C}{e^t+1} | C \in \mathbb{R}\}$

Exercice 2 (★). Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes (fonctions à valeurs réelles) :

1. $y' - 2ty = e^{t+t^2}$, sur $I = \mathbb{R}$
2. $y' + \frac{1}{t}y = e^t$, sur $I = \mathbb{R}_+^*$

Résultat attendu : Une résolution avec variation de la constante donne comme ensembles de solutions :

1. $\{t \mapsto Ce^{t^2} + e^{t+t^2} | C \in \mathbb{R}\}$
2. $\left\{t \mapsto \frac{C}{t} + e^t - \frac{e^t}{t} \middle| C \in \mathbb{R}\right\}$

Exercice 3 (★). Déterminer une solution particulière pour chacune des équations différentielles suivantes (fonctions à valeurs réelles) :

1. $y' - 2y = 3$ sur $I = \mathbb{R}$
2. $y' - 2y = t^2$ sur $I = \mathbb{R}$
3. $y' - 2y = e^{4t}$ sur $I = \mathbb{R}$
4. $y' - 2y = 3e^{2t}$ sur $I = \mathbb{R}$
5. $y' - 2y = \sin(2t)$ sur $I = \mathbb{R}$
6. $y' - 2y = 4\sin(2t) - 2t^2$ sur $I = \mathbb{R}$

Résultat attendu : Pour le dernier, on utilise le principe de superposition (combinaison linéaire de cas connus).

1. $t \mapsto -\frac{3}{2}$
2. $t \mapsto -\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}$
3. $t \mapsto \frac{e^{4t}}{2}$
4. $t \mapsto 3te^{2t}$
5. $t \mapsto -\frac{\cos(2t)+\sin(2t)}{4}$
6. $t \mapsto t^2 + t + \frac{1}{2} - \cos(2t) - \sin(2t)$

Exercice 4 (★★). Résoudre (en précisant l'intervalle de résolution), les équations différentielles suivantes (fonctions à valeurs réelles) :

1. $y'(x) - y(x) = x$
2. $y'(x) + y(x) = 2(e^x + e^{-x})$
3. $y'(x) = 2y(x) + (2x^2 - 1)e^{x^2}$
4. $(x^2+1)y'(x) + xy(x) = 0$
5. $y'(x) + y(x)\tan(x) = \cos^2(x)$

Indication : pour la troisième, chercher une solution particulière de la forme $x \mapsto (ax+b)e^{x^2}$

Résultat attendu :

1. Les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto Ce^x - 1 - x$ avec $C \in \mathbb{R}$.
2. Les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto Ce^{-x} + e^x + 2xe^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
3. Les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto Ce^{2x} + (x+1)e^{x^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
4. Les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto \frac{C}{\sqrt{x^2+1}}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
5. Les solutions sont les fonctions définies sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de la forme $x \mapsto C\cos(x) + \sin(x)\cos(x)$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 (★). Déterminer l'unique fonction u dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, u'(t) + \frac{1}{2}u(t) = t + 1 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Résultat attendu : u est la fonction $t \mapsto 3e^{-\frac{t}{2}} + 2t - 2$.

Exercice 6 (★★). Résoudre sur $]-1, +\infty[$ le problème de Cauchy (fonctions à valeurs réelles) :

$$\begin{cases} (x+1)y'(x) - xy(x) + 1 = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Résultat attendu : La solution est la fonction définie de $]-1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{e^x+1}{1+x}$.

Exercice 7 (★). Résoudre les équations différentielles suivantes (fonctions à valeurs réelles) :

1. $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = x^2 + 1$
2. $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = e^{-x}$
3. $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = \sin(x)$
4. $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 2e^x$
5. $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = 2$

Résultat attendu :

1. $\left\{x \mapsto C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{x^2}{6} + \frac{5x}{18} + \frac{37}{108} \middle| (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$
2. $\left\{x \mapsto (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + e^{-x} | (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$
3. $\left\{x \mapsto (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \frac{4\cos(x) + 3\sin(x)}{25} \middle| (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$
4. $\left\{x \mapsto (C_1 + C_2 x)e^{x} + x^2 e^x | (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$
5. $\left\{x \mapsto (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))e^{x} + \frac{2}{5} \middle| (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Exercice 8 (★). Déterminer la fonction y deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Résultat attendu : C'est la fonction $y : x \mapsto 2e^x + 1$.

Exercice 9 (★★). Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy (fonctions à valeurs complexes) :

$$\begin{cases} y''(x) - 2(1+i)y'(x) + 2iy(x) = x + i \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Résultat attendu : La solution est la fonction $x \mapsto \left(\frac{i}{2} + \frac{x}{2}\right) e^{(1+i)x} - \frac{i}{2}x - \frac{i}{2}$.

Exercice 10 (★★★).

1. Soit $u : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \tan(t) \end{array}$ et $v : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sqrt{t} \end{array}$. Déterminer une équation différentielle d'ordre 1 qui est vérifiée par chacune de ces fonctions.
2. Par un raisonnement par analyse-synthèse, déterminer toutes les fonctions u de classe C^1 sur un intervalle I (à déterminer également) et à valeurs réelles qui vérifient pour tout $t \in I$: $u'(t) = 1 + u(t)^2$.
3. Par un raisonnement par analyse-synthèse, déterminer toutes les fonctions v de classe C^1 sur un intervalle I (à déterminer également) et à valeurs réelles qui vérifient pour tout $t \in I$: $v(t) \neq 0$ et $v'(t) = \frac{1}{2v(t)}$.

Résultat attendu :

1. $\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $u'(t) = 1 + u(t)^2$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $v'(t) = \frac{1}{2v(t)}$.
   Les questions suivantes s'étudient par analyse-synthèse.
2. Pour tout $C \in \mathbb{R}$, la fonction définie sur $I = \left]-C - \frac{\pi}{2}, -C + \frac{\pi}{2}\right[$ par $t \mapsto \tan(t + C)$ est solution.
3. Pour tout $C \in \mathbb{R}$, les fonctions définies sur $I =]-C, +\infty[$ par $t \mapsto \sqrt{t + C}$ et $t \mapsto -\sqrt{t + C}$ sont solution.

Exercice 11 (Type DS)**.** On cherche à déterminer les fonctions y définies de $]-1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle (E) : $|t|\,y'+y=\frac{1}{1+t}$. On note (E_0) l'équation différentielle homogène associée.

1. **Résolution sur $I_1=]0,+\infty[$.** Résoudre (E) sur l'intervalle I_1. On appellera C_1 la constante utilisée.
2. **Résolution sur $I_2=]-1,0[$.**
   (a) Réécrire (E) sous la forme d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
   (b) Résoudre l'équation homogène (E_0) sur I_2.
   (c) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $t\in I_2$, $\frac{1}{t^2(1+t)}=\frac{a}{t}+\frac{b}{t^2}+\frac{c}{1+t}$.
   (d) A l'aide de la méthode de la variation de la constante et du résultat de la question précédente, déterminer une solution particulière de (E) sur I_2.
   (e) Conclure pour la résolution de (E) sur I_2. On appellera C_2 la constante utilisée.
3. **Résolution sur $I=]-1,+\infty[$.** Soit f une solution de (E) sur I, c'est-à-dire une fonction dérivable sur I telle que $\forall t\in I,\ |t|f'(t)+f(t)=\frac{1}{1+t}$.
   (a) Que vaut $f(0)$? Justifier que f est continue en 0.
   (b) Exprimer $f(t)$ pour $t\in I_1$, puis pour $t\in I_2$.
   (c) En utilisant la continuité de f en 0, quelles contraintes voit-on apparaître sur C_1 et C_2 ?
   (d) Calculer la limite pour $t\to 0^-$ de $\frac{f(t)-f(0)}{t}$. Que peut-on en déduire ?
   (e) Conclure la résolution de (E) sur I.

Résultat attendu :

1. Si $t\in I_1$, $|t|=t$, donc (E) équivaut à $ty'+y=\frac{1}{1+t}$, puis à $y'+\frac{1}{t}y=\frac{1}{t(1+t)}$. On reconnaît alors une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Une primitive sur I_1 de $t\mapsto\frac{1}{t}$ est $t\mapsto\ln(t)$. Les solutions de (E_0) sont donc les $y_H:t\mapsto C_1e^{-\ln t}=\frac{C_1}{t}$, avec $C_1\in\mathbb{R}$.
   Pour déterminer une solution particulière de (E), on utilise la méthode de la variation de la constante. Il faut pour cela déterminer une primitive de $t\mapsto\frac{e^{\ln(t)}}{t(1+t)}=\frac{1}{(1+t)}$. Sur I_1, $t\mapsto\ln(1+t)$ convient, donc $y_P:t\mapsto\frac{\ln(1+t)}{t}$ est une solution particulière.
   Les solutions de (E) sur I_1 sont donc les fonctions $y:t\mapsto\frac{C_1+\ln(1+t)}{t}$, avec $C_1\in\mathbb{R}$.
2. (a) Si $t\in I_2$, $|t|=-t$. Donc (E) équivaut sur I_2 à $-ty'+y=\frac{1}{1+t}$, puis à $y'-\frac{1}{t}y=-\frac{1}{t(1+t)}$.
   (b) (E_0) équivaut à $y'-\frac{1}{t}y=0$. Une primitive sur I_2 de $t\mapsto-\frac{1}{t}$ est $t\mapsto-\ln(-t)$. Les solutions de (E_0) sont donc les fonctions $y_H\ :\ t\mapsto C_2e^{\ln(-t)}=-C_2t$, avec $C_2\in\mathbb{R}$.
   (c) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $t\in I_2$, $\frac{a}{t}+\frac{b}{t^2}+\frac{c}{1+t}=\frac{at(t+1)+b(t+1)+ct^2}{t^2(1+t)}=\frac{(a+c)t^2+(a+b)t+b}{t^2(1+t)}$. Pour que l'égalité de l'énoncé soit vraie, il suffit d'avoir $b=1$, $a+b=0$ et $a+c=0$, c'est-à-dire $b=1$, $a=-1$ et $c=1$. Donc $\forall t\in I_2$, $\frac{1}{t^2(1+t)}=-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{1+t}$.
   (d) On cherche une primitive sur I_2 de $t\mapsto-\frac{e^{-\ln(-t)}}{t(1+t)}=\frac{1}{t^2(1+t)}$. Avec le résultat de la question précédente, on voit que $t\mapsto-\ln(-t)-\frac{1}{t}+\ln(1+t)$ convient. Donc (variation de la constante), une solution particulière de (E) sur I_2 est : $y_P:t\mapsto(-t)\times\big(-\ln(-t)-\frac{1}{t}+\ln(1+t)\big)=1+t\ln(-t)-t\ln(1+t)$.
   (e) Les solutions de (E) sur I_2 sont les fonctions $y:t\mapsto-C_2t+1+t\ln(-t)-t\ln(1+t)$, avec $C_2\in\mathbb{R}$.
3. (a) Prendre la valeur particulière $t=0$ dans (E) (ce qui est possible car $0\in I$) donne : $0+f(0)=\frac{1}{1+0}$, donc $f(0)=1$. Par ailleurs, f est dérivable sur I, donc en particulier en 0, donc continue en 0.
   (b) f étant une solution de (E) sur I, elle l'est en particulier sur I_1 et sur I_2. D'après les parties précédentes, il existe donc deux constantes C_1 et C_2 telles que : $\forall t\in I_1$, $f(t)=\frac{C_1+\ln(1+t)}{t}$ et $\forall t\in I_2$, $f(t)=-C_2t+1+t\ln(-t)-t\ln(1+t)$.
   (c) — Limite en 0^- : $-C_2t\underset{t\to0^-}{\longrightarrow}0$, $t\ln(-t)\underset{t\to0^-}{\longrightarrow}0$ (par croissances comparées) et $t\ln(1+t)\underset{t\to0^-}{\longrightarrow}0$. Donc $f(t)\underset{t\to0^-}{\longrightarrow}1$. Donc f est continue à gauche en 0, quelle que soit la valeur de C_2.
   — Limite en 0^+ : par dérivabilité de $t\mapsto\ln(1+t)$ en 0, $\frac{\ln(1+t)}{t}=\frac{\ln(1+t)-\ln(1+0)}{t-0}\underset{t\to0^+}{\longrightarrow}\frac{1}{1+0}=1$.
   Or $\forall t\in I_1$, $f(t)=\frac{C_1}{t}+\frac{\ln(1+t)}{t}$. Pour avoir $f(t)\underset{t\to0^+}{\longrightarrow}1$, il faut et il suffit d'avoir $\frac{C_1}{t}\underset{t\to0^+}{\longrightarrow}0$, ce qui est vrai si et seulement si $C_1=0$. Donc f est continue à droite en 0 si et seulement si $C_1=0$.
   (d) Soit $t\in I_2$, $\frac{f(t)-f(0)}{t}=\frac{-C_2t+1+t\ln(-t)-t\ln(1+t)-1}{t}=-C_2+\ln(-t)-\ln(1+t)\underset{t\to0^-}{\longrightarrow}-\infty$, quelle que soit la valeur de C_2. Donc f n'est pas dérivable à gauche en 0.
   (e) Les questions précédentes montrent que si f est solution de (E), alors f n'est pas dérivable à gauche en 0. Or, pour être solution de (E), il faut être dérivable (donc dérivable à gauche) en 0 : absurde. Donc (E) n'admet aucune solution sur I.