Dérivabilité

Exercice 1 (★). Soit φ une fonction dérivable sur $[-1,1]$ vérifiant $\varphi(-1)=-1$, $\varphi(0)=1$ et $\varphi(1)=0$. Montrer que φ' s'annule au moins une fois.

Exercice 2 (★★). Soit $f:[-1,+\infty[\to\mathbb{R}$ dérivable et telle que $f(-1)=1$, $f(0)=0$ et $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$. Montrer que f' s'annule.

Exercice 3 (★★). Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $g(0)=g(3)=0$ et $g(1)g(2)<0$. Montrer que g'' s'annule.

Exercice 4 (★★★). Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I. On suppose que f est continue et injective. Montrer que f est strictement monotone sur I.

Exercice 5 (★). Montrer qu'une fonction g de classe C^1 sur un segment $[a,b]$ est lipschitzienne.

Exercice 6 (★★). Soit $g\in C^1(\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{+\infty} g'=1=\lim\limits_{-\infty} g'$. Montrer que g est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 (★). Soit $\alpha>0$. On pose $\forall t\in\mathbb{R},\ p(t)=\alpha\arctan(\alpha t+1)$. Montrer que cette fonction est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 (★). Soit $f:t\mapsto\sqrt{t+1}$ (définie sur $[-1,+\infty[$).

1. Montrer que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ (et expliciter un rapport de Lipschitz).
2. Même question sur $[a,b]$, où $-1<a<b$.
3. f est-elle lipschitzienne sur son ensemble de définition ?

Exercice 9 (★★). Soit $g:t\mapsto e^{-t}+t^2$ (définie sur $\mathbb{R}$).

1. Montrer que g est lipschitzienne sur $[0,1]$ (et expliciter un rapport de Lipschitz).
2. Même question sur $[a,b]$, où a et b sont deux réels tels que $a<b$.
3. Est-elle lipschitzienne sur son ensemble de définition ?

Exercice 10 (★★). Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a<b$.

1. Soit h une fonction de classe C^2 sur $[a,b]$ telle que $h(a)=h(b)=0$, et soit $c\in]a,b[$.
   (a) Déterminer $\beta\in\mathbb{R}$ pour lequel la fonction $g:x\mapsto h(x)-\beta(x-a)(x-b)$ s'annule en a, b et c.
   (b) En utilisant le théorème de Rolle, en déduire qu'il existe $\gamma\in]a,b[$ tel que $h(c)=\frac{(c-a)(c-b)}{2}h''(\gamma)$.
2. Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a,b]$. On note φ la fonction affine (droite) qui interpole f en a et b (c'est-à-dire telle que $\varphi(a)=f(a)$ et $\varphi(b)=f(b)$).
   (a) Soit $x\in[a,b]$, déterminer l'expression de $\varphi(x)$ en fonction de x.
   (b) Déduire de la question 1 que : $\forall x\in]a,b[,\ \exists\gamma\in]a,b[$ tel que $f(x)=\varphi(x)+\frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(\gamma)$.
   (c) Que se passe-t-il géométriquement lorsque $f''\geqslant 0$?

Exercice 11 (★★). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0=\frac{1}{2}$ et pour tout n entier naturel, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Montrer que f est bien définie et déterminer ses points fixes.
2. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$ puis prouver que pour tout $x\in[\frac{1}{2},1]$ $f(x)\geqslant\sqrt{\frac{3}{4}}$.
3. En déduire que pour tout $x\in[\frac{1}{2},1]$, $|f'(x)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$.
4. Déduire des questions précédentes la bonne définition et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 12 (★★★). Trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ pour lesquelles il existe $k>0$ et $\alpha>1$ tels que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}_+^2,\quad |f(x)-f(y)|\leqslant k\,|x-y|^\alpha$. Ce résultat reste-t-il vrai quand $\alpha\in]0,1[$?

Exercice 13 (★). Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

1. $f:x\mapsto(x^3+x^2+1)e^{-x}$
2. $g:x\mapsto x^{n-1}\ln(x)$
3. $h:x\mapsto x^2(1+x)^n$

Exercice 14 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $P_n(x) = (x^2-1)^n$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ on a $P_n^{(k)}(1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$.
2. En déduire que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ $P_n^{(k)}$ admet (au moins) k racines distinctes strictement comprises entre -1 et 1.

Exercice 15 (★). Déterminer l'équation de la corde pour les fonctions suivantes. En déduire les inégalités de convexité associées.

1. $x \mapsto \sin(x)$ entre $\frac{\pi}{2}$ et π
2. $x \mapsto \cos(x)$ entre $\frac{\pi}{2}$ et π

Exercice 16 (★). Prouver que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0$
2. $\forall u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(u) \leqslant u$ et $2u \leqslant \pi \sin(u)$

Exercice 17 (★★). Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geqslant 2\exp(\frac{x}{2}) - 1$.

Exercice 18 (★★). Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ où les fonctions suivantes sont convexes.

1. $f : x \to \frac{x^3}{x^2+12}$
2. $g : x \to |x|$

Exercice 19 (★★). Soit $(a_1, a_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Comparer $\frac{a_1+a_2}{2}$ et $\sqrt{a_1 a_2}$.

Exercice 20 (Type DS)**.** L'objectif de cet exercice est d'établir la convergence de la méthode de Newton, très utile pour déterminer (par valeurs approchées) des solutions d'une équation de type $f(x) = 0$. Soit deux réels $a < b$ et une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On suppose que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ et que $\forall x \in [a, b]$, $f'(x) > 0$.

1. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à $]a, b[$.
   (b) Soit $x_0 \in [a, b]$ et m l'abscisse du point d'intersection de la tangente à f en x_0 (dont on rappellera l'équation) et de l'axe des abscisses. Faire un schéma de la situation. Montrer que $m = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.
2. (a) Pour tout $x \in [a, b]$, on pose $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Justifier que g est de classe C^1 sur $[a, b]$.
   (b) Calculer $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$.
3. On suppose, dans cette question 3 seulement, que $\forall x \in [a, b]$, $f''(x) \leqslant 0$. On considère alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
   (a) Étudier le signe de g' et en déduire les variations de la fonction g.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $[a, \alpha]$, puis qu'elle est croissante, convergente, et que sa limite vaut α.
4. On revient au cas général.
   (a) Justifier qu'il existe $h > 0$ tel que, en notant $I = [\alpha - h, \alpha + h]$, on ait $\forall x \in I$, $|g'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
   (b) Justifier que $\forall (x, y) \in I^2$, $|g(x) - g(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|$.
   (c) Établir que $\forall x \in I$, $g(x) \in I$. *Indication : par définition de I, $x \in I \Leftrightarrow |x - \alpha| \leqslant h$.*
   (d) En déduire que si $u_0 \in I$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = g(u_n)$ converge vers α.