# Espaces vectoriels

**Exercice 1 (★).** Les ensembles suivants munis des opérations usuelles sont-ils des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ?

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3x - 2y - z = 0\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = x^2 \text{ et } z = 2x\}$.
3. $E_3$ est l'ensemble des fonctions $f$ continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant $2f(-1) = f(1)$.
4. $E_4 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a\sin(x) + b\cos(x)\}$.
5. $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 4\}$.
6. $E_6$ est l'ensemble des fonctions $y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de $y' + e^{-t}y = 0$.

**Résultat attendu :**

1. Oui 2. Non 3. Oui 4. Oui 5. Non 6. Oui

**Exercice 2 (★).** Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il s'agit ou non d'un espace vectoriel :

1. L'ensemble $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x - 4y = 0\}$.
2. L'ensemble $F_2$ des suites réelles qui divergent vers $+\infty$.
3. L'ensemble $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y^2 = 0\}$.
4. L'ensemble $F_4$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f(1)$.
5. L'ensemble $F_5 = \{(2x, y + 1, -x + y) \text{ avec } (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
6. L'ensemble $F_6$ des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré exactement $n$.

**Résultat attendu :**

1. Oui 2. Non 3. Non 4. Oui 5. Non 6. Non

**Exercice 3 (★).** Les familles suivantes sont-elles libres dans leurs espaces vectoriels de référence respectifs ?

1. $(e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (5, -2, -3)$, $e_2 = (4, 1, -3)$ et $e_3 = (-2, 6, 1)$.
2. $(h_0, h_1, h_2)$ où ces trois fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ par $h_0 : x \longrightarrow 1$, $h_1 : x \longrightarrow e^x$ et $h_2 : x \longrightarrow e^{2x}$.
3. $(u, v)$ avec $u = (10, -5, 15)$, $v = (-4, 2, -6)$.

**Résultat attendu :**

1. Oui 2. Oui 3. Non : $2u + 5v = 0$

**Exercice 4 (★).** Soit $u$, $v$ et $w$ trois suites réelles définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$, $v_n = 3^n$ et $w_n = 4^n$.

1. La famille $(u, w)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ?
2. La famille $(u, v, w)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ?

**Résultat attendu :** Les deux familles sont libres dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

**Exercice 5 (★★).** Dans $\mathbb{C}_3[X]$, on donne $P_0(X) = 1 - iX$, $P_1(X) = 1 + X^2$ et $P_2(X) = iX - X^3$. La famille $(P_0, P_1, P_2)$ est-elle une famille libre dans $\mathbb{C}_3[X]$ ? génératrice de $\mathbb{C}_3[X]$ ?
**Résultat attendu :** La famille est libre, mais pas génératrice de $\mathbb{C}_3[X]$.

**Exercice 6 (★★).** Soit $n$ un entier naturel non nul. Dans l'espace vectoriel $C(\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on donne $f_0 : x \longrightarrow 1$ et pour tout entier naturel non nul $k$, $f_k : x \longrightarrow \cos^k(x)$. La famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est-elle une famille libre de $C(\mathbb{R})$ ?
**Résultat attendu :** Oui. Pour le montrer, on introduit un polynôme aux coefficients bien choisi et on se ramène à montrer qu'il s'agit du polynôme nul. On peut aussi raisonner par récurrence, mais c'est plus long.

**Exercice 7 (★).** On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants :

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$,
2. $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z + t\}$,
3. $H = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = b = c = d\}$.

Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ ; donner une base de chacun d'eux.
**Résultat attendu :** Exemples de bases convenant (d'autres peuvent être possibles) :

1. $((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1))$
2. $((1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -1))$
3. $((1, 1, 1, 1))$

**Exercice 8 (★).** Dans les cas suivants, indiquer si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$. Si c'est le cas, en donner une base.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0\}$.
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = 2x \text{ et } z = x\}$.
3. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 1\}$.

**Résultat attendu :**

1. Oui, une base est $((0, 1, 0), (0, 0, 1))$.
2. Oui, une base est $((1, 2, 1))$.
3. Non, ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $E$ ($F$ ne contient pas $(0, 0)$).

**Exercice 9 (★).** On se place dans $E = \mathbb{R}_2[X]$. Soit $A = \{P \in E | P(1) = 0 \text{ et } P'(2) = 0\}$. Montrer que $A$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et en déterminer une base.
**Résultat attendu :** Une base de $A$ est $X^2 - 4X + 3$.

**Exercice 10 (★★).** Montrer que les polynômes $1$, $X$, $X(X-1)$, $X(X-1)(X-2)$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3. En particulier, exprimer $X^2$ et $X^3$ dans cette base.
**Résultat attendu :** La famille est échelonnée en degré donc libre. On montre ensuite que $X^2 = X(X-1)+X$ et $X^3 = X(X-1)(X-2)+3X(X-1)+X$, ce qui permet de montrer que la famille est génératrice en revenant à la définition.

**Exercice 11 (★★).** Soit $f$ et $g$ les fonctions définies par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(2x)$ et $g(x) = x\exp(2x)$. On note $E$ l'ensemble des fonctions $h$ telles qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = (ax + b)e^{2x}$.

1. Prouver que $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. La famille $(f, g)$ est-elle une famille libre de $E$ ? une base de $E$ ?
3. Soit $\varphi$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 3x$. La fonction $\varphi$ est-elle un élément de $E$ ?

**Résultat attendu :**

1. $E$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. La famille est constituée de vecteurs de $E$, libre et génératrice de $E$, donc c'est une base de $E$.
3. On montre par l'absurde que $\varphi \notin E$.

**Exercice 12 (★★).** Soient $F$, $G$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \{(a, a, a) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\} \text{ et } G = \{(b + c, b, c) \in \mathbb{R}^3, (b, c) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Sont-ils supplémentaires ?
**Résultat attendu :** Oui, on le montre par exemple par analyse-synthèse, en exhibant pour tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ une décomposition unique dans $F + G$.

**Exercice 13 (★★).** Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $F = \mathrm{Vect}\,(X - 1, X)$ et $G = \{P \in E | P(0) = P(1) = 0\}$.

1. Montrer que $G$ est un espace vectoriel.
2. Montrer que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$.

**Résultat attendu :**

1. $G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ donc un espace vectoriel.
2. On montre $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$. Variante : pour tout élément de $E$ on montre qu'il existe une unique décomposition dans $F + G$.

**Exercice 14 (★★).** Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $P$ l'ensemble des fonctions paires, et $I$ l'ensemble des fonctions impaires. Montrer que $P$ et $I$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$ et que $E = P \oplus I$.
**Résultat attendu :** On montre que $P$ et $I$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$ en revenant à la définition. Pour montrer que $E = P \oplus I$, il suffit de montrer que toute fonction $f \in E$ se décompose de manière unique comme somme d'un élément de $P$ et d'un élément de $I$.

**Exercice 15** (★★)**.** Soit $E$ un espace vectoriel et $F, G$ et $H$ des sous-espaces vectoriels de $E$. Montrer les inclusions :

1. $(F \cap H) + (G \cap H) \subset (F + G) \cap H$
2. $(F \cap G) + H \subset (F + H) \cap (G + H)$

**Résultat attendu :** Dans les deux cas, il faut se ramener à la définition d'une inclusion d'ensembles, puis traduire étape par étape les informations dont on dispose.

**Exercice 16** (Type DS)**.** Soit $F$ l'ensemble des suites réelles vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

1. Montrer que $F$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. On pose $a$ et $b$ les suites définies par $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$.
   (a) Montrer que $(a, b)$ est une famille d'éléments de $F$.
   (b) Montrer que $(a, b)$ est une famille génératrice de $F$.
   (c) Montrer que $(a, b)$ est une famille libre de $F$.
   (d) Que peut-on déduire des questions précédentes ?

**Résultat attendu :**

1. La suite nulle vérifie $\forall n \geqslant 0$, $0 = 0 + 2 \times 0$, elle est donc dans $F$.
   Soit $u$ et $v$ deux suites de $F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
(\lambda u + v)_{n+2} &= \lambda u_{n+2} + v_{n+2} \\
&= \lambda(u_{n+1} + 2u_n) + v_{n+1} + 2v_n \text{ car } (u, v) \in F^2 \\
&= \lambda u_{n+1} + v_{n+1} + 2(\lambda u_n + v_n) \\
(\lambda u + v)_{n+2} &= (\lambda u + v)_{n+1} + 2(\lambda u + v)_n
\end{aligned}$$

   Donc $\lambda u + v \in F$. Donc $F$ est stable par combinaison linéaire.
   Donc $F$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles. Donc $F$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.·
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} + 2b_n = 2^{n+1} + 2 \times 2^n = 2 \times 2^{n+1} = 2^{n+2} = b_{n+2}$.
   De même, $a_{n+1} + 2a_n = (-1)^{n+1} + 2(-1)^n = (-1)^n(-1+2) = (-1)^n = (-1)^{n+2} = a_{n+2}$.
   Donc $a$ et $b$ sont des suites de $F$.
   (b) Soit $u \in F$. La suite $u$ est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $q^2 = q + 2$ qui équivaut à $q^2 - q - 2 = 0$. Le discriminant associé vaut $\Delta = 1 + 8 = 9$, les solutions de cette équation sont donc $\frac{1-3}{2} = -1$ et $\frac{1+3}{2} = 2$. Il existe donc deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n = \alpha a_n + \beta b_n.$$

   Donc $u$ est combinaison linéaire de $a$ et $b$. Comme par la question précédente, $(a, b) \in F^2$, $(a, b)$ est une famille génératrice de $F$.
   (c) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $\lambda a + \mu b = 0$.
   Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda(-1)^n + \mu 2^n = 0$. En particulier, pour $n = 0$, $\lambda + \mu = 0$ et pour $n = 1$, $-\lambda + 2\mu = 0$. Sommer ces égalités donne $3\mu = 0$, donc $\mu = 0$, on en déduit $\lambda = 0$. La famille $(a, b)$ est donc libre.
   (d) D'après les questions précédentes la famille $(a, b)$ est une famille d'éléments de $F$ libre et génératrice, c'est donc une base de $F$.