Relations asymptotiques

Exercice 1 (★). Déterminer un équivalent simple lorsque $n \to +\infty$ de :

1. $n+2$
2. $\frac{1}{n}+2$
3. $3e^{2n}+2n^4$
4. $e^{\frac{1}{n}}\left(\cos(\frac{1}{n^2})-1\right)$
5. $\frac{1}{2n^2}-\frac{3}{n}+e^{-n}$
6. $(n+2)e^{n+3}$
7. $(n^2+n+1)\ln(n)$
8. $\frac{3}{5n^2+1}$
9. $(2n-\ln(n))^3$
10. $\frac{\ln(n^2+1)}{\ln(n+1)}$
11. $\sqrt{4-\frac{4}{n}}-2$
12. $\left(\frac{n+e^n}{1+e^{2n}}\right)^2$
13. $\sqrt{\frac{2}{n^4}+\frac{2}{n^2}}$
14. $\frac{n\ln(n^2+n)+2n}{(n+1)^2\ln(n^5+1)}$
15. $\frac{(1+n)^2}{\cos(\frac{1}{n})}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$
16. $\ln(1+n)-\ln(n)$

Résultat attendu : On conjecture puis montre les équivalents en revenant à la définition :

1. n
2. 2
3. $3e^{2n}$
4. $-\frac{1}{2n^4}$
5. $-\frac{3}{n}$
6. ne^{n+3}
7. $n^2\ln(n)$
8. $\frac{3}{5n^2}$
9. $8n^3$
10. $\frac{\ln(n^2)}{\ln(n)}=2$
11. $-\frac{1}{n}$
12. e^{-2n}
13. $\frac{\sqrt{2}}{n}$
14. $\frac{n\ln(n^2)}{n^2\ln(n^5)}=\frac{2}{5n}$
15. n
16. $\frac{1}{n}$

Exercice 2 (★). Déterminer un équivalent simple lorsque $x \to +\infty$ puis lorsque $x \to 0$ (ou parfois 0^+) de :

1. $2+3x$
2. $2x^2-5x+7$
3. $x^4-2+\frac{4}{x}$
4. $\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}$
5. $\frac{x^3+1}{\ln(1+x^2)}$
6. $5\ln(x)+2$
7. $5\ln(x)+2x$
8. $5\ln(x)+\frac{2}{x}$
9. $\frac{1}{2x+3}$
10. $3e^x+x-1$
11. $\frac{x-3x^3}{2x^2+x^4}$
12. $\frac{3x^2}{x^2+x^3}$
13. $\frac{2e^x+x^2+3}{e^{2x}+x^3}$
14. $\frac{x^2\ln(2+x+e^x)}{x+x^2}$
15. $\frac{1}{3x-2}$
16. $\left(\ln(2x+4x^4)\right)^2$
17. $\ln(1+2x+3x^2)$

Résultat attendu : On conjecture puis montre les équivalents en revenant à la définition, d'abord en $+\infty$:

1. $3x$
2. $2x^2$
3. x^4
4. $\frac{2}{x}$
5. $\frac{x^3}{2\ln(x)}$
6. $5\ln(x)$
7. $2x$
8. $5\ln(x)$
9. $\frac{1}{2x}$
10. $3e^x$
11. $-\frac{3}{x}$
12. $\frac{3}{x}$
13. $2e^{-x}$
14. x
15. $\frac{1}{3x}$
16. $16(\ln(x))^2$
17. $2\ln(x)$

Puis en 0 :

1. 2
2. 7
3. $\frac{4}{x}$
4. $-\frac{3}{x^2}$
5. $\frac{1}{x^2}$
6. $5\ln(x)$
7. $5\ln(x)$
8. $\frac{2}{x}$
9. $\frac{1}{3}$
10. 2
11. $\frac{1}{2x}$
12. 3
13. 5
14. $x\ln(3)$
15. $-\frac{1}{2}$
16. $(\ln(x))^2$
17. $2x$

Exercice 3 (★★). Trouver un équivalent simple de $\ln\left(1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.
Résultat attendu : Les équivalents usuels donnent $\ln\left(1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim -\frac{1}{n}$

Exercice 4 (★★). Soit u une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ qui vérifie $\ln\left(\frac{2}{u_n}\right) \sim \frac{1}{n^2}$. Montrer que u converge vers une limite ℓ et donner un équivalent de $(u_n - \ell)$.
Résultat attendu : u converge vers 2 et $u_n - 2 \sim -\frac{2}{n^2}$.

Exercice 5 (★★). Soient u et v deux suites à valeurs strictement positives telles que $u_n \sim v_n$ et qui vérifient $\lim u_n = \lim v_n = +\infty$.

1. Montrer que $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.
2. Montrer qu'on n'a pas forcément $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.
3. Application : déterminer un équivalent de $\frac{\ln(n^2+3n+2)}{\ln(n)}$ et de $\frac{n^2+1}{\ln(e^n+n)}$.

Résultat attendu :

1. Retour à la définition
2. Contre exemple.
3. $\frac{\ln(n^2+3n+2)}{\ln(n)} \sim 2$ et $\frac{n^2+1}{\ln(e^n+n)} \sim n$.

Exercice 6 (★). Simplifier au maximum les expressions suivantes, en restant le plus précis possible.

1. $n^2 O(n^3)$
2. $\frac{1}{n^2} o(n)$
3. $o(n^2) \times o\left(\frac{1}{n^3}\right)$
4. $o(e^{-n}) \times O(n)$
5. $O(\ln(n)) \times O\left(\frac{1}{n^3}\right)$
6. $\left(\frac{3}{\ln(n)}\right) o(n^2) \times o(e^{-n})$
7. $2o(\sqrt{n}) + o(\sqrt{n})$
8. $O\left(\frac{1}{n}\right) - O\left(\frac{1}{n}\right)$
9. $o(e^{-n}) - 2O(e^{-n})$
10. $\frac{1}{n}(o(\ln(n)) - o(\ln(n)))$
11. $e^n + O(e^n)$
12. $o(n^2) + o(n^3)$
13. $o(e^{-n}) + o(e^{-2n})$
14. $\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n}\right)$
15. $n + o(n\ln(n)) + o(\ln(n))$

Résultat attendu :

1. $O(n^5)$
2. $o\left(\frac{1}{n}\right)$
3. $o\left(\frac{1}{n}\right)$
4. $o(ne^{-n})$
5. $O\left(\frac{\ln(n)}{n^3}\right)$
6. $o\left(\frac{n^2 e^{-n}}{\ln(n)}\right)$
7. $o(\sqrt{n})$
8. $O\left(\frac{1}{n}\right)$
9. $O(e^{-n})$
10. $o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$
11. $O(e^n)$
12. $o(n^3)$
13. $o(e^{-n})$
14. $o\left(\frac{1}{n}\right)$
15. $o(n\ln(n))$

Exercice 7 (★).

1. Simplifier au maximum les expressions suivantes (les O et o sont en $x \to +\infty$), en restant le plus précis possible.

   (a) $o(x+1)$ (b) $o(5x^2) - o(2x^3)$ (c) $O(x) - O(x^2)$
   (d) $\ln(x)\left(o(x) + o(x^2)\right)$ (e) $O(2 + x - 3x^4)$ (f) $o\left(\frac{1}{x}\right) + o(1)$
   (g) $o\left(x^2 - 2 - \frac{1}{x^3}\right)$ (h) $o\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$ (i) $o\left(\frac{1}{x+2}\right)$

2. Réaliser le même travail avec cette fois-ci les O et o en $x \to 0$ (0^+ lorsqu'on utilise un logarithme).

Résultat attendu :

1. (a) $o(x)$ (b) $o(x^3)$ (c) $O(x^2)$
   (d) $o(x^2\ln(x))$ (e) $O(x^4)$ (f) $o(1)$
   (g) $o(x^2)$ (h) $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (i) $o\left(\frac{1}{x}\right)$
2. (a) $o(1)$ (b) $o(x^2)$ (c) $O(x)$
   (d) $o(x\ln(x))$ (e) $O(1)$ (f) $o\left(\frac{1}{x}\right)$
   (g) $o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ (h) $o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ (i) $o(1)$

Exercice 8 (★). Vrai ou faux ? Justifier.

1. $n^2 \underset{n\to+\infty}{=} o(e^n)$
2. $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$
3. $n^5 \underset{n\to+\infty}{=} o(e^n)$
4. $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$
5. $\frac{1}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$
6. $5n^4 - 3n^2 - 1 \underset{n\to+\infty}{=} O(n^4)$
7. $o(n^2) \underset{n\to+\infty}{=} o(n^3)$
8. $o(n^3) \underset{n\to+\infty}{=} o(n^2)$

Résultat attendu :

1. Vrai
2. Vrai
3. Vrai
4. Vrai
5. Faux
6. Vrai
7. Vrai
8. Faux

Exercice 9 (★). Simplifier au maximum (et sans perdre de précision) les expressions suivantes (les O et o sont en $x \to 0$) :

1. $1 + 2x - x^2 + o(x)$
2. $5x^5 - 3x^2 + o(x^3)$
3. $-2 + x^2 - x^3 + o(x+1)$
4. $1 + \frac{1}{x} - x^2 + o(x - x^2)$
5. $\frac{1}{x^2} + 1 - x + o\left(\frac{1}{x}\right)$

Résultat attendu :

1. $1 + 2x + o(x)$
2. $-3x^2 + o(x^3)$
3. $-2 + o(1)$
4. $1 + \frac{1}{x} + o(x)$
5. $\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercice 10 (★★). Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, avec $b > 0$. On considère la suite u qui vérifie $u_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Est-elle monotone à partir d'un certain rang ?

Résultat attendu : La suite u est décroissante à partir d'un certain rang.

Exercice 11 (★★). Soit $q > 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\varepsilon_n = \frac{q^n}{n!}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer ε_{n+1} en fonction de ε_n.
2. En déduire que $q^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$

Résultat attendu :

1. $\varepsilon_{n+1} = \frac{q}{n+1}\varepsilon_n$
2. On montre que $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puis on passe à la limite dans l'égalité de la question précédente pour montrer que sa limite vaut 0.

Exercice 12 (★★). Comparer asymptotiquement (c'est-à-dire déterminer qui est négligeable devant qui) les suites a, b, c et d définies pour tout entier n par :

$$a_n = n! \qquad b_n = n^n \qquad c_n = (2n)! \qquad d_n = (2n)^n.$$

Résultat attendu : $n! = o(n^n)$ puis $n^n = o((2n)^n)$ puis $(2n)^n = o((2n)!)$.

Exercice 13 (★). Déterminer le comportement lorsque $n \to +\infty$ de :

1. $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$
2. $\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$
3. $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$
4. $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$
5. $\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

Résultat attendu : Les limites valent :

1. $e^0 = 1$
2. $+\infty$
3. e^{-1}
4. $e^0 = 1$
5. 0

Exercice 14 (★★). Étudier les limites des fonctions suivantes (les équivalents et négligeabilités peuvent être nécessaires ou ne pas l'être) :

1. Limites en 1^+ et $+\infty$ de $a(x) = \ln\left(\sqrt{x}-1\right) - \ln(x-1)$,
2. Limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de $b(x) = x2^x$,
3. Limite en 8 de $d(x) = \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$,
4. Limites en 0^+ et $+\infty$ de $f(x) = x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

Résultat attendu :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1+} a(x) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} b(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} b(x) = 0$.
3. $\lim\limits_{x\to8} d(x) = 12$.
4. $\lim\limits_{x\to0+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$.

Exercice 15 (Type DS)**.** On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R},\ h(t) = \frac{1}{e^t+e^{-t}}$.

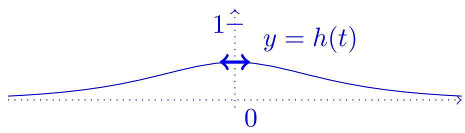
1. (a) Réaliser une étude complète de h : parité, variations, limites, extremums et allure du graphe.
   (b) Déterminer un équivalent simple de $h(t)$ quand $t \to +\infty$ et quand $t \to -\infty$.
2. (a) Montrer que h admet un unique point fixe ℓ.
   (b) En utilisant l'étude de fonction réalisée en question 1, justifier que $0 \leqslant \ell \leqslant \frac{1}{2}$.
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|h'(t)| \leqslant h(t) \leqslant \frac{1}{2}$.
4. On considère la suite u définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = h(u_n)$.
   (a) Montrer que u est bien définie et à valeurs dans $[0, \frac{1}{2}]$.
   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|$.
   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$. Que peut-on en conclure sur la convergence de la suite u ?
   (d) Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varepsilon_n = u_n - \ell$. Montrer que $\varepsilon_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} h'(\ell)\varepsilon_n$. Interpréter ce résultat.

   Indication : on admet que si h est dérivable en un point ℓ, alors $h(t) \underset{t\to\ell}{=} h(\ell) + h'(\ell)(t-\ell) + o(t-\ell)$.

Résultat attendu :

1. (a) h est paire car $\forall t \in \mathbb{R},\ h(-t) = \frac{1}{e^{-t}+e^t} = h(t)$. De plus, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables et $\forall t \in \mathbb{R},\quad h'(t) = -\frac{e^t-e^{-t}}{(e^t+e^{-t})^2} = \frac{e^{-t}-e^t}{(e^t+e^{-t})^2}$.
   Soit $t \in \mathbb{R}$, on en déduit $h'(t) \geqslant 0 \iff e^t \leqslant e^{-t} \iff t \leqslant -t \iff t \leqslant 0$. Donc h est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle admet donc un maximum en 0, qui vaut $h(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Il n'y a pas d'autre point critique, donc pas d'autre extremum. Enfin, $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} h(t) = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0



   (b) $\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{e^t+e^{-t}}{e^t} = 1 + e^{-2t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $e^t + e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\sim} e^t$ et $h(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{e^t} = e^{-t}$.
   $\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{e^t+e^{-t}}{e^{-t}} = e^{2t} + 1 \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $e^t + e^{-t} \underset{t\to-\infty}{\sim} e^{-t}$ et $h(t) \underset{t\to-\infty}{\sim} \frac{1}{e^{-t}} = e^t$.
2. (a) Soit $t < 0$, alors $h(t) > 0$ d'après 1.a. Donc $h(t) \neq t$. On restreint donc l'étude à $t \in \mathbb{R}_+$. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $g(t) = h(t) - t$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et 1.a donne $\forall t \in \mathbb{R}_+,\quad g'(t) = h'(t) - 1 \leqslant -1 < 0$. La fonction g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme elle est aussi continue, on peut appliquer le théorème de la bijection : g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $g(\mathbb{R}_+)$. Or $g(0) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0 - \infty = -\infty$, donc $g(\mathbb{R}_+) =]-\infty, \frac{1}{2}]$. Comme $0 \in]-\infty, \frac{1}{2}]$, il existe un unique $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $g(\ell) = 0 \iff h(\ell) = \ell$. Donc h admet un unique point fixe.
   (b) On a vu en question 1.a que h est bornée par 0 et $\frac{1}{2}$, donc $0 \leqslant h(\ell) \leqslant \frac{1}{2}$, ce qui donne $0 \leqslant \ell \leqslant \frac{1}{2}$.
3. Soit $t \in \mathbb{R}$, $|h'(t)| = \left|\frac{e^{-t}-e^t}{(e^t+e^{-t})^2}\right| = \frac{|e^{-t}-e^t|}{(e^t+e^{-t})^2} \leqslant \frac{|e^{-t}|+|e^t|}{(e^t+e^{-t})^2} = \frac{e^{-t}+e^t}{(e^t+e^{-t})^2} = \frac{1}{e^t+e^{-t}} = h(t)$ par propriétés de la valeur absolue. L'étude de h effectuée en 1.a garantit par ailleurs que $h(t) \leqslant \frac{1}{2}$, ce qui permet de conclure.
4. (a) D'après 1.a, h est minorée par 0 et majorée par $\frac{1}{2}$. Donc l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ est stable par h. Or, $u_0 = 0 \in [0, \frac{1}{2}]$. Donc u est bien définie et à valeurs dans $[0, \frac{1}{2}]$.
   (b) h est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, d'après 3., $|h'|$ est majorée par $\frac{1}{2}$. L'inégalité des accroissements finis donne alors que h est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |h(x) - h(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$. Soit $n \in \mathbb{N}$, prendre $x = u_n$ et $y = \ell$ donne $|h(u_n) - h(\ell)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|$, càd $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: « $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$ ». $|u_0 - \ell| = |0 - \ell| = \ell \leqslant \frac{1}{2}$ donc $P(0)$ est vraie.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n)$ vraie. 4b. donne $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}$. Donc $P(n+1)$ est vraie. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \longrightarrow 0$. Donc u converge vers ℓ (par encadrement).
   (d) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$. Pour avoir $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-3}$, il suffit donc de vérifier $\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant 10^{-3}$. Or $\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant 10^{-3} \iff 2^{n+1} \geqslant 10^3 \iff \ln(2^{n+1}) \geqslant \ln(10^3) \iff (n+1)\ln(2) \geqslant 3\ln(10) \iff n \geqslant \frac{3\ln(10)}{\ln(2)} - 1$, où on a utilisé la stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln(2) > 0$. Donc $n_0 = \left\lfloor \frac{3\ln(10)}{\ln(2)} \right\rfloor$ convient.
5. D'après l'indication, $h(t) \underset{t\to\ell}{=} \ell + h'(\ell)(t-\ell) + o(t-\ell)$ car $h(\ell) = \ell$. Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_{n+1} = u_{n+1} - \ell = h(u_n) - \ell$. Comme u converge vers ℓ, $h(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} \ell + h'(\ell)(u_n - \ell) + o(u_n - \ell)$. Donc $\varepsilon_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} h'(\ell)\varepsilon_n + o(\varepsilon_n)$, ce qui donne $\varepsilon_{n+1} \sim h'(\ell)\varepsilon_n$. Interprétation : ε_n représente la précision de l'approximation de ℓ par u_n. Cette précision s'améliore d'un facteur $h'(\ell)$ à chaque nouveau terme de la suite.