Dérivabilité

Cours de É. Bouchet – PCSI

20 janvier 2025

Table des matières

Dans tout le chapitre, les fonctions f considérées sont définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Elle sont toutes supposées à valeurs réelles (sauf dans la dernière section).

1 Dérivabilité

1.1 Dérivabilité en un point

Définition 1.1 (Fonction dérivable en un point, nombre dérivé, rappel)

Soit $a \in I$. On dit que f est **dérivable** en a lorsque $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. Cette limite est alors notée $f'(a)$ et appelée **nombre dérivé** de f en a.

Remarque. Cette définition équivaut à dire que f est dérivable en a si et seulement si $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$.

Remarque. Dans le cas d'une fonction physique, la dérivée au point a correspond à la vitesse instantanée.

Proposition 1.2 (Dérivabilité et approximation locale)

Soit $a \in I$. La fonction f est dérivable en a si et seulement si il existe $v \in \mathbb{R}$ et une fonction ε tels que $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ et qu'au voisinage de 0, $f(a+h) = f(a) + v.h + h.\varepsilon(h)$. Le réel v est alors unique et vaut $f'(a)$.

Démonstration. On montre les deux implications successivement.

— Supposons qu'il existe v et ε qui vérifient ces conditions. Alors, au voisinage de 0, $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = v + \varepsilon(h)$. Donc $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = v + 0 = v$, ce qui permet de conclure que f est dérivable en a avec $f'(a) = v$.

— Réciproquement, supposons f dérivable en a. Soit h au voisinage de 0 et $\varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$. Par construction et définition du nombre dérivé, on a bien $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. De plus, au voisinage de 0, $f(a+h) - f(a) = hf'(a) + h\varepsilon(h)$, on obtient donc le résultat annoncé en posant $v = f'(a)$.

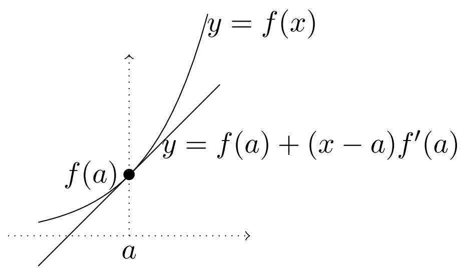
□

Proposition 1.3 (Tangente à la courbe, rappel)

Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point de coordonnées $(a, f(a))$ une tangente d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Démonstration. D'après le résultat précédent, si f est dérivable en a, on a pour x au voisinage de a : $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x - a)$, avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x - a) = 0$. Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point de coordonnées $(a, f(a))$ une tangente d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. □

Remarque. Interprétation géométrique :



Définition 1.4 (Dérivée à droite ou à gauche en un point)

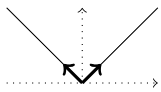
Soit $a \in I$. On dit que f est **dérivable à droite** (respectivement **dérivable à gauche**) en a lorsque $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (resp. $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$) existe et est finie. On note alors cette limite $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$).

Proposition 1.5 (Demi-tangente à la courbe)

Soit $a \in I$. Si f est dérivable à gauche en a, $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente d'équation $y = f(a) + f'_g(a)(x - a)$, avec $x \leqslant a$.
Si f est dérivable à droite en a, $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente d'équation $y = f(a) + f'_d(a)(x - a)$, avec $x \geqslant a$.

Démonstration. Le raisonnement est le même que pour obtenir l'équation de la tangente à la courbe, mais on se contente d'étudier les limites à droite ou à gauche. $\square$

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto |x|$. Elle est :
- dérivable à droite en 0, $f'_d(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - 0}{x - 0} = 1$.
- dérivable à gauche en 0, $f'_g(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x - 0}{x - 0} = -1$.



Proposition 1.6 (Lien entre dérivabilité, dérivabilité à droite et dérivabilité à gauche)

Soit $a \in I$. Si f est dérivable à droite et à gauche en a et si $f'_d(a) = f'_g(a) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Démonstration. D'après le chapitre sur les limites de fonction, le taux d'accroissement de f en a admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a si et seulement si il admet des limites à droite et à gauche égales à ℓ en a. D'où le résultat. $\square$

1.2 Dérivabilité et continuité

Proposition 1.7 (Continuité d'une fonction dérivable)

Toute fonction f dérivable en un point a est continue en a.

Démonstration. Soit f une fonction dérivable en a. Donc il existe une fonction ε telle que $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ et qu'au voisinage de 0,

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f(a).$$

Or $\lim\limits_{h \to 0} a + h = a$, donc une composition de limites donne $\lim\limits_{h \to 0} f(a + h) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. On obtient donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, ce qui est la définition de la continuité en a. $\square$

Remarque. Attention : La réciproque est FAUSSE, la continuité n'implique pas la dérivabilité.

Exemple. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto |x|$, est continue, mais pas dérivable en 0.

1.3 Dérivabilité sur un intervalle

Définition 1.8 (Dérivée sur un intervalle, fonction dérivée)

On dit que la fonction f est **dérivable** sur I lorsque f est dérivable en tout point de I (sauf pour les bornes de I, pour lesquelles on se restreint à la dérivabilité à droite ou à gauche).
On définit alors la **fonction dérivée** de f notée f', définie sur I par $f' : x \mapsto f'(x)$.

Remarque. ATTENTION : Une fonction peut être dérivable sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$ sans être dérivable sur $[a, c]$. L'étude locale de la dérivabilité en b est indispensable pour affirmer qu'elle est dérivable sur $[a, c]$.

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = x^2$ et $\forall x < 0,\ f(x) = 0$.
Étudier sa dérivabilité sur $\mathbb{R}$.
Solution : Il est immédiat que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, car elle coïncide sur ces intervalles avec des fonctions polynômes. Mais il faut étudier le raccord en 0 avant de conclure à la dérivabilité sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x < 0, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0, \qquad \forall x > 0, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2}{x} = x.$$

Donc f est dérivable à droite et à gauche en 0, et $f_d'(0) = 0 = f_g'(0)$. Donc f est dérivable en 0 et f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.

1.4 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 1.9 (Linéarité)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et α un réel. Alors la fonction $\alpha u + v$ est dérivable sur I, et $(\alpha u + v)' = \alpha u' + v'$.

Démonstration. Soit $a \in I$. Au voisinage de a,

$$\frac{(\alpha u + v)(x) - (\alpha u + v)(a)}{x - a} = \frac{(\alpha u(x) + v(x)) - (\alpha u(a) + v(a))}{x - a} = \alpha \frac{u(x) - u(a)}{x - a} + \frac{v(x) - v(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \alpha u'(a) + v'(a),$$

car u et v sont dérivables en a. Donc $\alpha u + v$ est dérivable en a et $(\alpha u + v)'(a) = \alpha u'(a) + v'(a)$. $\square$

Proposition 1.10 (Dérivée d'un produit et d'un quotient)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors la fonction uv est dérivable sur I, et

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Si de plus, la fonction v ne s'annule sur I, alors la fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I, et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Démonstration. Soit $a \in I$. Au voisinage de a,

$$\frac{(uv)(x) - (uv)(a)}{x - a} = \frac{u(x)v(x) - u(a)v(a)}{x - a} = u(x)\frac{v(x) - v(a)}{x - a} + v(a)\frac{u(x) - u(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} u(a)v'(a) + v(a)u'(a),$$

car u et v sont dérivables en a et u est continue (car dérivable) en a. Donc uv est dérivable en a et on obtient $(uv)'(a) = u(a)v'(a) + v(a)u'(a)$.
De plus, au voisinage de a,

$$\frac{\frac{1}{v}(x) - \frac{1}{v}(a)}{x - a} = -\frac{1}{v(x)v(a)} \frac{v(x) - v(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\frac{1}{v(a)^2} v'(a),$$

car v est dérivable et continue en a. Donc $\frac{1}{v}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{v}\right)'(a) = -\frac{1}{v(a)^2} v'(a)$.
Le résultat sur le quotient découle ensuite directement de ceux sur le produit et l'inverse. $\square$

Proposition 1.11 (Dérivée d'une composée)

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur $f(I)$. Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I, et $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$.

Démonstration. Soit $a \in I$. Au voisinage de a, on aimerait écrire :

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

pour faire apparaître les taux d'accroissement de f et g. Mais rien ne garantit la non-annulation de $f(x) - f(a)$. On utilise une fonction auxiliaire pour contourner ce problème. Soit φ la fonction définie au voisinage de $f(a)$ par :

$$\varphi(y) = \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} \text{ si } y \neq f(a) \quad \text{et} \quad \varphi(f(a)) = g'(f(a)).$$

Par définition de $g'(f(a))$, φ est continue au point $f(a)$. Et $\forall x \neq a$, $\dfrac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a} = \varphi(f(x)) \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Comme f est dérivable en a, f est continue en a et φ est continue en $f(a)$, le membre de droite admet bien une limite en a. Donc $g \circ f$ est dérivable en a et par passage à la limite :

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a} = \varphi(f(a)) f'(a) = g'(f(a)) f'(a).$$

□

Proposition 1.12 (Dérivée de la fonction réciproque)

Soit f une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle I et à valeurs dans $J = f(I)$. Soit $a \in I$. La fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et lorsqu'elle est dérivable :

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration. La fonction f est continue sur I (car dérivable) et strictement monotone sur cet intervalle. D'après le théorème de la bijection, elle réalise donc bien une bijection de I sur $J = f(I)$ et f^{-1} existe et est continue (et strictement monotone) sur J.
Soit $b \in J$ et a son unique antécédent par f. On a $b = f(a)$, donc $a = f^{-1}(b)$. Pour tout $y \in J \setminus \{b\}$,

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - a}{f(f^{-1}(y)) - f(a)}.$$

Or f^{-1} est continue sur J, donc en b. Donc $\lim_{y \mapsto b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a$. Par continuité de f sur I, composition de limites et dérivabilité de f en a, on trouve alors :

$$\lim_{y \mapsto b} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Si $f'(a) = 0$, par passage à l'inverse $\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$ n'admet pas de limite finie en b, donc f^{-1} n'est pas dérivable en b. Si par contre $f'(a) \neq 0$, la limite de l'inverse est finie donc f^{-1} est dérivable en b et on trouve :

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \mapsto b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

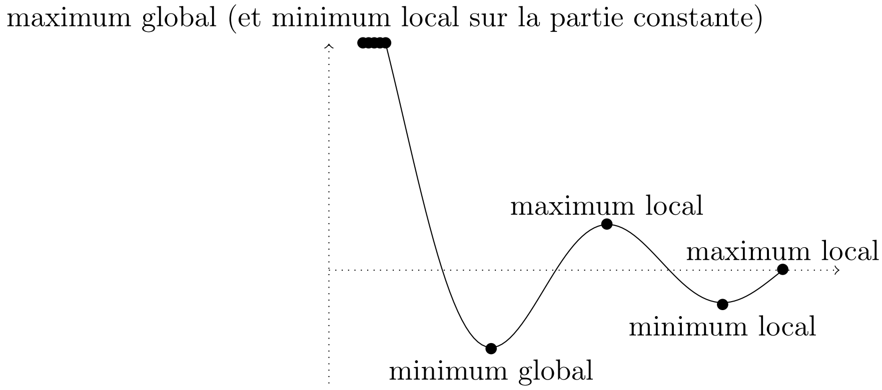
2 Principaux théorèmes

2.1 Caractérisation d'un extremum local

Définition 2.1 (Maximum/minimum local)

- On dit que f admet un **maximum local** en $a \in I$ lorsqu'au voisinage de a, $f(x) \leqslant f(a)$.
- On dit que f admet un **minimum local** en $a \in I$ lorsqu'au voisinage de a, $f(x) \geqslant f(a)$.

Exemple. Représentation graphique :



Définition 2.2 (Point critique)

Soit f une fonction dérivable sur I et $a \in I$. On dit que a est un **point critique** de f lorsque $f'(a) = 0$.

Proposition 2.3 (Caractérisation d'un extremum par la dérivée)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit $a \in I$ qui n'est pas une borne de I. Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Démonstration. Supposons que f possède un maximum local en a. Il existe alors $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $[a-\alpha, a+\alpha] \subset I$ et $\forall x \in [a-\alpha, a+\alpha]$, $f(x) \leqslant f(a)$.
Donc, pour tout $x \in]a, a+\alpha]$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$. Or f est dérivable en a par hypothèse. On peut donc passer à la limite dans cette inégalité et on trouve $f'(a) \leqslant 0$.
De même, pour tout $x \in [a-\alpha, a[$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$, ce qui donne $f'(a) \geqslant 0$. Donc $f'(a) = 0$. □

Remarque. ATTENTION : la réciproque est fausse ! Il se peut que $f'(a) = 0$ sans que f n'admette d'extremum en a. Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$ a une dérivée nulle en 0, mais n'atteint ni un maximum ni un minimum en ce point.

Exercice 2. Sans utiliser de tableau de variations, trouver les extremums locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + x$.
Solution : Comme l'intervalle $\mathbb{R}$ ne contient pas ses bornes et comme f est dérivable partout sur $\mathbb{R}$, il suffit d'étudier les points critiques. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3 + 1$.
Cette dérivée s'annule si et seulement si $x^3 = -\dfrac{1}{4}$. Il y a une seule solution réelle, $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$, et la dérivée est négative avant et positive après. Donc la fonction est décroissante avant $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$, et croissante ensuite. On en conclut que la fonction admet un minimum local en $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$. Comme la dérivée ne s'annule pas ailleurs, et qu'il n'y a pas de borne ou de point où la fonction n'est pas dérivable, cela signifie que la fonction n'admet pas de maximum.

Remarque. Cette technique sera surtout utile dans les cas où le tableau de variations de la fonction est compliqué à obtenir. On verra plus tard d'autres stratégies d'étude locale.

2.2 Théorème de Rolle et égalité des accroissements finis

Proposition 2.4 (Théorème de Rolle)

Soit $a < b$. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et qui vérifie $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$ donc par le théorème des bornes atteintes elle y est bornée et atteint ses bornes. On note m le minimum global et M le maximum global.

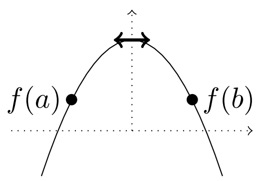
— Si $m = M$, la fonction est constante sur $[a, b]$, et donc f' est nulle sur $]a, b[$. Dans ce cas, on peut choisir n'importe quel $c \in]a, b[$ qui conviendra.

— Si $m \neq M$, l'une de ces valeurs au moins n'est atteinte ni en a ni en b (puisque $f(a) = f(b)$). Supposons qu'il s'agit de M (un raisonnement analogue se fait avec m). Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$. Comme la fonction admet un maximum en c, sa dérivée s'annule par le théorème précédent. D'où le résultat.

□

Remarque. Le réel c n'est pas forcément unique.

Remarque. Interprétation graphique : il existe donc un point de la courbe admettant une tangente parallèle à l'axe des abscisses.



Proposition 2.5 (Égalité des Accroissements Finis)

Soit $a < b$. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

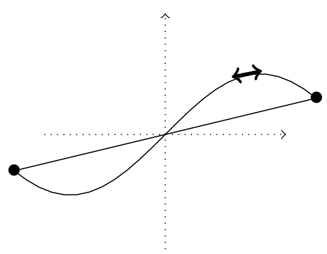
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration. On se ramène aux hypothèses du théorème de Rolle. Pour tout $x \in [a, b]$, on pose :

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

La fonction g est continue sur $[a, b]$ comme somme de fonctions continues, et elle est dérivable sur $]a, b[$ comme somme de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in]a, b[$, $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
On remarque que $g(b) = g(a) = f(a)$. Donc g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle, et il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Et donc tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. □

Remarque. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le coefficient directeur du segment $[AB]$, donc il existe un point de $\mathcal{C}_f$ admettant une tangente parallèle à ce segment.



2.3 Inégalité des accroissements finis

Définition 2.6 (Fonction lipschitzienne)

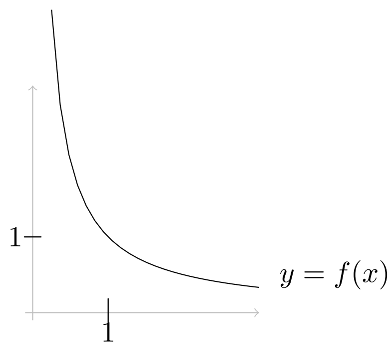
Soit $M \geqslant 0$. On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I est M-**lipschitzienne** si $\forall (x,y) \in I^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M\,|x-y|\,.$$

Remarque. Cela signifie que pour tout $(x,y) \in I^2$, la distance entre $f(x)$ et $f(y)$ (qui se lit sur l'axe des ordonnées) peut être majorée proportionnellement à la distance entre x et y (qui se lit sur l'axe des abscisses).

Remarque. C'est équivalent à dire que pour tous $x \neq y$, $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leqslant M$. Autrement dit, une fonction est M-lipschitzienne si et seulement si ses accroissements sont bornés par M.

Exercice 3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est lipschitzienne sur $[1,+\infty[$.
Solution : Soit $(x,y) \in [1,+\infty[^2$, $|f(y)-f(x)| = \left|\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}\right| = \left|\dfrac{x-y}{xy}\right| = \dfrac{|y-x|}{xy} \leqslant |y-x|$.
Donc f est 1-lipschitzienne sur $[1,+\infty[$.
Rmq : f n'est par contre pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+^*$, car la majoration ne fonctionnerait plus. On peut d'ailleurs le voir graphiquement :



Proposition 2.7 (Continuité d'une fonction lipschitzienne)

Soit $M \geqslant 0$. Si f est M-lipschitzienne sur I, alors f est continue sur I.

Démonstration. Soit $a \in I$, $\forall x \in I$, $|f(x)-f(a)| \leqslant M\,|x-a| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$. Donc par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Donc f est continue au point a. Donc f est continue sur I. □

Proposition 2.8 (Inégalité des Accroissements Finis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et telle que $|f'|$ est majorée par un réel K, alors f est K-lipschitzienne.

Démonstration. Soit $(x,y) \in I^2$. Si $x = y$, alors $|f(x)-f(y)| = 0 \leqslant 0 = K\,|x-y|$.
Si $x < y$ (le cas $y < x$ se traite de la même façon), on applique l'égalité des accroissements finis à la fonction f, continue et dérivable sur $[x,y]$. Donc il existe $c \in]x,y[$ tel que $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c)$. Comme $c \in I$, on obtient $|f'(c)| \leqslant K$ et donc $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leqslant K$. Il suffit alors de multiplier par $|x-y| > 0$ pour conclure que f est K-lipschitzienne. □

Exercice 4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\cos(x) - 1| \leqslant |x|$.
Solution : La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\cos'(x)| = |-\sin(x)| \leqslant 1$. Donc par inégalité des accroissements finis, elle est 1-lipschitienne. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\cos(x) - \cos(0)| \leqslant |x-0|$. D'où le résultat annoncé.

Proposition 2.9 (Application des accroissements finis aux suites récurrentes)

Soit u une suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose qu'il existe un intervalle J tel que :

- J est stable par f et contient au moins un terme de la suite.
- sur J, f admet un unique point fixe ℓ.
- sur J, f est k-lipschitzienne pour $k \in [0,1[$.

Alors u converge vers ℓ.

Démonstration. Puisqu'il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} \in J$ et que J est stable par f, tous les termes de u à partir de ce rang sont bien définis et appartiennent à J.
Soit $n \geqslant n_0$, nos hypothèses donnent $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant k\,|u_n - \ell|$.
Soit $n \geqslant n_0$, on pose $P(n)$: « $|u_n - \ell| \leqslant k^{n-n_0}\,|u_{n_0} - \ell|$ ».

- $|u_{n_0} - \ell| \leqslant k^0\,|u_{n_0} - \ell|$ donc $P(n_0)$ est vraie.
- Soit $n \geqslant n_0$, on suppose que $P(n)$ est vraie. La relation de récurrence obtenue précédemment donne alors :

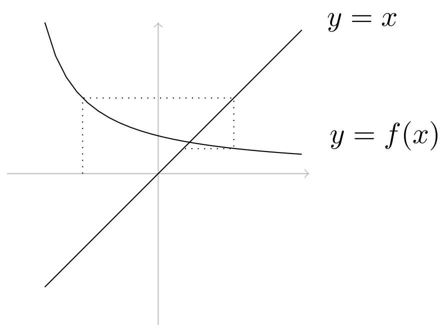
$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant k\,|u_n - \ell| \leqslant k^{n+1-n_0}\,|u_{n_0} - \ell|\,.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Donc $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant k^{n-n_0}\,|u_{n_0} - \ell|$. Comme $k \in [0,1[$, on a $k^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par théorème d'encadrement, $|u_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. □

Remarque. L'un des gros intérêts de cette méthode est qu'elle montre au passage $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant k^{n-n_0}\,|u_{n_0} - \ell|$. Cela permet de déterminer la vitesse de convergence (au moins géométrique), ce qui donne des approximations numériques de la valeur de la limite.

Exercice 5. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 > -2$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$. Après avoir démontré que cette suite était bien définie, étudier son comportement en $+\infty$.
Solution : On pose $f\ : x \mapsto \frac{1}{2+x}$. On commence par tracer la courbe sur $]-2,+\infty[$, la droite d'équation $y = x$ et les premiers termes de la suite pour conjecturer son comportement :



Choisissons J. On constate que f est positive, et comme on aura besoin de montrer qu'elle est lipschitzienne sur l'intervalle J, on choisit d'écarter le voisinage de -2 de l'étude (c'est là que les tangentes sont les plus pentues, et il nous faut des tangentes de pentes inférieures à 1). On pose donc $J = \mathbb{R}_+$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $2 + x > 0$, donc $f(x) \geqslant 0$. Donc $\mathbb{R}_+$ est stable par f, ce qui comme $u_1 = \frac{1}{2+u_0} \geqslant 0$ garantit la bonne définition de la suite. La suite u est donc à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (sauf éventuellement u_0).
Cherchons les points fixes de f. Soit $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x) = x \iff \frac{1}{2+x} = x \iff 1 = 2x + x^2 \iff x^2 + 2x - 1 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{2} \iff x = -1 + \sqrt{2},$$

où on a utilisé le calcul de discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8 > 0$, puis éliminé la valeur $-1 - \sqrt{2} < 0$. Donc $-1 + \sqrt{2}$ est l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}_+$.
Montrons maintenant que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions dérivables, et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|f'(x)| = \left|\frac{-1}{(2+x)^2}\right| = \frac{1}{(2+x)^2}$. Or si $x \geqslant 0$, $2 + x \geqslant 2$, donc $(2+x)^2 \geqslant 4 > 0$ par

croissance du carré sur $\mathbb{R}_+$. Donc par passage à l'inverse, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$. Donc par inégalité des accroissements finis, f est $\frac{1}{4}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.
Comme $0 \leqslant \frac{1}{4} < 1$, on en déduit que la suite u converge vers $-1+\sqrt{2}$.

2.4 Caractérisation des fonctions constantes et monotones

Proposition 2.10 (Variations de fonctions dérivables)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :
- f est croissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$.
- f est constante sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.

Démonstration. On va montrer le premier point. Le deuxième point s'obtient en appliquant le premier point à $-f$, et le troisième point s'obtient avec la réunion des deux premiers points.
- Supposons que f est croissante sur I. Soit $a \in I$, si $x \geqslant a$, $f(x) \geqslant f(a)$. De même, si $x \leqslant a$, $f(x) \leqslant f(a)$. Donc pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on a $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$.
  Par passage à la limite (ce qui est possible puisque f est dérivable en a), on obtient $f'(a) \geqslant 0$. Ceci étant vrai pour tout $a \in I$, cela donne la positivité de f' sur I.
- Supposons que $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$. On revient à la définition de la croissance : soit x et y dans I tels que $x \leqslant y$. Si $x = y$, il est immédiat que $f(x) = f(y)$. Si $x < y$, la fonction f étant dérivable (et continue) sur I, donc sur $[x, y]$, l'égalité des accroissements finis donne : $\exists c \in]x, y[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Or $f'(c) \geqslant 0$ puisque f' est positive. D'où $f(x) \leqslant f(y)$. Donc la fonction f est croissante sur I.

□

Proposition 2.11 (Cas particulier de la stricte monotonie)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit J un ensemble obtenu en retirant un nombre fini de points à I. Si $\forall x \in J,\ f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) et $\forall x \in I \setminus J,\ f'(x) = 0$, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I.

Remarque. L'annulation en un nombre fini de points n'empêche donc pas la stricte croissance de la fonction.

Démonstration. Quitte à considérer la fonction $-f$ plutôt que f, on peut ne considérer que le cas où f' est strictement positive sur J. Soit $a < b$ deux points de I, on va chercher à montrer que $f(a) < f(b)$.
On note $x_1 < \ldots < x_n$ les points de $(I \setminus J) \cap]a, b[$ (c'est-à-dire les points de $]a, b[$ où il n'y a pas stricte positivité de la dérivée), et on pose $x_0 = a$ et $x_{n+1} = b$. On a alors :

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b.$$

Or f' est positive sur I (puisqu'elle est soit strictement positive, soit nulle), donc f est croissante sur I et on a :

$$f(a) = f(x_0) \leqslant f(x_1) \leqslant \ldots \leqslant f(x_n) \leqslant f(x_{n+1}) = f(b). \qquad (*)$$

Soit $i \in [\![0, n]\!]$, f est dérivable (et continue) sur $[x_i, x_{i+1}]$, donc on peut y appliquer l'égalité des accroissements finis : il existe $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} = f'(c_i)$.
Comme c_i ne vaut aucun des x_k, $c_i \in J$ et on a $f'(c_i) > 0$. Donc $\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} > 0$, ce qui signifie que $f(x_i) < f(x_{i+1})$.
Les inégalités dans $(*)$ sont donc strictes, donc $f(a) < f(b)$.
La fonction f est donc strictement croissante sur I. □

2.5 Théorème de la limite de la dérivée

Proposition 2.12 (Limite de la dérivée)

Soit $a \in I$. Soit f une fonction continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et telle que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Démonstration. Soit $x \in I \cap]a, +\infty[$. La fonction f est continue sur $[a, x]$, dérivable sur $]a, x[$, l'égalité des accroissements finis donne donc qu'il existe $c_x \in]a, x[$ tel que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$. On procède de même si $x \in I \cap]-\infty, a[$, ce qui donne $c_x \in]x, a[$.
On construit ainsi une fonction $c : x \to c_x$, définie de $I \setminus \{a\}$ dans lui-même, et qui vérifie par construction (comme $c_x \in]a, x[$ ou $c_x \in]x, a[$),

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \quad |c_x - a| < |x - a|\,.$$

Or $\lim\limits_{x \to a} |x - a| = 0$, un théorème d'encadrement donne donc $\lim\limits_{x \to a} c_x = a$. On sait par ailleurs que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell$.
Donc par composition, $\lim\limits_{x \to a} f'(c_x) = \ell$. Or $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$ par définition de c_x. Donc $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$. Donc f est dérivable en a, de dérivée $f'(a) = \ell$. □

Remarque. On montre au passage que la fonction f' est continue en a.

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = x^2$ et $\forall x < 0,\ f(x) = 0$. Étudier sa dérivabilité sur $\mathbb{R}$, cette fois-ci en utilisant le théorème de limite de la dérivée.
Solution : Il est immédiat que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, car elle coïncide sur ces intervalles avec des fonctions polynômes. Mais il faut étudier le raccord en 0 avant de conclure à la dérivabilité sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x < 0, \quad f'(x) = 0 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0, \qquad \forall x > 0, \quad f'(x) = 2x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f'(x) = 0$. Donc par le théorème de la limite de la dérivée f est dérivable en 0 (et $f'(0) = 0$).

Remarque. Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = +\infty$ ou $-\infty$, on peut adapter ce raisonnement pour montrer que f n'est pas dérivable en a. Son graphe admet alors une tangente verticale en ce point.

3 Dérivées successives

3.1 Définitions et rappels

Définition 3.1 (Classe C^1)

On dit que f est **de classe** C^1 sur I lorsque f est dérivable sur I et que f' est continue sur I. On note alors $f \in C^1(I, \mathbb{R})$.

Définition 3.2 (Fonction deux fois dérivable, classe C^2)

On dit que f est **deux fois dérivable** sur I lorsque f est de classe C^1 sur I et que f' est dérivable sur I. On note alors $(f')' = f^{(2)}$.
On dit que f est **de classe** C^2 sur I lorsque f est deux fois dérivable sur I et que $f^{(2)}$ est continue sur I. On note alors $f \in C^2(I, \mathbb{R})$.

Remarque. On peut ensuite définir récursivement toutes les dérivées suivantes : soit p un entier naturel non nul, si $f^{(p)}$ est dérivable sur I alors f est $(p+1)$ fois dérivable sur I, avec pour tout $x \in I$, $f^{(p+1)}(x) = \left(f^{(p)}\right)'(x)$. Si, de plus, $f^{(p+1)}$ est continue sur I alors f est de classe C^{p+1} sur I.

Définition 3.3 (Classe C^∞)

On dit que f est **de classe** C^∞ sur I lorsque f est indéfiniment dérivable, c'est à dire dérivable à tout ordre. On note alors $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$.

Remarque. Si f est continue sur I, on notera par convention $f \in C^0(I, \mathbb{R})$ et $f^{(0)} = f$.

3.2 Formulaire

La plupart des fonctions usuelles sont de classe C^∞ sur tout intervalle inclus dans leur domaine de dérivabilité. Les formules suivantes sont à connaître et se montrent par récurrence (n'hésitez pas à écrire explicitement la récurrence dans le cas où la formule ne vous paraît pas évidente).

$f(x)$	$D_{f'}$	$f^{(n)}(x)$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
x^p $(p \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$\begin{cases} \dfrac{p!}{(p-n)!}x^{p-n} & \text{si } n \leqslant p \\ 0 & \text{si } n > p \end{cases}$
x^α $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} = \left(\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha - i)\right) x^{\alpha-n}$

$f(x)$	$D_{f'}$	$f^{(n)}(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$
$\dfrac{1}{a+x}$	$\mathbb{R} \setminus \{-a\}$	$\dfrac{(-1)^n n!}{(a+x)^{n+1}}$
$\dfrac{1}{a-x}$	$\mathbb{R} \setminus \{a\}$	$\dfrac{n!}{(a-x)^{n+1}}$

3.3 Opérations sur les dérivées

Proposition 3.4 (Linéarité des dérivées successives)

Soit $p \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et soient f et g des fonctions de classe C^p sur l'intervalle I. Alors :
- $f + g$ est de classe C^p sur I et $(f+g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}$.
- αf est de classe C^p sur I et $(\alpha f)^{(p)} = \alpha f^{(p)}$.

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ en utilisant pour l'hérédité la linéarité de la dérivée. $\square$

Remarque. Ce résultat reste vrai si on remplace « de classe C^p » par « p fois dérivable » ou « de classe C^∞ ».

Exercice 7. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la dérivée k-ième sur $]1, +\infty[$ de $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 3x + 1}{x^2 - 1}$.

Solution : On montre (cf chapitre sur les polynômes) que $\forall x \in]1, +\infty[$, $f(x) = x + \frac{5}{2(x-1)} + \frac{3}{2(x+1)} = x + \frac{5}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{3}{2}\frac{1}{x+1}$, la fonction f est donc de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ et les formules de dérivées usuelles donnent :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f'(x) = 1 - \frac{5}{2}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{3}{2}\frac{1}{(x+1)^2},$$

$$\forall k \geqslant 2, \forall x \in]1, +\infty[, \quad f^{(k)}(x) = \frac{5}{2}\frac{(-1)^k k!}{(x-1)^{k+1}} + \frac{3}{2}\frac{(-1)^k k!}{(x+1)^{k+1}}.$$

Proposition 3.5 (Formule de Leibniz : dérivées successives du produit)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient f et g des fonctions de classe C^n sur l'intervalle I. Alors la fonction fg est de classe C^n sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Remarque. Attention à ne pas se laisser induire en erreur par la notation en exposant : cette formule porte sur des dérivées, pas sur des puissances !

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) =$ « $\forall (f,g) \in C^n(I)^2$, $fg \in C^n(I)$ et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ ».

— Soit $n = 0$, le produit de deux fonctions continues sur I est continu et $(fg)^{(0)} = fg = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)}$. Donc $P(0)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vraie. Soient f et g des fonctions de classe C^{n+1} sur I. Alors f et g sont aussi de classe C^n, et l'hypothèse de récurrence nous donne : fg est de classe C^n, et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)}$ est de classe C^{n+1-k}, et donc au moins de classe C^1. De même, $g^{(n-k)}$ est de classe $C^{n+1-n+k}$, et donc au moins de classe C^1. Donc par produit et somme de fonctions de classe C^1, $(fg)^{(n)}$ est de classe C^1. Ce qui signifie que fg est de classe C^{n+1}. On obtient alors en dérivant la relation précédente :

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \binom{n}{0} f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} g f^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \text{ par la formule de Pascal}
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie, ce qui termine la preuve.

□

Exercice 8. Étudier la dérivabilité de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^x$, et calculer ses dérivées.
Solution : On applique la formule de Leibniz à $x \to e^x$ et $g : x \to x^2$ qui sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel x, $f^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^x g^{(k)}(x)$.

Or on sait par propriété des polynômes que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2x$, $g''(x) = 2$ et si $k > 2$, $g^{(k)}(x) = 0$. On en déduit que si $n \geqslant 2$ (condition nécessaire pour avoir le droit de sortir les premiers termes de la somme) :

$$f^{(n)}(x) = \binom{n}{0} e^x g^{(0)}(x) + \binom{n}{1} e^x g^{(1)}(x) + \binom{n}{2} e^x g^{(2)}(x) + 0 = e^x x^2 + n e^x 2x + \frac{n(n-1)}{2} e^x 2 = e^x \left(x^2 + 2nx + n(n-1) \right).$$

On vérifie ensuite que la formule s'applique aussi pour $n = 0$ et $n = 1$, ce qui est bien le cas ici : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 3.6 (Formule de composition)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une application définie sur I et g une application définie sur J avec $f(I) \subset J$. Alors :

— Si f est dérivable n fois sur I et g est dérivable n fois sur J, alors $g \circ f$ est dérivable n fois sur I.

— Si f et g sont de classe C^n respectivement sur I et J alors $g \circ f$ est de classe C^n sur I.

— Si f et g sont de classe C^∞ respectivement sur I et J alors $g \circ f$ est de classe C^∞ sur I.

Démonstration. On montre le premier point, les autres se montrent avec une démarche similaire. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) =$ « si f est dérivable n fois sur I et g est dérivable n fois sur J, alors $g \circ f$ est dérivable n fois sur I ».

- Soit $n = 0$, et f et g deux fonctions dérivables 0 fois sur I et J respectivement. Alors $g \circ f$ est dérivable 0 fois sur I et $P(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie. Soit f et g deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I et J respectivement. Elles sont en particulier dérivables, et par théorème de dérivation des fonctions composées, $g \circ f$ est dérivable sur I, avec $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$. Par hypothèse, les fonctions g' et f sont n fois dérivables sur J et I respectivement, et donc par $P(n)$ $(g' \circ f)$ est n fois dérivable sur I. Comme de plus f' est n fois dérivable sur I, par produit $(g \circ f)'$ est n fois dérivable. Donc $g \circ f$ est $n+1$ fois dérivable, et $P(n+1)$ est vraie.

D'où le résultat. □

Proposition 3.7 (Formule de réciproque)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f une application bijective de I dans $J = f(I)$. Alors :
- Si f est dérivable n fois sur I et f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable n fois sur J.
- Si f est de classe C^n sur I et f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est de classe C^n sur J.
- Si f est de classe C^∞ sur I et f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est de classe C^∞ sur J.

Remarque. Attention à ne pas oublier l'hypothèse de non-annulation de la dérivée !

Démonstration. Ce résultat se démontre par récurrence, en adaptant la démonstration du résultat précédent. □

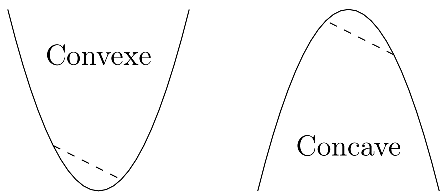
4 Fonctions convexes

4.1 Définition

Définition 4.1 (Fonction convexe, concave)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
- f est **convexe** sur I lorsque $\forall (x_1, x_2) \in I^2$, $\forall t \in [0,1]$, $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$.
- f est **concave** sur I lorsque $\forall (x_1, x_2) \in I^2$, $\forall t \in [0,1]$, $f(tx_1 + (1-t)x_2) \geqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$.

Remarque. Interprétation géométrique : pour $t \in [0,1]$, $y = tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$ parcourt le segment d'extrémités $f(x_1)$ et $f(x_2)$, tandis que $y = f(tx_1 + (1-t)x_2)$ parcourt l'arc de courbe de f situé entre ces mêmes points. Donc la courbe représentative d'une fonction convexe (respectivement concave) est en dessous (respectivement au dessus) de ses cordes.



Exercice 9. On admet que le le logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\forall u \in [1, e]$, $u - 1 \leqslant (e-1)\ln(u)$.
<u>Solution :</u> On étudie la corde d'extrémités 1 et e : $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$, cette corde a donc une équation du type $y = au + b$ avec $0 = a + b$ et $1 = ae + b$. D'où $y = \frac{u-1}{e-1}$. La concavité donne alors : pour tout $u \in [1, e]$, $\frac{u-1}{e-1} \leqslant \ln(u)$ et donc $u - 1 \leqslant (e-1)\ln(u)$.

Proposition 4.2 (Lien entre convexité et concavité)

Une fonction f est concave sur un intervalle I si et seulement si $-f$ est convexe sur I.

Démonstration. On montre que f concave $\Rightarrow -f$ convexe, la réciproque se montre par la même méthode.
Soit f une fonction concave sur un intervalle I.
Soit $(x_1, x_2) \in I^2$ et $t \in [0,1]$, alors $f(tx_1 + (1-t)x_2) \geqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$, d'où en multipliant par -1, $(-f)(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant t(-f)(x_1) + (1-t)(-f)(x_2)$. Donc $-f$ est convexe sur I. □

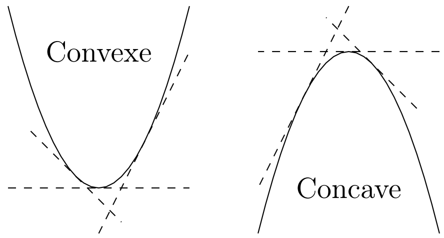
4.2 Convexité et dérivabilité

Proposition 4.3 (Convexité d'une fonction dérivable)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- f est convexe sur I,
- En tout point de I, la courbe de f est au dessus de ses tangentes,
- f' est croissante sur I.

Démonstration. Admis (nécessite les inégalités des pentes qui n'ont pas été énoncées). □

Interprétation géométrique :



Exercice 10. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x+1$.
Solution : La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Donc elle est au-dessus de sa tangente en 0, d'équation $y = e^0(x-0)+e^0$, c'est-à-dire $y = x+1$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x+1$.

Exercice 11. Montrer que pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $x \geqslant \ln(x+1)$.
Solution : La fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et sa dérivée $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est décroissante sur $]-1,+\infty[$, donc $x \mapsto \ln(x+1)$ est concave sur cet intervalle. Donc elle est en dessous de sa tangente en 0, d'équation $y = \frac{1}{0+1}(x-0)+\ln(1+0)$, c'est-à-dire $y = x$. Donc $\forall x \in]-1,+\infty[$, $x \geqslant \ln(x+1)$.

Proposition 4.4 (Convexité d'une fonction deux fois dérivable)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. Alors f est convexe sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$.

Démonstration. Découle directement de la caractérisation par la croissance : f' est croissante sur I si et seulement si f'' est positive sur cet intervalle. □

Remarque. De même, f est concave sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

5 Fonctions à valeurs complexes

Dans cette section, on considère une fonction f définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 5.1 (Dérivabilité)

Soit $a \in I$. On dit que f est **dérivable** en a si $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{C}$. On note alors $f'(a)$ la valeur de la limite.

Proposition 5.2 (Lien avec la dérivabilité des parties réelle et imaginaire)

Soit $a \in I$. f est dérivable en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables en a. On a alors :

$$f'(a) = (\mathrm{Re}(f))'(a) + i(\mathrm{Im}(f))'(a).$$

Démonstration. Découle du résultat analogue sur les limites de fonctions, appliqué à la fonction taux d'accroissement. □

Remarque. Si $k \in \mathbb{N}^*$, on note $C^k(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions $I \to \mathbb{C}$ qui sont k fois dérivables et dont la dérivée k-ième est continue. La fonction dérivée k-ième de f est notée $f^{(k)}$, et par convention, $f^{(0)} = f$.

Remarque. Les formules usuelles de dérivée (combinaison linéaire, produit, formule de Leibniz) se généralisent sans difficulté au cas complexe. Ce n'est pas contre pas le cas des résultats évoquant une monotonie, des résultats de convexité, du théorème de Rolle ou de l'égalité des accroissements finis.

Exemple. La fonction $t \mapsto e^{it}$ est continue et dérivable sur $[0, 2\pi]$, vérifie $e^{i0} = 1 = e^{i2\pi}$, mais sa dérivée $t \mapsto ie^{it}$ ne s'annule pas sur $[0, 2\pi]$.

Proposition 5.3 (Inégalité des accroissements finis, cas complexe)

Soit f une fonction de classe C^1 sur I. On suppose qu'il existe un réel M tel que $\forall t \in I, |f'(t)| \leqslant M$. Alors $\forall (x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant M\,|x - y|$.

Démonstration. Admis à ce stade de l'année, nécessite une majoration d'intégrale que l'on justifiera dans le cours d'intégration. □