Relations asymptotiques

Cours de É. Bouchet – PCSI

11 décembre 2024

Table des matières

Dans tout le chapitre, on notera $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble constitué de $\mathbb{R}$, $+\infty$ et $-\infty$. Les fonctions et suites considérées sont à valeurs réelles ou complexes.

1 Relation d'équivalence entre fonctions

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.1 (Fonctions équivalentes au voisinage d'un point)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions définies sur un voisinage V_a de a, telles que g ne s'annule pas sur V_a. On dit que f et g sont **équivalentes au voisinage de** a lorsque $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Exemple. On sait que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, donc $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Exercice 1. Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de $x + e^x$.

Proposition 1.2 (Transitivité des équivalents)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et f, g et h trois fonctions définies au voisinage de a. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$.

Proposition 1.3 (Équivalents et limites)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et f et g deux fonctions définies au voisinage de a.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et si $\lim_{x\to a} g(x)$ existe, alors $\lim_{x\to a} f(x)$ existe et ces deux limites sont égales.

Remarque. Attention, le premier résultat ne fonctionne plus si $\ell = 0$. Montrer un équivalent à 0 doit alerter, c'est le plus souvent signe d'une erreur dans l'application de cette propriété.

Proposition 1.4 (Obtention d'un équivalent par encadrement)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et f, g et h trois fonctions définies au voisinage de a. Si $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de a et si $h(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.

Proposition 1.5 (Équivalents et signe de la fonction)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et f et g deux fonctions définies au voisinage de a.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et si g ne s'annule pas au voisinage de a alors f non plus.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et si g est positive au voisinage de a, alors f l'est également.

1.2 Calculs et équivalents usuels

Proposition 1.6 (Produit et quotient d'équivalents)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et f_1, f_2, g_1, g_2 des fonctions définies au voisinage de a. Si $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ et si $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$ alors $(f_1f_2)(x) \underset{x\to a}{\sim} (g_1g_2)(x)$. Si de plus g_2 ne s'annule pas au voisinage de a, alors $\frac{f_1}{f_2}(x) \underset{x\to a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}(x)$.

Proposition 1.7 (Équivalents et passage à la puissance)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et f et g deux fonctions définies au voisinage de a. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $f(x)^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g(x)^\alpha$ dès que les puissances sont bien définies.

Remarque. Ce résultat est en particulier vrai pour toutes les fonctions si $\alpha \in \mathbb{N}$, pour toutes les fonctions ne s'annulant pas au voisinage de a si $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ et pour toutes les fonctions strictement positives au voisinage de a si $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.8 (Équivalents et passage à la valeur absolue)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et f et g deux fonctions définies au voisinage de a. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $|f(x)| \underset{x\to a}{\sim} |g(x)|$.

Proposition 1.9 (Équivalents et composition à droite)

Soit $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. Soit f et g des fonctions définies au voisinage de a et h une fonction définie au voisinage de b. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} h(x) = a$, alors $f(h(x)) \underset{x\to b}{\sim} g(h(x))$.

Remarque. ATTENTION ! Toute autre opération est interdite, notamment la composition à gauche d'un équivalent par une fonction et la somme d'équivalents.

Proposition 1.10 (Équivalents usuels au voisinage de zéro)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ fixé,

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2, \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x,$$

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x^2, \quad \tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Remarque. Par la suite, les développements limités fourniront un moyen plus rapide de retrouver ces résultats.

Remarque. Écrire $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x$ sont deux choses très différentes (on a de la chance qu'elles soient vraies toutes les deux, puisqu'il est interdit de sommer des équivalents et donc de rajouter $+1$ des deux côtés). La première relation donne la vitesse à laquelle exponentielle converge vers 1 en 0. La deuxième signifie seulement que $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$ (puisque $\lim_{x\to 0} \frac{1+x}{1} = 1$), ce qui donne la limite, mais pas la vitesse de convergence.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x^2}$. Déterminer un équivalent de f au voisinage de 0.

Exercice 3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Déterminer un équivalent de g au voisinage de $+\infty$.

1.3 Adaptation au cas des suites

Définition 1.11 (Suites équivalentes)

Soit u et v deux suites. Si v ne s'annule pas à partir d'un certain rang, on dit que les suites u et v sont équivalentes quand $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. On note alors $u_n \sim v_n$.

Remarque. On peut aussi écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, mais comme la limite d'une suite s'effectue toujours en $+\infty$, la précision est superflue.

Remarque. Les propriétés sont les mêmes que dans le cas des fonctions : transitivité, gestion des limites, conservation du signe, possibilité de réaliser des produits/quotients, de passer à la puissance α ou de composer à droite. ATTENTION ! Toute autre opération sur les équivalents est interdite, notamment la composition à gauche et la somme.

Exercice 4. Calculer la limite de la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 5. Calculer la limite de la suite définie pour $n \geqslant 3$ par $u_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{3n}$.

Exercice 6. Soit $k \in \mathbb{N}$ (fixé). Montrer que $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$.

2 Relations de domination et de négligeabilité entre fonctions

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2.1 (Fonction négligeable devant une autre fonction)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions définies sur un voisinage V_a de a, telles que g ne s'annule pas sur V_a. On dit que f est **négligeable devant** g au voisinage de a lorsque $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. On note alors $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$.

Définition 2.2 (Fonction dominée par une autre fonction)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions définies sur un voisinage V_a de a, telles que g ne s'annule pas sur V_a. On dit que f est **dominée par** g au voisinage de a lorsque $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a. On note alors $f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x))$.

Exemple. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^4} = 0$, donc $x^2 \underset{x \to +\infty}{=} o(x^4)$. À l'inverse, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4}{x^2} = 0$, donc $x^4 \underset{x \to 0}{=} o(x^2)$.
D'autre part, $\dfrac{5x^4 + x}{x^4}$ est borné au voisinage de $+\infty$ (puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4 + x}{x^4} = 5$), donc $5x^4 + x \underset{x \to +\infty}{=} O(x^4)$.

Remarque. Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ ou $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$, alors $f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x))$. En effet, si $\frac{f(x)}{g(x)}$ admet une limite finie en a, elle est bornée au voisinage de ce point. La réciproque est par contre fausse.

Proposition 2.3 (Comparaisons avec 1)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction définie au voisinage de a.

$$f(x) \underset{x \to a}{=} o(1) \iff \lim_{x \to a} f(x) = 0,$$
$$f(x) \underset{x \to a}{=} O(1) \iff f \text{ est bornée au voisinage de } a.$$

Exercice 7. Simplifier au maximum la relation $o(1) + O(1)$ (pour $x \to 0$), en restant le plus précis possible.

Exercice 8. Simplifier au maximum la relation $O(1) - O(1)$ (pour $x \to 0$), en restant le plus précis possible.

Proposition 2.4 (Lien entre équivalence et négligeabilité)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions définies au voisinage de a. Alors :

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \iff f(x) - g(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x)).$$

Remarque. Dans un souci de simplification des calculs et des écritures, on peut écrire $f(x) \underset{x \to a}{=} g(x) + o(g(x))$ en lieu et place de $f(x) - g(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$.

Remarque. Ce résultat est extrêmement utile pour contourner l'interdiction de sommer des équivalences, d'autant plus que les développements limités fourniront un moyen facile d'obtenir des relations exploitables.

Exemple. On admet pour le moment que $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(\frac{x^2}{2})$. Alors $e^x - 1 - x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

Dans la suite, on se concentrera sur l'étude des négligeabilités (davantage utilisées), mais les résultats suivants restent valables si on remplace les o par des O dans leurs énoncés.

Proposition 2.5 (Équivalents dans une négligeabilité)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g, h des fonctions définies au voisinage de a. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$.

Exercice 9. Simplifier au maximum la relation $o(x^2 + 2x)$ (pour $x \to +\infty$), en restant le plus précis possible.

Proposition 2.6 (Transitivité des fonctions négligeables)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g et h trois fonctions définies au voisinage de a. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$ alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$.

2.2 Calculs et relations classiques

Proposition 2.7 (Somme de fonctions négligeables)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f_1, f_2, g des fonctions définies au voisinage de a. Si $f_1(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ alors $f_1(x) + f_2(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$.

Exercice 10. Simplifier au maximum la relation $o(x) + o(x^2)$ (pour $x \to 0$), en restant le plus précis possible.

Proposition 2.8 (Produit de fonctions négligeables)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f_1, f_2, g_1, g_2 des fonctions définies au voisinage de a.
Si $f_1(x) \underset{x\to a}{=} o(g_1(x))$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{=} o(g_2(x))$ alors $f_1(x)f_2(x) \underset{x\to a}{=} o(g_1(x)g_2(x))$.

Remarque. On montre de même que si f, g et h sont définies au voisinage de a et si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, alors on a aussi $f(x)h(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)h(x))$.

Remarque. Il est par contre interdit de quotienter des relations de négligeabilité (puisque l'inverse d'un terme qui converge vers 0 diverge).

Proposition 2.9 (Cas d'une constante multiplicative)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, λ une constante et f, g des fonctions définies au voisinage de a.
Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, alors $\lambda f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$.

Exemple. $o(2x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$.

Proposition 2.10 (Fonctions négligeables et passage à la puissance)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions définies au voisinage de a. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ alors $f(x)^\alpha \underset{x\to a}{=} o(g(x)^\alpha)$ dès que les puissances sont bien définies.

Remarque. Attention : contrairement au cas des équivalences, il faut $\alpha > 0$ pour que cela fonctionne.

Remarque. Comme dans le cas des fonctions équivalentes, ce résultat permet de passer à la valeur absolue dans des relations de négligeabilité.

Proposition 2.11 (Fonctions négligeables et composition à droite)

Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. Soit f et g des fonctions définies au voisinage de a et h une fonction définie au voisinage de b. Si $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ et $\lim\limits_{x \to b} h(x) = a$, alors $f(h(x)) \underset{x \to b}{=} o(g(h(x)))$.

Remarque. La composition à gauche est toujours interdite.

Proposition 2.12 (Négligeabilités classiques)

Soit α, β, a et b des réels. Alors :

$$\begin{aligned}
x^\alpha &\underset{x \to +\infty}{=} o(x^\beta) && \text{lorsque } \alpha < \beta, \\
x^\beta &\underset{x \to 0}{=} o(x^\alpha) && \text{lorsque } \alpha < \beta, \\
(\ln(x))^\beta &\underset{x \to +\infty}{=} o(x^\alpha) && \text{lorsque } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0, \\
(\ln |x|)^\beta &\underset{x \to 0}{=} o(\tfrac{1}{x^\alpha}) && \text{lorsque } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0, \\
x^\alpha &\underset{x \to +\infty}{=} o(a^x) && \text{lorsque } \alpha > 0 \text{ et } a > 1, \\
a^x &\underset{x \to +\infty}{=} o(b^x) && \text{lorsque } |a| < |b|.
\end{aligned}$$

2.3 Adaptation au cas des suites

Définition 2.13 (Suites négligeables)

Soit u et v deux suites. On suppose que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que u est **négligeable** devant v lorsque $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$. On note alors $u_n = o(v_n)$.

Définition 2.14 (Suites dominées)

Soit u et v deux suites. On suppose que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que u est **dominée** par v lorsque $\dfrac{u}{v}$ est bornée. On note alors $u_n = O(v_n)$.

Remarque. Les propriétés sont les mêmes que dans le cas des fonctions : comparaison à 1, relation entre équivalences et négligeabilité, transitivité, possibilité de réaliser des sommes/produits, de passer à la puissance $\alpha > 0$ ou de composer à droite.
ATTENTION ! Toute autre opération est interdite, notamment la composition à gauche et le quotient.

Exercice 11. Soit (u_n) une suite qui vérifie $u_n = -2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n \ln(n)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Déterminer les limites de (u_n), $((u_n + 2)n)$ et $\left(\left(u_n + 2 - \frac{3}{n}\right) n^2\right)$.