

**Exercice 1 (★).** Calculer  $(X + 1)^5 - (X - 1)^5$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Résultat attendu :**  $(X + 1)^5 - (X - 1)^5 = 10X^4 + 20X^2 + 2$ .

**Exercice 2 (★).** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $P(X) = (X - 2)^n - (X + 5)^n$ . Déterminer son degré et son coefficient dominant.

**Résultat attendu :** Son degré vaut  $n - 1$  et son coefficient dominant vaut  $-7n \neq 0$ .

**Exercice 3 (★★).** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $P(X) = (X - 2)^n - (X + 3)^n + 5n(X + 1)^{n-1}$ . Déterminer son degré et son coefficient dominant.

**Résultat attendu :** Pour  $n = 1$ ,  $P(X) = 0$ .

Si  $n \geq 2$ , le degré vaut  $n - 2$  et le coefficient dominant vaut  $\frac{5n(n-1)}{2} \neq 0$ .

**Exercice 4 (★).** Effectuer les divisions euclidiennes dans  $\mathbb{R}[X]$  de

1.  $3X^5 + 4X^2 + 1$  par  $X^2 + 2X + 3$
2.  $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$  par  $X^3 + X + 2$
3.  $2X^3 - X^2 - X + 2$  par  $X^2 - 1$
4.  $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$  par  $X^2 + X + 2$

**Résultat attendu :**

1.  $3X^5 + 4X^2 + 1 = (X^2 + 2X + 3)(3X^3 - 6X^2 + 3X + 16) - 41X - 47$ .
2.  $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1 = (X^3 + X + 2)(3X^2 + 2X - 3) - 9X^2 - X + 7$ .
3.  $2X^3 - X^2 - X + 2 = (X^2 - 1)(2X - 1) + X + 1$ .
4.  $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1 = (X^2 + X + 2)(3X^3 - X^2 - 5X + 6) + 4X - 11$ .

**Exercice 5 (★).** Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On note  $R_\alpha$  le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X - \alpha$ . Montrer que  $R_\alpha(X) = P(\alpha)$ .

**Résultat attendu :** On énonce le théorème de division euclidienne, puis exploite au maximum l'information sur le degré du reste.

**Exercice 6 (★★).** Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$ .

1. Soit  $S$  le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X^2 + 1$ . Montrer que  $S = 0$  si et seulement si  $P(i) = 0$ .
2. Déterminer les entiers positifs  $n$  tel que  $X^2 + 1$  divise  $X^n + 1$ .

**Résultat attendu :**

1. On énonce le théorème de division euclidienne, puis exploite l'information sur le degré du reste.
2. En utilisant la question précédente, on trouve que ce sont les  $n \in \{2 + 4k | k \in \mathbb{N}\}$ .

**Exercice 7 (★★).** Déterminer le reste de la division euclidienne de :

1.  $X^n - X - 1$  par  $(X - 1)(X + 2)$
2.  $X^n - X - 1$  par  $(X - 1)^2$

**Résultat attendu :** Dans les deux cas, on énonce le théorème de division euclidienne en exploitant au maximum le degré du reste. On trouve comme reste :

1.  $-\frac{(2+(-2)^n)}{3}X + \frac{(-2)^n - 1}{3}$
2.  $-n + (n - 1)X$

**Exercice 8 (★).** Soit  $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$  deux polynômes qui coïncident sur les entiers (c'est-à-dire tels que  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,  $P(n) = Q(n)$ ). Montrer que  $P = Q$ .

**Résultat attendu :** On montre que  $P - Q = 0$  en utilisant les propriétés des racines.

**Exercice 9 (★).** Soit  $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $P(\arctan(x)) = Q(\arctan(x))$ . Montrer que  $P = Q$ .

**Résultat attendu :** On montre que  $P - Q = 0$  en utilisant les propriétés des racines.

**Exercice 10 (★★).** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré  $n \geq 2$ . Montrer que la fonction polynomiale de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  associée à  $P$  admet au plus  $n$  points fixes.

**Résultat attendu :** On raisonne par l'absurde. La contradiction provient des propriétés des racines et de l'hypothèse sur le degré.

**Exercice 11 (★★).** Démontrer qu'il n'existe pas de polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $P(z) = \bar{z}$ .

**Résultat attendu :** On raisonne par l'absurde. La contradiction vient de l'utilisation de la condition de l'énoncé sur les réels (dans un premier temps) puis sur un complexe bien choisi.

**Exercice 12 (★).** Appliquer la formule de Taylor au polynôme  $P(X) = X^4 + X^3 - 4X^2 + X + 1$  en 1.

**Résultat attendu :**  $P(X) = 5(X-1)^2 + 5(X-1)^3 + (X-1)^4$ .

**Exercice 13 (★).** Déterminer les racines de  $P(X) = 4X^3 - 20X^2 + 27X - 9$ , puis sa factorisation dans  $\mathbb{R}[X]$ .

*Indication : commencer par tester si 3 est racine.*

**Résultat attendu :**  $P(X) = (X-3)(4X^2 - 8X + 3) = 4(X-3)\left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X - \frac{3}{2}\right)$ .

**Exercice 14 (★).** Déterminer les racines réelles de  $Q(X) = X^4 - 4X^3 + 9X^2 - 10X + 4$ . En déduire la forme factorisée de ce polynôme dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Résultat attendu :** 1 est racine immédiate et on montre que c'est une racine double, une division donne alors  $Q(X) = (X-1)^2(X^2 - 2X + 4)$ . On ne peut pas faire mieux car  $X^2 - 2X + 4$  est de discriminant strictement négatif.

**Exercice 15 (★).** Soit  $P(X) = 4X^3 + 4X^2 + 3X + 3$ . Déterminer sa factorisation dans  $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{C}[X]$ .

**Résultat attendu :**  $P(X) = 4(X+1)\left(X^2 + \frac{3}{4}\right) = 4(X+1)\left(X + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$ .

**Exercice 16 (★).** Soit  $P(X) = X^5 - 1$ . Déterminer sa factorisation dans  $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{C}[X]$ .

**Résultat attendu :**  $P(X) = \prod_{k=0}^4 (X - e^{\frac{2ik\pi}{5}}) = (X-1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X + 1\right)$ .

**Exercice 17 (★★).** Soit  $P(X) = X^6 + 1$ . Déterminer sa factorisation dans  $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{C}[X]$ .

**Résultat attendu :**  $P(X) = (X - e^{\frac{i\pi}{6}})(X - e^{\frac{3i\pi}{6}})(X - e^{\frac{5i\pi}{6}})(X - e^{\frac{7i\pi}{6}})(X - e^{\frac{9i\pi}{6}})(X - e^{\frac{11i\pi}{6}})$ , puis  $P(X) = (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$ .

**Exercice 18 (★★★).** Soit  $P(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$ . Déterminer sa factorisation dans  $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{C}[X]$ .

**Résultat attendu :** Commencer par factoriser  $Y^3 + Y^2 + Y + 1$  donne :

$P(X) = (X+1)(X - e^{\frac{i\pi}{3}})(X - e^{\frac{5i\pi}{3}})(X - e^{\frac{i\pi}{6}})(X - e^{\frac{5i\pi}{6}})(X+i)(X - e^{-\frac{i\pi}{6}})(X-i)(X - e^{\frac{7i\pi}{6}})$ ,  
 $P(X) = (X+1)(X^2 - X + 1)(X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$ .

**Exercice 19 (★★★).** Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $P(X) = X^{2n} - 2\cos(n\theta)X^n + 1$ . Déterminer sa décomposition en produits de polynômes irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Résultat attendu :** Commencer par factoriser  $Y^2 - 2\cos(n\theta)Y + 1$  donne :

$P(X) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{i\theta} e^{\frac{2ik\pi}{n}})\right) \left(\prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{-i\theta} e^{\frac{2ik\pi}{n}})\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2\cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)X + 1\right)$ .

**Exercice 20 (★).**

1. Déterminer une primitive (intervalles à préciser) de :  $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$  et  $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$ .

2. En déduire une primitive (intervalles à préciser) pour chacune des fonctions suivantes :

(a)  $x \mapsto \frac{x^3 - x^2 - 4x + 3}{x+1}$       (b)  $x \mapsto \frac{x^3 - x^2 - 4x + 3}{x^2 + 1}$       (c)  $x \mapsto \frac{x^3 - x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$

**Résultat attendu :**

1. Des primitives sont  $x \mapsto \ln|x+1|$  (sur  $] -\infty, -1[$  ou  $] -1, +\infty[$ ), puis  $x \mapsto \arctan(x)$  (sur  $\mathbb{R}$ ) et  $x \mapsto \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1|$  (sur  $] -\infty, -1[$  ou  $] -1, 1[$  ou  $] 1, +\infty[$ ).

2. (a) Une primitive est  $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + 5 \ln|x+1|$  (sur  $] -\infty, -1[$  ou  $] -1, +\infty[$ ).

(b) Une primitive est  $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - x + 4 \arctan(x) - \frac{5}{2} \ln|x^2 + 1|$  (sur  $\mathbb{R}$ ).

(c) Une primitive est  $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{5}{2} \ln|x+1|$  (sur  $] -\infty, -1[$  ou  $] -1, 1[$  ou  $] 1, +\infty[$ ).

**Exercice 21 (★★).** Résoudre les équations d'inconnue  $P \in \mathbb{C}[X]$  suivantes :

1.  $(P'(X))^2 = 4P(X)$

2.  $(X^2 + 1)P''(X) - 6P(X) = 0$

**Résultat attendu :** Les ensembles de solutions sont :

1.  $\{0\} \cup \left\{X^2 + bX + \frac{b^2}{4} \mid b \in \mathbb{C}\right\}$

2.  $\{\lambda(X^3 + X) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$

**Exercice 22 (★★★).** Déterminer tous les polynômes  $P$  à coefficients réels vérifiant  $(X+3)P(X) = XP(X+1)$ .

**Résultat attendu :** On montre en raisonnant par analyse-synthèse que les solutions sont les polynômes de la forme  $aX(X+1)(X+2)$ , avec  $a \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 23** (Type DS). Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On se propose d'étudier les polynômes  $T_n \in \mathbb{R}[X]$  qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(nx) = T_n(\cos(x)).$$

1. On fixe  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que si un tel polynôme  $T_n$  existe, alors il est unique.
2. Déterminer  $T_0(X)$ ,  $T_1(X)$  et  $T_2(X)$ .
3. Soit  $n \geq 1$  et  $x \in \mathbb{R}$ .
  - (a) Factoriser  $\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)$ .
  - (b) En déduire que si  $T_{n-1}(X)$  et  $T_n(X)$  sont bien définis, on peut définir  $T_{n+1}(X)$  par la relation  $T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)$ .
  - (c) En déduire par récurrence l'existence de  $T_n(X)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Déterminer le degré de  $T_n(X)$  et son coefficient dominant.
5. Soit  $n \geq 1$ . Déterminer les  $x \in [0, \pi]$  tels que  $\cos(nx) = 0$ . En déduire l'ensemble des racines de  $T_n(X)$  puis sa décomposition en produit de polynômes irréductibles.
6. En évaluant le polynôme  $T_n(X)$  en un point bien choisi, en déduire :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)(-1)^n}{2^{n-1}}.$$

**Résultat attendu :**

1. Soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes vérifiant la relation. Alors  $\forall x \in \mathbb{R}, P(\cos(x)) = \cos(nx) = Q(\cos(x))$ . Donc  $\forall x \in \mathbb{R}, (P - Q)(\cos(x)) = 0$ , c'est-à-dire  $\cos(x)$  est racine de  $P - Q$ . Donc tous les éléments de  $[-1, 1]$  sont racines de  $P - Q$ . Comme il y en a une infinité, on en déduit que  $P - Q = 0$ , c'est-à-dire  $P = Q$ . D'où l'unicité.
2.  $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(0x) = 1$ , donc  $T_0(X) = 1$  convient.  $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(1x) = \cos(x)$ , donc  $T_1(X) = X$  convient.  $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ , donc  $T_2(X) = 2X^2 - 1$  convient.
3. (a) Les formules trigonométriques donnent  $\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos(x)\cos(nx)$ .
  - (b) On suppose que  $T_{n-1}(X)$  et  $T_n(X)$  sont bien définis. Alors la question précédente donne pour tout  $x \in \mathbb{R}, 2\cos(x)T_n(\cos(x)) - T_{n-1}(\cos(x)) = 2\cos(x)\cos(nx) - \cos((n-1)x) = \cos((n+1)x)$ . On peut donc définir  $T_{n+1}(X)$  par la relation  $T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)$ .
  - (c) Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $P(n)$  : « le polynôme  $T_n(X)$  existe ».
    - $T_0(X)$  et  $T_1(X)$  existent d'après la question 2. Donc  $P(0)$  et  $P(1)$  sont vraies.
    - Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on suppose que  $P(n-1)$  et  $P(n)$  sont vraies. Donc  $T_{n-1}(X)$  et  $T_n(X)$  sont bien définies. Par la question précédente, on en déduit que  $T_{n+1}(X)$  existe. Donc  $P(n+1)$  est vraie. Le principe de récurrence double donne alors que pour tout  $n \in \mathbb{N}, T_n(X)$  existe.
4.  $T_0(X)$  a pour degré 0 et pour coefficient dominant 1.
 

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $P(n)$  : «  $T_n(X)$  a pour degré  $n$  et pour coefficient dominant  $2^{n-1}$  ».

  - $T_1(X) = X$  a pour degré 1 et pour coefficient dominant  $1 = 2^0$ , donc  $P(1)$  est vraie.
  - $T_2(X) = 2X^2 - 1$  a pour degré 2 et pour coefficient dominant  $2 = 2^1$ , donc  $P(2)$  est vraie.
  - Soit  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . On suppose que  $P(n-1)$  et  $P(n)$  sont vraies. Il existe donc un polynôme  $Q$  de degré inférieur à  $n-1$  tel que  $T_n(X) = 2^{n-1}X^n + Q(X)$ .  
Donc  $T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X) = 2^n X^{n+1} + 2XQ(X) - T_{n-1}(X)$ , ce qui donne que  $T_{n+1}(X)$  est de degré  $n+1$  et de coefficient dominant  $2^n$ . Donc  $P(n+1)$  est vraie.  
Par principe de récurrence double, on en déduit le résultat annoncé.
5. Soit  $x \in [0, \pi], \cos(nx) = 0 \Leftrightarrow nx \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } nx = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \text{ tq } x = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ .  
Or les racines de  $T_n(X)$  sont les cosinus de ces valeurs, donc  $T_n(X) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left( X - \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2n}\right) \right)$ .
6. En particulier  $T_n(0) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left( -\cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2n}\right) \right)$ . Donc  $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \frac{T_n(0)(-1)^n}{2^{n-1}}$ .  
Or,  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , donc  $T_n(0) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ . On en déduit le résultat annoncé.