

Exercice 1 (★). Déterminer un équivalent simple lorsque $n \rightarrow +\infty$ de :

- | | | | |
|--|--|--|--|
| 1. $n + 2$ | 2. $\frac{1}{n} + 2$ | 3. $3e^{2n} + 2n^4$ | 4. $e^{\frac{1}{n}} (\cos(\frac{1}{n^2}) - 1)$ |
| 5. $\frac{1}{2n^2} - \frac{3}{n} + e^{-n}$ | 6. $(n + 2)e^{n+3}$ | 7. $(n^2 + n + 1) \ln(n)$ | 8. $\frac{3}{5n^2+1}$ |
| 9. $(2n - \ln(n))^3$ | 10. $\frac{\ln(n^2+1)}{\ln(n+1)}$ | 11. $\sqrt{4 - \frac{4}{n}} - 2$ | 12. $\left(\frac{n+e^n}{1+e^{2n}}\right)^2$ |
| 13. $\sqrt{\frac{2}{n^4} + \frac{2}{n^2}}$ | 14. $\frac{n \ln(n^2+n)+2n}{(n+1)^2 \ln(n^5+1)}$ | 15. $\frac{(1+n)^2}{\cos(\frac{1}{n})} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ | 16. $\ln(1+n) - \ln(n)$ |

Exercice 2 (★). Déterminer un équivalent simple lorsque $x \rightarrow +\infty$ puis lorsque $x \rightarrow 0$ (ou parfois 0^+) de :

- | | | | | |
|-------------------------------|----------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------|
| 1. $2 + 3x$ | 2. $2x^2 - 5x + 7$ | 3. $x^4 - 2 + \frac{4}{x}$ | 4. $\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}$ | 5. $\frac{x^3+1}{\ln(1+x^2)}$ |
| 6. $5 \ln(x) + 2$ | 7. $5 \ln(x) + 2x$ | 8. $5 \ln(x) + \frac{2}{x}$ | 9. $\frac{1}{2x+3}$ | 10. $3e^x + x - 1$ |
| 11. $\frac{x-3x^3}{2x^2+x^4}$ | 12. $\frac{3x^2}{x^2+x^3}$ | 13. $\frac{2e^x+x^2+3}{e^{2x}+x^3}$ | 14. $\frac{x^2 \ln(2+x+e^x)}{x+x^2}$ | 15. $\frac{1}{3x-2}$ |
| 16. $(\ln(2x + 4x^4))^2$ | 17. $\ln(1 + 2x + 3x^2)$ | | | |

Exercice 3 (★★). Trouver un équivalent simple de $\ln(1 - \sin(\frac{1}{n}))$.

Exercice 4 (★★). Soit u une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ qui vérifie $\ln\left(\frac{2}{u_n}\right) \sim \frac{1}{n^2}$. Montrer que u converge vers une limite ℓ et donner un équivalent de $(u_n - \ell)$.

Exercice 5 (★★). Soient u et v deux suites à valeurs strictement positives telles que $u_n \sim v_n$ et qui vérifient $\lim u_n = \lim v_n = +\infty$.

1. Montrer que $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.
2. Montrer qu'on n'a pas forcément $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.
3. Application : déterminer un équivalent de $\frac{\ln(n^2+3n+2)}{\ln(n)}$ et de $\frac{n^2+1}{\ln(e^n+n)}$.

Exercice 6 (★). Simplifier au maximum les expressions suivantes, en restant le plus précis possible.

- | | | | |
|---|--|--|--|
| 1. $n^2 O(n^3)$ | 2. $\frac{1}{n^2} o(n)$ | 3. $o(n^2) \times o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ | 4. $o(e^{-n}) \times O(n)$ |
| 5. $O(\ln(n)) \times O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ | 6. $\left(\frac{3}{\ln(n)}\right) o(n^2) \times o(e^{-n})$ | 7. $2o(\sqrt{n}) + o(\sqrt{n})$ | 8. $O\left(\frac{1}{n}\right) - O\left(\frac{1}{n}\right)$ |
| 9. $o(e^{-n}) - 2O(e^{-n})$ | 10. $\frac{1}{n}(o(\ln(n)) - o(\ln(n)))$ | 11. $e^n + O(e^n)$ | 12. $o(n^2) + o(n^3)$ |
| 13. $o(e^{-n}) + o(e^{-2n})$ | 14. $\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ | 15. $n + o(n \ln(n)) + o(\ln(n))$ | |

Exercice 7 (★).

1. Simplifier au maximum les expressions suivantes (les O et o sont en $x \rightarrow +\infty$), en restant le plus précis possible.

- | | | |
|---|---|--|
| (a) $o(x + 1)$ | (b) $o(5x^2) - o(2x^3)$ | (c) $O(x) - O(x^2)$ |
| (d) $\ln(x) (o(x) + o(x^2))$ | (e) $O(2 + x - 3x^4)$ | (f) $o\left(\frac{1}{x}\right) + o(1)$ |
| (g) $o\left(x^2 - 2 - \frac{1}{x^3}\right)$ | (h) $o\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$ | (i) $o\left(\frac{1}{x+2}\right)$ |

2. Réaliser le même travail avec cette fois-ci les O et o en $x \rightarrow 0$ (0^+ lorsqu'on utilise un logarithme).

Exercice 8 (★). Vrai ou faux ? Justifier.

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(e^n)$ | 2. $\sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n)$ | 3. $n^5 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(e^n)$ |
| 4. $\frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ | 5. $\frac{1}{\ln n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ | 6. $5n^4 - 3n^2 - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(n^4)$ |
| 7. $o(n^2) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^3)$ | 8. $o(n^3) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^2)$ | |

Exercice 9 (★). Simplifier au maximum (et sans perdre de précision) les expressions suivantes (les O et o sont en $x \rightarrow 0$) :

- | | | |
|---|--|--------------------------------|
| 1. $1 + 2x - x^2 + o(x)$ | 2. $5x^5 - 3x^2 + o(x^3)$ | 3. $-2 + x^2 - x^3 + o(x + 1)$ |
| 4. $1 + \frac{1}{x} - x^2 + o(x - x^2)$ | 5. $\frac{1}{x^2} + 1 - x + o\left(\frac{1}{x}\right)$ | |

Exercice 10 (★★). Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, avec $b > 0$. On considère la suite u qui vérifie $u_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Est-elle monotone à partir d'un certain rang ?

Exercice 11 (★★). Soit $q > 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\varepsilon_n = \frac{q^n}{n!}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer ε_{n+1} en fonction de ε_n .
2. En déduire que $q^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n!)$

Exercice 12 (★★). Comparer asymptotiquement (c'est-à-dire déterminer qui est négligeable devant qui) les suites a , b , c et d définies pour tout entier n par :

$$a_n = n! \qquad b_n = n^n \qquad c_n = (2n)! \qquad d_n = (2n)^n.$$

Exercice 13 (★). Déterminer le comportement lorsque $n \rightarrow +\infty$ de :

1. $(1 + \frac{1}{n^2})^n$
2. $(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})^n$
3. $(1 - \frac{1}{n})^n$
4. $(1 - \frac{1}{n^2})^n$
5. $(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})^n$

Exercice 14 (★★). Étudier les limites des fonctions suivantes (les équivalents et négligeabilités peuvent être nécessaires ou ne pas l'être) :

1. Limites en 1^+ et $+\infty$ de $a(x) = \ln(\sqrt{x} - 1) - \ln(x - 1)$,
2. Limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de $b(x) = x2^x$,
3. Limite en 8 de $d(x) = \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$,
4. Limites en 0^+ et $+\infty$ de $f(x) = x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

Exercice 15 (Type DS). On considère la fonction h définie sur \mathbb{R} par : $\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = \frac{1}{e^t + e^{-t}}$.

1. (a) Réaliser une étude complète de h : parité, variations, limites, extremums et allure du graphe.
(b) Déterminer un équivalent simple de $h(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$ et quand $t \rightarrow -\infty$.
2. (a) Montrer que h admet un unique point fixe ℓ .
(b) En utilisant l'étude de fonction réalisée en question 1, justifier que $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$.
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|h'(t)| \leq h(t) \leq \frac{1}{2}$.
4. On considère la suite u définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$.
(a) Montrer que u est bien définie et à valeurs dans $[0, \frac{1}{2}]$.
(b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$.
(c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. Que peut-on en conclure sur la convergence de la suite u ?
(d) Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varepsilon_n = u_n - \ell$. Montrer que $\varepsilon_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} h'(\ell)\varepsilon_n$. Interpréter ce résultat.

Indication : on admet que si h est dérivable en un point ℓ , alors $h(t) \underset{t \rightarrow \ell}{=} h(\ell) + h'(\ell)(t - \ell) + o(t - \ell)$.