Polynômes

Exercice 1 (★). Calculer $(X+1)^5 - (X-1)^5$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = (X-2)^n - (X+5)^n$. Déterminer son degré et son coefficient dominant.

Exercice 3 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = (X-2)^n - (X+3)^n + 5n(X+1)^{n-1}$. Déterminer son degré et son coefficient dominant.

Exercice 4 (★). Effectuer les divisions euclidiennes dans $\mathbb{R}[X]$ de

1. $3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$
2. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$
3. $2X^3 - X^2 - X + 2$ par $X^2 - 1$
4. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^2 + X + 2$

Exercice 5 (★). Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On note R_α le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$. Montrer que $R_\alpha(X) = P(\alpha)$.

Exercice 6 (★★). Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1. Soit S le reste de la division euclidienne de P par X^2+1. Montrer que $S = 0$ si et seulement si $P(i) = 0$.
2. Déterminer les entiers positifs n tel que $X^2 + 1$ divise $X^n + 1$.

Exercice 7 (★★). Déterminer le reste de la division euclidienne de :

1. $X^n - X - 1$ par $(X-1)(X+2)$
2. $X^n - X - 1$ par $(X-1)^2$

Exercice 8 (★). Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ deux polynômes qui coïncident sur les entiers (c'est-à-dire tels que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $P(n) = Q(n)$). Montrer que $P = Q$.

Exercice 9 (★). Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(\arctan(x)) = Q(\arctan(x))$. Montrer que $P = Q$.

Exercice 10 (★★). Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 2$. Montrer que la fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ associée à P admet au plus n points fixes.

Exercice 11 (★★). Démontrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \bar{z}$.

Exercice 12 (★). Appliquer la formule de Taylor au polynôme $P(X) = X^4 + X^3 - 4X^2 + X + 1$ en 1.

Exercice 13 (★). Déterminer les racines de $P(X) = 4X^3 - 20X^2 + 27X - 9$, puis sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
Indication : commencer par tester si 3 *est racine.*

Exercice 14 (★). Déterminer les racines réelles de $Q(X) = X^4 - 4X^3 + 9X^2 - 10X + 4$. En déduire la forme factorisée de ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 15 (★). Soit $P(X) = 4X^3 + 4X^2 + 3X + 3$. Déterminer sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 16 (★). Soit $P(X) = X^5 - 1$. Déterminer sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 17 (★★). Soit $P(X) = X^6 + 1$. Déterminer sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 18 (★★★). Soit $P(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$. Déterminer sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 19 (★★★). Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = X^{2n} - 2\cos(n\theta)X^n + 1$. Déterminer sa décomposition en produits de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 20 (★).

1. Déterminer une primitive (intervalles à préciser) de : $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$.
2. En déduire une primitive (intervalles à préciser) pour chacune des fonctions suivantes :
   (a) $x \mapsto \dfrac{x^3 - x^2 - 4x + 3}{x+1}$ (b) $x \mapsto \dfrac{x^3 - x^2 - 4x + 3}{x^2+1}$ (c) $x \mapsto \dfrac{x^3 - x^2 - 4x + 3}{x^2-1}$

Exercice 21 (★★). Résoudre les équations d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$ suivantes :

1. $(P'(X))^2 = 4P(X)$
2. $(X^2+1)P''(X) - 6P(X) = 0$

Exercice 22 (★★★). Déterminer tous les polynômes P à coefficients réels vérifiant $(X+3)P(X) = XP(X+1)$.

Exercice 23 (Type DS). Soit $n \in \mathbb{N}$. On se propose d'étudier les polynômes $T_n \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(nx) = T_n(\cos(x)).$$

1. On fixe $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si un tel polynôme T_n existe, alors il est unique.
2. Déterminer $T_0(X)$, $T_1(X)$ et $T_2(X)$.
3. Soit $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Factoriser $\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)$.
   (b) En déduire que si $T_{n-1}(X)$ et $T_n(X)$ sont bien définis, on peut définir $T_{n+1}(X)$ par la relation $T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)$.
   (c) En déduire par récurrence l'existence de $T_n(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Déterminer le degré de $T_n(X)$ et son coefficient dominant.
5. Soit $n \geqslant 1$. Déterminer les $x \in [0, \pi]$ tels que $\cos(nx) = 0$. En déduire l'ensemble des racines de $T_n(X)$ puis sa décomposition en produit de polynômes irréductibles.
6. En évaluant le polynôme $T_n(X)$ en un point bien choisi, en déduire :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})(-1)^n}{2^{n-1}}.$$