

# Espaces vectoriels

Cours de É. Bouchet – PCSI

11 décembre 2024

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Espaces vectoriels</b>	<b>2</b>
1.1	Définition et propriétés . . . . .	2
1.2	Espaces vectoriels de référence . . . . .	3
1.3	Combinaison linéaire . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Sous-espaces vectoriels</b>	<b>4</b>
2.1	Définition et caractérisation . . . . .	4
2.2	Intersection de sous-espaces vectoriels . . . . .	5
2.3	Sous-espace vectoriel engendré par une famille . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Familles finies de vecteurs</b>	<b>6</b>
3.1	Familles génératrices . . . . .	6
3.2	Familles libres . . . . .	6
3.3	Bases . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Somme de sous-espaces vectoriels</b>	<b>8</b>
4.1	Définitions et premières propriétés . . . . .	8
4.2	Sous-espaces vectoriels supplémentaires . . . . .	9

Les espaces vectoriels introduisent un langage commun pour des situations qui apparaissent à priori très différentes (vecteurs, fonctions, polynômes, suites, matrices, ...) et permettent ainsi de résoudre avec la même méthode des problèmes concernant des domaines différents.

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désignera  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

# 1 Espaces vectoriels

## 1.1 Définition et propriétés

### Définition 1.1 (Espace vectoriel)

Soit  $E$  un ensemble non vide, muni d'une addition interne  $+$  :  $E \times E \rightarrow E$  et d'une multiplication externe  $\cdot$  :  $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$ . On dit que  $(E, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -**espace vectoriel** lorsque :

- L'opération interne  $+$  vérifie les propriétés suivantes :
  - pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $x + y = y + x$  (la loi  $+$  est *commutative*),
  - pour tout  $(x, y, z) \in E^3$ ,  $(x + y) + z = x + (y + z)$  (la loi  $+$  est *associative*),
  - il existe un unique  $e \in E$  appelé **élément neutre** tel que pour tout  $x \in E$ ,  $x + e = x = e + x$ .
  - pour tout  $x \in E$ , il existe  $x' \in E$  tel que  $x + x' = e = x' + x$ . Cet élément est unique, appelé **opposé** de  $x$ , et noté  $-x$ .
- L'opération externe  $\cdot$  vérifie les propriétés suivantes :
  - pour tout  $x \in E$  et pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ ,  $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
  - pour tout  $(x, y) \in E^2$  et pour tout  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
  - pour tout  $x \in E$  et pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ ,  $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
  - pour tout  $x \in E$ ,  $1 \cdot x = x$

On appelle **vecteurs** les éléments d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et **scalaires** les éléments de  $\mathbb{K}$ .

**Exemple.** Les règles de calcul sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  donnent directement que  $\mathbb{K}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Exemple.** Dans l'ensemble  $\mathbb{R}^2$  :

- Si  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , on définit  $x + y$  comme  $(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathbb{R}^2$ . Il s'agit bien d'une opération interne dans  $\mathbb{R}^2$ , qui vérifie les propriétés :
  - pour tout  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2) = y + x$ .
  - pour tout  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  
 $(x + y) + z = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) + (z_1, z_2) = (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2) = (x_1, x_2) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2) = x + (y + z)$ .
  - il existe un élément  $e = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ , tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $x + e = x = e + x$ .
  - pour tout  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , il existe  $x' = (-x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $x + x' = e = x' + x$ .
- Si  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on définit  $\alpha \cdot x$  comme  $(\alpha x_1, \alpha x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Il s'agit bien d'une multiplication externe, qui vérifie les propriétés :
  - pour tout  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  et pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ,  
 $(\alpha + \beta) \cdot x = ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2) = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta x_1, \beta x_2) = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ .
  - pour tout  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  
 $\alpha \cdot (x + y) = \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1, \alpha y_2) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ .
  - pour tout  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  et pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = \alpha \cdot (\beta x_1, \beta x_2) = (\alpha \beta x_1, \alpha \beta x_2) = (\alpha \beta) \cdot x$ .
  - pour tout  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $1 \cdot x = (x_1, x_2) = x$ .

Donc  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Exemple.** L'ensemble des vecteurs de l'espace, muni de l'addition de deux vecteurs et de la multiplication d'un réel par un vecteur, est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Son élément neutre est le vecteur nul.

**Remarque.** Le symbole de l'opération externe  $\cdot$  est parfois omis. Qu'il soit présent ou pas, il faut toujours placer le scalaire à gauche du vecteur.

**Remarque.** L'élément neutre pour  $+$  est souvent noté  $0_E$ , ou  $0$  lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion.

### Proposition 1.2 (Cas d'un produit valant $0_E$ )

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Alors  $\forall x \in E$  et  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0$  ou  $x = 0_E$ .

**Exemple.** Soit  $x \in \mathbb{R}^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors  $\lambda \cdot x = (0, 0) \iff \lambda = 0$  ou  $x = (0, 0)$ .

**Proposition 1.3** (Construction de l'opposé)

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Alors pour tout  $x \in E$ ,  $-x = (-1) \cdot x$ , où  $-x$  est l'opposé de  $x$  dans  $E$ .

## 1.2 Espaces vectoriels de référence

Pour montrer les résultats qui suivent, on vérifie mécaniquement toutes les propriétés.

**Proposition 1.4** ( $\mathbb{K}^n$ )

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Muni des opérations usuelles,  $\mathbb{K}^n$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Remarque.** L'élément neutre de  $\mathbb{K}^n$  est le  $n$ -uplet  $(0, \dots, 0)$ .

**Proposition 1.5** ( $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ )

Soit  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ . Muni de l'addition de deux matrices et de la multiplication d'une matrice par un scalaire,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Remarque.** L'élément neutre de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est la matrice nulle de taille  $n \times p$ .

**Proposition 1.6** ( $\mathbb{K}[X]$ )

Muni de l'addition de deux polynômes et de la multiplication d'un polynôme par un scalaire,  $\mathbb{K}[X]$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Remarque.** L'élément neutre de  $\mathbb{K}[X]$  est le polynôme nul.

**Proposition 1.7** ( $E \times F$ )

Soit  $E$  et  $F$  sont deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Muni des opérations usuelles, le produit cartésien  $E \times F$  est aussi un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Remarque.** L'élément neutre de  $E \times F$  est  $(0_E, 0_F)$ .

**Proposition 1.8** ( $\mathcal{F}(\Omega, F)$ )

Soit  $\Omega$  un ensemble non vide et  $F$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Muni des opérations usuelles, l'ensemble  $\mathcal{F}(\Omega, F)$  des applications de  $\Omega$  dans  $F$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Remarque.** L'élément neutre de  $\mathcal{F}(\Omega, F)$  est l'application nulle de  $\Omega$  dans  $F$  (l'application qui à tout élément de  $\Omega$  associe  $0_F$ ).

**Remarque.**  $\Omega$  n'a pas besoin d'être un espace vectoriel pour que le résultat soit valide.

**Exemple.** L'ensemble  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  des suites à valeurs dans  $\mathbb{K}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Son élément neutre est la suite nulle.

**Exemple.** Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ . L'ensemble  $\mathbb{K}^A$  des applications de  $A$  dans  $\mathbb{K}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Son élément neutre est la fonction nulle.

### 1.3 Combinaison linéaire

#### Définition 1.9 (Famille finie de vecteurs)

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $p \in \mathbb{N}^*$ . On dit que  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  est une **famille finie de vecteurs** de  $E$  lorsque tous les  $e_i$  appartiennent à  $E$ .

**Exemple.**  $(1, 0)$ ,  $(0, 1, 3)$  et  $(1, 2, 2, 4)$  sont trois familles finies de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}$ .  $((1, 0), (2, 3), (2, 1))$  est une famille finie de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$ .

#### Définition 1.10 (Combinaison linéaire)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{S} = (e_k)_{1 \leq k \leq p}$  une famille finie de vecteurs de  $E$  et  $x \in E$ . On dit que  $x$  est **combinaison linéaire** des vecteurs de  $\mathcal{S}$  lorsqu'il existe  $p$  scalaires  $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq p}$  de  $\mathbb{K}$  tels que

$$x = \sum_{k=1}^p \alpha_k e_k.$$

**Exemple.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$ . Alors il existe des scalaires  $(a_0, \dots, a_n)$  tels que  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ , donc  $P$  est combinaison linéaire de  $(1, X, \dots, X^n)$ .

**Exercice 1.** Montrer que  $(4, 13)$  est combinaison linéaire de  $((1, 5), (2, 3))$ .

**Exercice 2.** Montrer que  $(1, 1)$  n'est pas combinaison linéaire de  $((0, 0), (0, 1), (0, 2))$ .

## 2 Sous-espaces vectoriels

### 2.1 Définition et caractérisation

#### Définition 2.1 (Sous-espace vectoriel)

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  une partie de  $E$  stable par combinaison linéaire. On dit que  $F$  est un **sous-espace vectoriel** de  $E$  lorsque  $(F, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Remarque.** Dire que  $F$  est stable par combinaison linéaire signifie que toute combinaison linéaire d'éléments de  $F$  appartient à  $F$ .

**Exemple.** Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $\{0_E\}$  (sous-espace nul) et  $E$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

#### Proposition 2.2 (Cas de l'élément neutre)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors  $0_E \in F$ .

**Remarque.** Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , l'unicité de l'élément neutre donne donc  $0_F = 0_E$ .

#### Proposition 2.3 (Caractérisation d'un sous-espace vectoriel)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  un sous-ensemble de  $E$ . Alors :

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff 0_E \in F \text{ et } \forall (x, y) \in F^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}, (\alpha \cdot x) + y \in F.$$

**Remarque.** Pour montrer qu'un ensemble  $F$  est un espace vectoriel, revenir à la définition est peu pratique. Il est beaucoup plus rapide de montrer par la caractérisation ci-dessus que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

**Exercice 3.** Montrer que l'ensemble  $E$  des suites réelles convergentes est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Exercice 4.** Montrer que l'ensemble  $D$  des suites réelles divergentes n'est pas un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Exercice 5.** L'ensemble  $E'$  des fonctions  $f$  définies de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et telles que  $f(0) = 0$  est-il un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ?

**Exercice 6.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , l'ensemble  $\mathbb{C}_n[X]$  des polynômes de degré au plus  $n$  est-il un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ?

## 2.2 Intersection de sous-espaces vectoriels

### Proposition 2.4 (Intersection de sous-espaces vectoriels)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Remarque.** Ce résultat se généralise à l'intersection de plus de deux sous-espaces vectoriels.

**Remarque.** Attention : de manière générale, la réunion de deux sous-espaces vectoriels de  $E$  n'est PAS un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Exercice 7.**  $\{0\} \times \mathbb{R}$  et  $\mathbb{R} \times \{0\}$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que  $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .

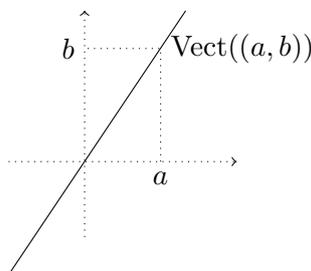
## 2.3 Sous-espace vectoriel engendré par une famille

### Définition 2.5 (Sous-espace vectoriel engendré)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{S} = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille finie de vecteurs de  $E$ . On note  $\text{Vect}(\mathcal{S})$  l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de  $\mathcal{S}$ .

$\text{Vect}(\mathcal{S})$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , appelé **sous-espace vectoriel engendré** par la famille  $\mathcal{S}$ .

**Exemple.** Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $\text{Vect}((a, b))$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$  appelé droite vectorielle :



**Exemple.** Soit  $(a_1, b_1, c_1)$  et  $(a_2, b_2, c_2)$  deux vecteurs non colinéaires de  $\mathbb{R}^3$ . Alors  $\text{Vect}((a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2))$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ , appelé plan vectoriel.

**Exemple.** Dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ,  $\text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$  est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (qui forme donc un espace vectoriel).

### Proposition 2.6 (Sous-espace contenant une famille)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{S} = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille finie de vecteurs de  $E$ . Tout sous-espace vectoriel de  $E$  contenant les  $e_i$  contient  $\text{Vect}(\mathcal{S})$ .

**Exercice 8.** Montrer que  $\text{Vect}((1, 2), (1, 0)) = \mathbb{R}^2$ .

### Proposition 2.7 (Cas d'un vecteur combinaison linéaire)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{S}$  une famille finie de vecteurs de  $E$ . Si  $x \in \mathcal{S}$  est combinaison linéaire des autres vecteurs de  $\mathcal{S}$ , alors  $\text{Vect}(\mathcal{S}) = \text{Vect}(\mathcal{S}')$ , où  $\mathcal{S}'$  est la famille obtenue en retirant  $x$  à  $\mathcal{S}$ .

**Exemple.**  $(3, 6) = 3(1, 2)$ , donc  $\text{Vect}((1, 2), (3, 6)) = \text{Vect}((1, 2)) = \{(\lambda, 2\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

### 3 Familles finies de vecteurs

#### 3.1 Familles génératrices

##### Définition 3.1 (Famille génératrice)

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $\mathcal{S}$  une famille finie d'éléments de  $E$ . La famille  $\mathcal{S}$  est dite **génératrice** de  $E$  lorsque  $\text{Vect}(\mathcal{S}) = E$ .

**Remarque.** L'inclusion  $\text{Vect}(\mathcal{S}) \subset E$  est évidente. Pour prouver que  $\mathcal{S}$  est génératrice de  $E$ , il suffit donc de montrer que  $E \subset \text{Vect}(\mathcal{S})$ , c'est-à-dire de montrer que tout  $x \in E$  peut s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de  $\mathcal{S}$ .

**Exemple.** Si  $P(X) \in \mathbb{K}_2[X]$ , alors il existe  $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$  tels que  $P(X) = aX^2 + bX + c$ . Les vecteurs  $X^2$ ,  $X$  et  $1$  sont bien dans  $\mathbb{K}_2[X]$ , donc  $(1, X, X^2)$  est une famille génératrice de  $\mathbb{K}_2[X]$ .

**Exercice 9.** La famille  $((1, 0), (1, 1))$  est-elle une famille génératrice de  $\mathbb{R}^2$  ?

**Exercice 10.** La famille  $((1, 0))$  est-elle une famille génératrice de  $\mathbb{R}^2$  ?

**Exercice 11.** Soit  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y\}$ . Montrer que c'est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, dont on déterminera une famille génératrice.

##### Proposition 3.2 (Famille contenant une famille génératrice)

Toute famille de vecteurs qui contient une famille génératrice de l'espace vectoriel  $E$  est une famille génératrice de l'espace vectoriel  $E$ .

##### Proposition 3.3 (Cas d'un élément combinaison linéaire des autres)

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $\mathcal{S}$  est une famille génératrice de  $E$ . Si  $x \in \mathcal{S}$  est combinaison linéaire des autres vecteurs de  $\mathcal{S}$ , alors la famille  $\mathcal{S}'$  obtenue en retirant  $x$  à  $\mathcal{S}$  est aussi génératrice de  $E$ .

#### 3.2 Familles libres

##### Définition 3.4 (Famille libre, famille liée)

Une famille  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  de l'espace vectoriel  $E$  est dite **libre** lorsque pour tout  $p$ -uplet  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq p}$  de scalaires de  $\mathbb{K}^p$ ,

$$\sum_{k=1}^p \alpha_k e_k = 0_E \implies \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \alpha_k = 0.$$

On dit alors que les vecteurs  $e_1, e_2, \dots, e_p$  sont **linéairement indépendants**. Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

**Remarque.** Si  $x \in E$  et  $x \neq 0_E$ , alors la famille  $(x)$  est libre.

**Remarque.** Pour montrer qu'une famille est libre, on fixe  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{K}^p$ , on suppose que  $\sum_{k=1}^p \alpha_k e_k = 0_E$  et on cherche à en déduire que tous les  $\alpha_i$  sont nuls.

**Exercice 12.** Montrer que la famille  $((2, 1, 0), (0, 0, 1))$  obtenue précédemment est une famille libre de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 13.** Montrer que  $((1, 2), (3, 6))$  est une famille liée.

**Proposition 3.5** (Unicité de la décomposition dans une famille libre)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une famille  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  de  $E$  est libre si et seulement si pour tous scalaires  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$  de  $\mathbb{K}$ ,  $\sum_{k=1}^p \alpha_k e_k = \sum_{j=1}^p \beta_j e_j \implies \forall m \in \llbracket 1, p \rrbracket, \alpha_m = \beta_m$ .

**Remarque.** La liberté d'une famille permet donc d'identifier les coefficients dans une égalité.

**Exercice 14.** Soit  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x$  et  $g(x) = e^{2x}$ . La famille  $(f, g)$  est-elle libre dans l'espace vectoriel des fonctions réelles ?

**Exercice 15.** Montrer que la famille  $(X + 2, X + 1, X^2)$  est libre dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Proposition 3.6** (Famille de polynômes échelonnée en degré)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(P_1, \dots, P_n)$  une famille de polynômes de  $\mathbb{K}[X]$ . Si la famille est **échelonnée en degré** (c'est-à-dire si  $0 \leq \deg(P_1) < \dots < \deg(P_n)$ ), alors elle est libre.

**Exemple.** La famille  $(1, (X + 1)^5, (X - 2)^7)$  est échelonnée en degrés, donc libre dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Proposition 3.7** (Sous-famille d'une famille libre)

Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

**Proposition 3.8** (Cas d'un vecteur combinaison linéaire des autres)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une famille  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  de  $E$  est liée si et seulement si l'un des vecteurs de cette famille peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres vecteurs.

**Remarque.** En particulier toute famille qui contient l'élément neutre est liée, car si  $e_1 = 0_E, e_1 = 0e_2 + \dots + 0e_p$ .

**Remarque.** Si on ajoute à une famille libre un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire de ses éléments, on obtient donc une nouvelle famille libre.

**Exercice 16.** La famille  $((0, 1, 2), (0, 2, 1), (0, 1, 1))$  est-elle libre ?

### 3.3 Bases

**Définition 3.9** (Base, coordonnées)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une famille  $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$  est une **base** de  $E$  lorsque tout vecteur  $x$  de  $E$  peut s'écrire d'une manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs  $e_1, e_2, \dots, e_p$ .  
On appelle alors **coordonnées** de  $x$  les coefficients de cette combinaison linéaire.

**Exemple.**  $(1, X, X^2)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$  et les coefficients de  $1 + 3X^2$  dans cette base sont 1, 0 et 3.

**Proposition 3.10** (Caractérisation des bases)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une famille finie d'éléments de  $E$  est une base de  $E$  si et seulement si elle est à la fois libre et génératrice de  $E$ .

**Exercice 17.** Dans  $\mathbb{K}^n$ , on pose  $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_k = (0, \dots, \underbrace{1}_{k\text{ème position}}, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ .

Montrer que  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  forme une base de  $\mathbb{K}^n$ .

**Remarque.** Plusieurs ensembles usuels ont des bases « naturelles », appelées **bases canoniques** :

Espace vectoriel	Base canonique associée
$\mathbb{K}^n$	$((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$
$\mathbb{K}_n[X]$	$(1, X, X^2, \dots, X^n)$
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	$(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket}$

On rappelle que  $E_{i,j}$  désigne la matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui placé à la  $i$ -ème ligne et  $j$ -ième colonne, qui vaut 1.

**Exercice 18.** Soit  $E$  l'ensemble des suites réelles qui vérifient la relation de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ .

1. Montrer que  $E$  est un espace vectoriel.
2. En déterminer une base.

## 4 Somme de sous-espaces vectoriels

### 4.1 Définitions et premières propriétés

**Définition 4.1** (Somme de deux sous-espaces vectoriels)

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . L'ensemble des éléments de  $E$  s'écrivant sous la forme de la somme d'un élément de  $F$  et d'un élément de  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  appelé **somme des sous-espaces vectoriels**  $F$  et  $G$ . On note  $F + G = \{x + y \mid (x, y) \in F \times G\}$ .

**Proposition 4.2** (Somme d'espaces vectoriels engendrés)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  deux familles finies d'éléments de  $E$ . On note  $\mathcal{S}$  la famille qui juxtapose les vecteurs de  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ . Alors :

$$\text{Vect}(\mathcal{S}_1) + \text{Vect}(\mathcal{S}_2) = \text{Vect}(\mathcal{S}).$$

**Remarque.** Si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , on obtient donc une famille génératrice de  $F + G$  en juxtaposant des familles génératrices de  $F$  et de  $G$ .

**Exercice 19.** On se place dans  $\mathbb{R}[X]$ . Que vaut  $\mathbb{R}_1[X] + \text{Vect}(X^2)$  ?

**Définition 4.3** (Somme directe de deux sous-espaces vectoriels)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On dit que la somme  $F + G$  est une **somme directe** lorsque tout élément  $u$  de  $F + G$  s'écrit de manière unique sous la forme  $u = x + y$ , avec  $(x, y) \in F \times G$ . La somme est alors notée  $F \oplus G$ .

**Remarque.** La définition de  $F + G$  donne l'existence de cette décomposition, il suffit donc de montrer l'unicité pour conclure que la somme est directe.

**Proposition 4.4** (Caractérisation des sommes directes)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . La somme  $F + G$  est une somme directe si et seulement si  $F \cap G = \{0_E\}$ .

**Remarque.** Comme  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ , on a toujours  $\{0_E\} \subset F \cap G$ . Il suffit donc de montrer que  $F \cap G \subset \{0_E\}$  pour montrer qu'une somme est directe.

**Exercice 20.** Montrer que la somme  $\mathbb{R}_1[X] + \text{Vect}(X^2)$  est directe.

## 4.2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

### Définition 4.5 (Sous-espaces vectoriels supplémentaires)

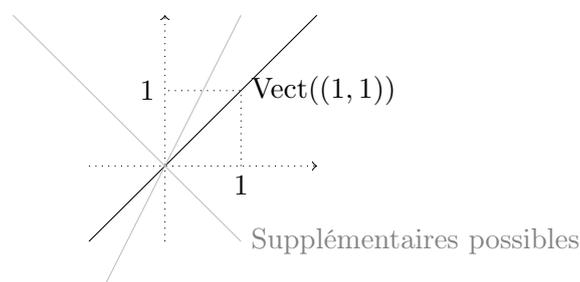
Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On dit que  $F$  et  $G$  sont **supplémentaires** dans  $E$  lorsque  $E = F \oplus G$ .

**Remarque.** Un même espace vectoriel peut avoir plusieurs supplémentaires différents.

**Remarque.** Des méthodes pratiques de construction de supplémentaire seront étudiées dans un prochain chapitre.

**Exemple.**  $\text{Vect}(X^2)$  et  $\text{Vect}(X^2 + 1)$  sont deux supplémentaires de  $\mathbb{R}_1[X]$  dans  $\mathbb{R}_2[X]$  (on a montré  $\mathbb{R}_2[X] = \mathbb{R}_1[X] \oplus \text{Vect}(X^2)$  dans l'exemple précédent, l'égalité  $\mathbb{R}_2[X] = \mathbb{R}_1[X] \oplus \text{Vect}(X^2 + 1)$  s'établit de la même manière).

**Exemple.** Les supplémentaires d'une droite du plan passant par 0 sont toute autre droite du plan passant par 0. Par exemple, les supplémentaires de  $\text{Vect}((1, 0))$  dans  $\mathbb{R}^2$  sont les  $\text{Vect}((a, b))$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ .



**Exemple.** Les supplémentaires d'un plan  $P$  de  $\mathbb{R}^3$  passant par 0 sont toute droite du plan passant par 0 et non incluse dans le plan  $P$ .

**Exercice 21.** Soit  $n$  un entier naturel non nul, on se place dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.