Exercices PCSI
É.Bouchet

# Dérivabilité

**Exercice 1 (★).** Soit $\varphi$ une fonction dérivable sur $[-1,1]$ vérifiant $\varphi(-1)=-1$, $\varphi(0)=1$ et $\varphi(1)=0$. Montrer que $\varphi'$ s'annule au moins une fois.
**Résultat attendu :** Le théorème des valeurs intermédiaires donne un point d'annulation supplémentaire entre $-1$ et $0$, ce qui permet d'appliquer ensuite le théorème de Rolle.

**Exercice 2 (★★).** Soit $f:[-1,+\infty[\to\mathbb{R}$ dérivable et telle que $f(-1)=1$, $f(0)=0$ et $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$. Montrer que $f'$ s'annule.
**Résultat attendu :** Le théorème des valeurs intermédiaires donne un point supplémentaire où la valeur 1 est atteinte, ce qui permet d'appliquer ensuite le théorème de Rolle.

**Exercice 3 (★★).** Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $C^2$ telle que $g(0)=g(3)=0$ et $g(1)g(2)<0$. Montrer que $g''$ s'annule.
**Résultat attendu :** Le théorème des valeurs intermédiaires donne un point supplémentaire d'annulation, ce qui permet d'appliquer le théorème de Rolle pour déterminer les annulations de $g'$, puis de $g''$.

**Exercice 4 (★★★).** Soit $f$ une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle $I$. On suppose que $f$ est continue et injective. Montrer que $f$ est strictement monotone sur $I$.
**Résultat attendu :** On raisonne par l'absurde, la contradiction est ensuite obtenue grâce au théorème des valeurs intermédiaires.

**Exercice 5 (★).** Montrer qu'une fonction $g$ de classe $C^1$ sur un segment $[a,b]$ est lipschitzienne.
**Résultat attendu :** On applique le théorème des bornes atteintes à $g'$, puis l'inégalité des accroissements finis.

**Exercice 6 (★★).** Soit $g\in C^1(\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{+\infty} g'=1=\lim\limits_{-\infty} g'$. Montrer que $g$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
**Résultat attendu :** On utilise les propriétés des limites et le théorème des bornes atteintes pour montrer que $g'$ est bornée, puis on conclut avec l'inégalité des accroissements finis.

**Exercice 7 (★).** Soit $\alpha>0$. On pose $\forall t\in\mathbb{R}$, $p(t)=\alpha\arctan(\alpha t+1)$. Montrer que cette fonction est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
**Résultat attendu :** On montre par inégalité des accroissements finis que $p$ est $\alpha^2$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 8 (★).** Soit $f:t\mapsto\sqrt{t+1}$ (définie sur $[-1,+\infty[$).

1. Montrer que $f$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ (et expliciter un rapport de Lipschitz).
2. Même question sur $[a,b]$, où $-1<a<b$.
3. $f$ est-elle lipschitzienne sur son ensemble de définition ?

**Résultat attendu :**

1. On montre par inégalité des accroissements finis que $f$ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.
2. On montre par inégalité des accroissements finis que $f$ est $\frac{1}{2\sqrt{a+1}}$-lipschitzienne sur $[a,b]$.
3. Non, on le montre par l'absurde (un passage à la limite donne la contradiction).

**Exercice 9 (★★).** Soit $g:t\mapsto e^{-t}+t^2$ (définie sur $\mathbb{R}$).

1. Montrer que $g$ est lipschitzienne sur $[0,1]$ (et expliciter un rapport de Lipschitz).
2. Même question sur $[a,b]$, où $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a<b$.
3. Est-elle lipschitzienne sur son ensemble de définition ?

**Résultat attendu :**

1. On montre par inégalité des accroissements finis que $f$ est 3-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.
2. On montre par inégalité des accroissements finis que $f$ est $(2\max(|a|,|b|)+e^{-a})$-lipschitzienne sur $[a,b]$.
3. Non, on le montre par l'absurde (un passage à la limite donne la contradiction).

**Exercice 10 (★★).** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

1. Soit $h$ une fonction de classe $C^2$ sur $[a,b]$ telle que $h(a) = h(b) = 0$, et soit $c \in ]a,b[$.
   (a) Déterminer $\beta \in \mathbb{R}$ pour lequel la fonction $g : x \mapsto h(x) - \beta(x-a)(x-b)$ s'annule en $a$, $b$ et $c$.
   (b) En utilisant le théorème de Rolle, en déduire qu'il existe $\gamma \in ]a,b[$ tel que $h(c) = \frac{(c-a)(c-b)}{2} h''(\gamma)$.
2. Soit $f$ une fonction de classe $C^2$ sur $[a,b]$. On note $\varphi$ la fonction affine (droite) qui interpole $f$ en $a$ et $b$ (c'est-à-dire telle que $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(b) = f(b)$).
   (a) Soit $x \in [a,b]$, déterminer l'expression de $\varphi(x)$ en fonction de $x$.
   (b) Déduire de la question 1 que : $\forall x \in ]a,b[, \exists \gamma \in ]a,b[$ tel que $f(x) = \varphi(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(\gamma)$.
   (c) Que se passe-t-il géométriquement lorsque $f'' \geqslant 0$ ?

**Résultat attendu :**

1. (a) $g$ s'annule toujours en $a$ et $b$. Elle s'annule en $c$ si et seulement si $\beta = \frac{h(c)}{(c-a)(c-b)}$.
   (b) $g'$ s'annule deux fois, donc $g''$ s'annule en un point $\gamma$ et en remplaçant on trouve la relation.
2. (a) $\forall x \in [a,b]$, $\varphi(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} x + \frac{f(a)b - af(b)}{b-a}$.
   (b) On applique le résultat de la question 1 à $h : x \mapsto f(x) - \varphi(x)$.
   (c) La courbe est en dessous de la sécante sur $[a,b]$ car $\forall x \in [a,b]$, $\varphi(x) - f(x) = -\frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(\gamma) \geqslant 0$ (en effet, sur $[a,b]$, $(x-a)(x-b) \leqslant 0$).

**Exercice 11 (★★).** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n$ entier naturel, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que $f$ est bien définie et déterminer ses points fixes.
2. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$ puis prouver que pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ $f(x) \geqslant \sqrt{\frac{3}{4}}$.
3. En déduire que pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$.
4. Déduire des questions précédentes la bonne définition et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Résultat attendu :**

1. $x \mapsto x^2 - x + 1$ est à valeurs positives sur $\mathbb{R}$, donc $f$ est bien définie. Son unique point fixe est 1.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{x - \frac{1}{2}}{f(x)}$. Une étude des variations donne ensuite $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $f(x) \geqslant f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{3}{4}}$.
3. On utilise l'expression de $f'$ et la minoration de $f$ obtenues en question précédente.
4. On se place sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$ stable par $f$, qui contient $u_0$ et sur lequel (par inégalité des accroissements finis) $f$ est lipschitzienne de rapport $0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$. Donc $u$ est bien définie et converge vers 1.

**Exercice 12 (★★★).** Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe $k > 0$ et $\alpha > 1$ tels que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x-y|^\alpha$. Ce résultat reste-t-il vrai quand $\alpha \in ]0,1[$ ?

**Résultat attendu :** On montre par analyse-synthèse que seules les fonctions constantes satisfont la condition (dans le cas $\alpha > 1$). Ce résultat n'est plus vrai quand $\alpha \in ]0,1[$ (on trouve une fonction non-constante qui vérifie la condition pour le montrer).

**Exercice 13 (★).** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la dérivée $n$-ième des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto (x^3 + x^2 + 1)e^{-x}$
2. $g : x \mapsto x^{n-1} \ln(x)$
3. $h : x \mapsto x^2(1+x)^n$

**Résultat attendu :**

1. On trouve par la formule de Leibniz pour $n \geqslant 3$ (et on vérifie à la main les premiers cas) que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x} \left(x^3 + (1-3n)x^2 + (3n^2 - 5n)x - n^3 + 4n^2 - 3n + 1\right).$$
2. La formule de Leibniz donne $\forall x > 0$, $g^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}$.
3. La formule de Leibniz donne $\forall x \in \mathbb{R}$, $h^{(n)}(x) = n! \left(\frac{2+3n+n^2}{2} x^2 + n(n+1)x + \frac{n(n-1)}{2}\right)$.

**Exercice 14 (★★).** Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $P_n$ la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $P_n(x) = (x^2-1)^n$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ on a $P_n^{(k)}(1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$.
2. En déduire que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ $P_n^{(k)}$ admet (au moins) $k$ racines distinctes strictement comprises entre $-1$ et $1$.

**Résultat attendu :**

1. Découle des propriétés sur les ordres de multiplicité d'une racine.
2. On le montre par récurrence à l'aide du théorème de Rolle.

**Exercice 15 (★).** Déterminer l'équation de la corde pour les fonctions suivantes. En déduire les inégalités de convexité associées.

1. $x \mapsto \sin(x)$ entre $\frac{\pi}{2}$ et $\pi$
2. $x \mapsto \cos(x)$ entre $\frac{\pi}{2}$ et $\pi$

**Résultat attendu :**

1. L'équation de la corde est $y = -\frac{2}{\pi}x + \ 2$, donc $\forall x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\sin(x) \geqslant -\frac{2}{\pi}x + \ 2$.
2. L'équation de la corde est $y = -\frac{2}{\pi}x + \ 1$, donc $\forall x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\cos(x) \leqslant -\frac{2}{\pi}x + \ 1$.

**Exercice 16 (★).** Prouver que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0$
2. $\forall u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(u) \leqslant u$ et $2u \leqslant \pi \sin(u)$

**Résultat attendu :**

1. On étudie la convexité de $x \mapsto x^{n+1}$, puis la comparaison de la courbe avec une tangente bien choisie.
2. On étudie la convexité de $u \mapsto \sin(u)$, puis la comparaison de la courbe avec une sécante et une tangente bien choisies.

**Exercice 17 (★★).** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geqslant 2\exp(\frac{x}{2}) - 1$.
**Résultat attendu :** On étudie la convexité de $x \mapsto \exp(x)$, puis on utilise les propriétés des sécantes.

**Exercice 18 (★★).** Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ où les fonctions suivantes sont convexes.

1. $f : x \to \frac{x^3}{x^2+12}$
2. $g : x \to |x|$

**Résultat attendu :** $f$ est convexe sur $]-\infty, -6]$ et sur $[0, 6]$, concave ailleurs. $g$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 19 (★★).** Soit $(a_1, a_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Comparer $\frac{a_1+a_2}{2}$ et $\sqrt{a_1 a_2}$.
**Résultat attendu :** La concavité de $x \to \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donne après calculs $\frac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2}$.

**Exercice 20** (Type DS)**.** L'objectif de cet exercice est d'établir la convergence de la méthode de Newton, très utile pour déterminer (par valeurs approchées) des solutions d'une équation de type $f(x) = 0$. Soit deux réels $a < b$ et une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$. On suppose que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ et que $\forall x \in [a, b]$, $f'(x) > 0$.

1. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ appartenant à $]a, b[$.

   (b) Soit $x_0 \in [a, b]$ et $m$ l'abscisse du point d'intersection de la tangente à $f$ en $x_0$ (dont on rappellera l'équation) et de l'axe des abscisses. Faire un schéma de la situation. Montrer que $m = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

2. (a) Pour tout $x \in [a, b]$, on pose $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Justifier que $g$ est de classe $C^1$ sur $[a, b]$.

   (b) Calculer $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$.

3. On suppose, dans cette question 3 seulement, que $\forall x \in [a, b]$, $f''(x) \leqslant 0$. On considère alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

   (a) Étudier le signe de $g'$ et en déduire les variations de la fonction $g$.

   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $[a, \alpha]$, puis qu'elle est croissante, convergente, et que sa limite vaut $\alpha$.

4. On revient au cas général.

   (a) Justifier qu'il existe $h > 0$ tel que, en notant $I = [\alpha - h, \alpha + h]$, on ait $\forall x \in I$, $|g'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

   (b) Justifier que $\forall (x, y) \in I^2$, $|g(x) - g(y)| \leqslant \frac{1}{2} |x - y|$.

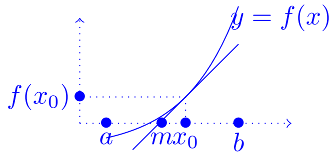
   (c) Établir que $\forall x \in I$, $g(x) \in I$. *Indication : par définition de $I$, $x \in I \Leftrightarrow |x - \alpha| \leqslant h$.*

   (d) En déduire que si $u_0 \in I$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = g(u_n)$ converge vers $\alpha$.

**Résultat attendu :**

1. (a) $f$ est continue sur $]a, b[$ (car de classe $C^2$), strictement croissante sur $]a, b[$ (car $\forall x \in ]a, b[$, $f'(x) > 0$). Par le théorème de la bijection, elle est donc bijective de $]a, b[$ dans $]f(a), f(b)[$. Or $0 \in ]f(a), f(b)[$. Donc il existe un unique $\alpha \in ]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

   (b) On trouve comme équation de la tangente à $f$ en $x_0$ : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
   L'intersection avec l'axe des abscisses donne $f(x_0) + f'(x_0)(m - x_0) = 0$, ce qui donne la relation $m = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.




2. (a) $f$ est de classe $C^2$ sur $[a, b]$, donc $f'$ est de classe $C^1$ sur $[a, b]$. Or $f'$ ne s'annule jamais (car $\forall x \in [a, b]$, $f'(x) > 0$). Donc $g$ est de classe $C^1$ sur $[a, b]$, par somme et quotient de fonctions de classe $C^1$.

   (b) $g(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha - 0 = \alpha$. Or $\forall x \in [a, b]$, $g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$. Donc $g'(\alpha) = 0$.

3. (a) $\forall x \in [a, b]$, $g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$. Comme $f''$ est négative, le signe de $g'$ dépend de celui de $f$ (qui est négative sur $[a, \alpha]$ et positive sur $[\alpha, b]$). On en déduit le tableau de variations.

| $x$ | $a$ | | $\alpha$ | | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | | $\nearrow$ | $\alpha$ | $\searrow$ | |

   (b) Soit $x \in [a, \alpha]$. Par croissance de $g$ sur $[a, \alpha]$, $g(a) \leqslant g(x) \leqslant g(\alpha)$, donc $a - \frac{f(a)}{f'(a)} \leqslant g(x) \leqslant \alpha$. Comme $f(a) < 0$, $a - \frac{f(a)}{f'(a)} \geqslant a$. Donc $g(x) \in [a, \alpha]$. Donc $[a, \alpha]$ est stable par $g$. Or $u_0 = a \in [a, \alpha]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$. Donc $u$ est bien définie et à valeurs dans $[a, \alpha]$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n = -\frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$. Or $u_n \in [a, \alpha]$, donc $f(u_n) \leqslant 0$ et $f'(u_n) > 0$. Donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, ce qui montre la croissance de $u$. Comme de plus $u$ est majorée (par $\alpha$), elle converge vers un réel $\ell$. Et comme $u$ est à valeurs dans $[a, \alpha]$, $\ell \in [a, \alpha]$. Comme $g$ est continue sur cet intervalle, le théorème du point fixe donne $g(\ell) = \ell$. Donc $f(\ell) = 0$, donc $\ell = \alpha$. Donc $u$ converge vers $\alpha$.

4. (a) $g'$ est continue en $\alpha$, donc $\lim\limits_{x\to\alpha} g'(x) = g'(\alpha) = 0$. Donc par définition de la limite (pour $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$), il existe un voisinage de $\alpha$ où $|g'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$. La définition de voisinage donne l'existence du $h$ demandé.

   (b) $g$ est dérivable sur $I$ et $\forall x \in I$, $|g'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$. Donc par inégalité des accroissements finis, $g$ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $I$, ce qui donne l'inégalité demandée.

   (c) Soit $x \in I$, alors $|x - \alpha| \leqslant h$ donc $|g(x) - \alpha| = |g(x) - g(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2} |x - \alpha| \leqslant \frac{h}{2} \leqslant h$. Donc $g(x) \in I$.

   (d) D'après les questions précédentes et en supposant $u_0 \in I$, $I$ est stable par $g$, $g$ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $I$, avec $\frac{1}{2} \in [0, 1[$, $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$. De plus, soit $x \in I$, $g(x) = x \iff f(x) = 0 \iff x = \alpha$. Donc par propriété des suites récurrentes, $u$ converge vers $\alpha$.