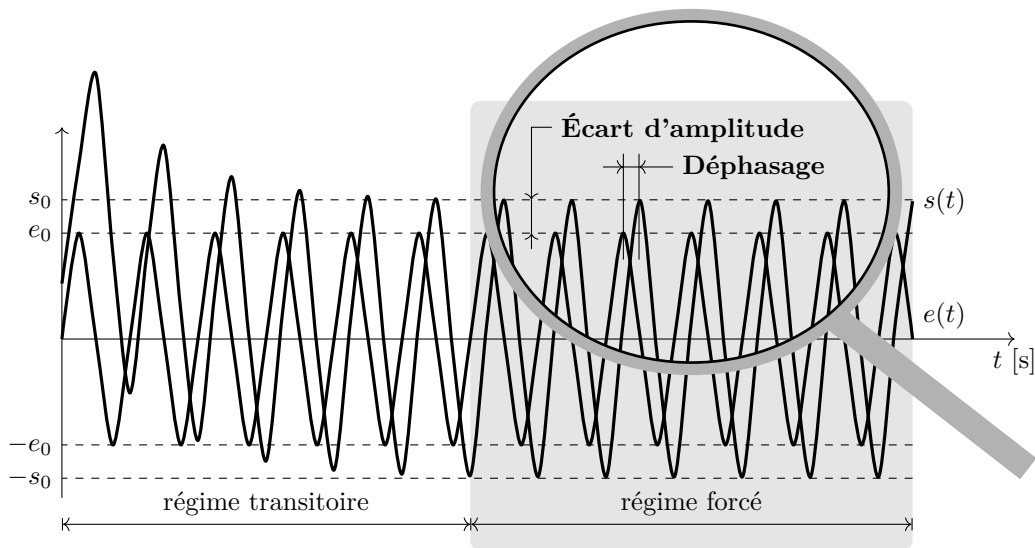


## Analyse harmonique des SLCI



### Objectifs

L'objectif de l'analyse harmonique est d'étudier, pour différentes fréquences d'excitation, le comportement en régime permanent d'un système linéaire continu et invariant asymptotiquement stable soumis à une entrée sinusoïdale dont la réponse forcée sera une sinusoïde de même pulsation propre mais d'amplitude différente et déphasée. Le tracé des lieux de transfert d'un système permet de déterminer rapidement et graphiquement les modulations d'amplitude et de déphasage induites par les différentes fréquences d'excitation. L'analyse des lieux de transfert permet de déterminer les caractéristiques de stabilité d'un système asservi.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Réponse harmonique . . . . .	4
1.2	Analyse harmonique . . . . .	8
1.3	Lieux de transfert . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Représentations harmoniques des transmittances</b>	<b>15</b>
2.1	Gain pur . . . . .	15
2.2	Intégrateur . . . . .	16
2.3	Dérivateur . . . . .	17
2.4	Premier ordre . . . . .	18
2.5	Numérateur d'ordre 1 . . . . .	21
2.6	Second ordre sous-amorti ( $\xi \leq 1$ ) . . . . .	23
2.7	Cas général . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Application à l'étude de la stabilité des systèmes</b>	<b>31</b>



Nicolas Mesnier, lycée Jean Perrin, Lyon  
Compléments & mises à jour sur le site des PCSI

<https://cahier-de-prepa.fr/pcsi-perrin>

— Version du 20 janvier 2025 —

# 1 Introduction

L'objectif de l'analyse harmonique (ou fréquentielle) est d'étudier, pour différentes fréquences  $f$  (ou pulsations  $\omega = 2\pi f$ ) de sollicitations, le comportement en régime permanent d'un système linéaire continu et invariant stable soumis à une entrée sinusoïdale. Par définition, l'analyse harmonique est limitée aux systèmes asymptotiquement stables pour lesquels la notion de régime permanent à un sens.

## Définition 1.1 (Stabilité asymptotique)

Un système linéaire continu et invariant est asymptotiquement stable si sa réponse impulsionnelle tend vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$ .

Pour chaque fréquence, la réponse en régime permanent d'un système asymptotiquement stable est obtenue lorsque tous les phénomènes transitoires ont été amortis (tendent vers 0). Ce régime permanent sera dit *forcé* puisqu'une entrée de forme sinusoïdale « force » la sortie à être aussi de forme sinusoïdale, de même pulsation propre  $\omega$  mais d'amplitude différente et déphasée (figure 1).

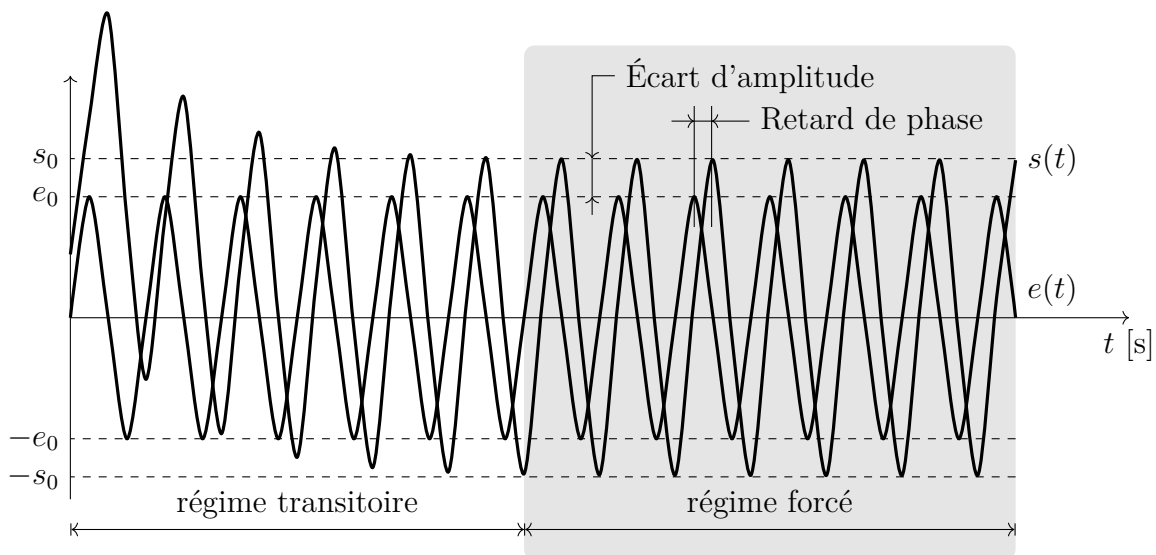


FIGURE 1 – Évolution temporelle de la réponse harmonique d'un SLCI stable.

## Définition 1.2 (Réponse harmonique)

La réponse harmonique d'un système linéaire continu et invariant stable correspond à sa réponse asymptotique forcée (en régime permanent), lorsqu'il est sollicité par un signal d'entrée harmonique du type  $e(t) = e_0 \sin(\omega t) u(t)$  d'amplitude  $e_0$  et de pulsation  $\omega$ .

## Définition 1.3 (Analyse harmonique)

L'analyse harmonique d'un système linéaire continu et invariant stable consiste à analyser ses réponses harmoniques pour l'ensemble des pulsations propres  $\omega \in ]0, +\infty[$  du signal harmonique d'entrée.

## 1.1 Réponse harmonique

Nous allons dans ce qui suit déterminer l'expression générale de la réponse harmonique des systèmes linéaires continus et invariants régis par des équations différentielles à coefficients constants du type :

$$a_0 e(t) + a_1 \frac{de}{dt}(t) + \dots + a_m \frac{d^m e}{dt^m}(t) = b_0 s(t) + b_1 \frac{ds}{dt}(t) + \dots + b_n \frac{d^n s}{dt^n}(t)$$

et vérifiant le principe de causalité des systèmes ( $m \leq n$ ). En supposant, sans pertes de généralités, des conditions initiales nulles, la fonction de transfert des systèmes étudiés s'écrira alors :

$$H(p) = \frac{a_0 + a_1 p + \dots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + \dots + b_n p^n}$$

En notant  $z_i$  chacun des  $m$  zéros du numérateur et  $p_j$  chacun des  $n$  pôles du dénominateur, il est possible de réécrire cette fonction de transfert sous la forme factorisée :

$$H(p) = \frac{a_m \prod_{i=1}^m (p - z_i)}{b_n \prod_{j=1}^n (p - p_j)}$$

Lorsqu'un système est soumis à une entrée de la forme :

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t) u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) = \frac{e_0 \omega}{p^2 + \omega^2}$$

sa réponse dans le domaine de Laplace est :

$$S(p) = H(p) E(p) = e_0 \omega \frac{a_m \prod_{i=1}^m (p - z_i)}{(p^2 + \omega^2) b_n \prod_{j=1}^n (p - p_j)}$$

admettant une décomposition en éléments simples de la forme :

$$S(p) = e_0 \omega \left( \sum_{\text{pôles réels}} \left[ \sum_{i=1}^{\text{multiplicité}} \frac{A_i}{(p - p_j)^i} \right] + \sum_{\substack{\text{paires de pôles} \\ \text{complexes}}} \left[ \sum_{i=1}^{\text{multiplicité}} \frac{B_i p + C_i}{((p - \Re[p_j])^2 + (\Im[p_j])^2)^i} + \frac{\alpha p + \beta}{p^2 + \omega^2} \right] \right)$$

où  $\Re[p_j]$  et  $\Im[p_j]$  sont respectivement les parties réelles et imaginaires du pôle complexe  $p_j$ . On peut remarquer que dans chaque terme associé à un pôle de la fonction de transfert se trouve une expression du type  $(p - \Re[p_j])$  (avec  $\Re[p_j] = p_j$  dans le cas des pôles réels). Or, le théorème d'amortissement, qui s'écrit pour une fonction  $f(t)$

$$\mathcal{L} [f(t) \exp(-at)](p) = \int_0^{+\infty} f(t) \exp(-(p+a)t) dt = F(p+a)$$

peut être utilisé ici pour en déduire que leur simple présence implique que la transformée de Laplace inverse de la fonction dont chaque  $(p - \Re[p_j])$  est l'argument sera multiplié par une exponentielle tel que le comportement asymptotique quand  $t \rightarrow +\infty$  puisse être schématisé par :

$$F(p - \Re[p_j]) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) \exp(\Re[p_j]t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } \Re[p_j] < 0 \\ f(\infty) & \text{si } \Re[p_j] = 0 \\ \infty & \text{si } \Re[p_j] > 0 \end{cases}$$

À partir de cette analyse, on peut en déduire que chaque terme en  $(p - \Re[p_j])$ , avec  $\Re[p_j] < 0$ , d'un système stable sera associé dans le domaine temporel à une exponentielle décroissante qui tend vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$ . Ce qui se traduit par le théorème :

**Théorème 1.1 (Système asymptotiquement stable)**

*Un système linéaire continu et invariant est asymptotiquement stable si et seulement si tous ses pôles sont à partie réelle strictement négative.*

Ainsi, si tous les pôles  $p_j$  sont à parties réelles strictement négatives, il est possible de décomposer la réponse du système sous la forme

$$S(p) = S_{\text{libre}}(p) + S_{\text{forcée}}(p)$$

avec une réponse dite « libre »

$$S_{\text{libre}}(p) = e_0 \omega \left( \sum_{\text{pôles réels}} \left[ \sum_{i=1}^{\text{mult.}} \frac{A_i}{(p - p_j)^i} \right] + \sum_{\text{paires de pôles complexes}} \left[ \sum_{i=1}^{\text{mult.}} \frac{B_i p + C_i}{((p - \Re[p_j])^2 + (\Im[p_j])^2)^i} \right] \right)$$

dont l'expression temporelle tend asymptotiquement vers 0 et une réponse dite « forcée »

$$S_{\text{forcée}}(p) = e_0 \omega \left( \frac{\alpha p + \beta}{p^2 + \omega^2} \right) = e_0 \left( \alpha \omega \frac{p}{p^2 + \omega^2} + \beta \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right) .$$

Or, comme pour une analyse harmonique, on cherche la réponse d'un système à une entrée sinusoïdale en régime permanent, le seul terme d'intérêt sera la réponse dite « forcée », admettant comme transformée de Laplace inverse :

$$s_{\text{forcée}}(t) = e_0 (\alpha \omega \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)) u(t)$$

En notant  $\tan(\varphi) = \alpha \omega / \beta$  tel que

$$\cos(\varphi) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 \omega^2 + \beta^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\varphi) = \frac{\alpha \omega}{\sqrt{\alpha^2 \omega^2 + \beta^2}}$$

on peut récrire l'expression temporelle de la réponse forcée comme :

$$\begin{aligned} s_{\text{forcée}}(t) &= e_0 \sqrt{\alpha^2 \omega^2 + \beta^2} (\sin(\varphi) \cos(\omega t) + \cos(\varphi) \sin(\omega t)) u(t) \\ &= e_0 \sqrt{\alpha^2 \omega^2 + \beta^2} \sin(\omega t + \varphi) u(t) \end{aligned}$$

À ce stade, il est nécessaire de déterminer les deux coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ . En remarquant qu'il est possible d'annuler le terme  $(p^2 + \omega^2)$  avec  $p = \pm j\omega$ , il vient le système :

$$\begin{cases} -\alpha j\omega + \beta = \lim_{p \rightarrow -j\omega} (p^2 + \omega^2) \frac{S(p)}{e_0 \omega} = \lim_{p \rightarrow -j\omega} H(p) = H(-j\omega) \\ \alpha j\omega + \beta = \lim_{p \rightarrow j\omega} (p^2 + \omega^2) \frac{S(p)}{e_0 \omega} = \lim_{p \rightarrow j\omega} H(p) = H(j\omega) \end{cases}$$

où l'on reconnaît immédiatement que le terme pris en limite est la fonction de transfert  $H(p)$  évaluée en  $p = \pm j\omega$ . Dès lors, on peut remarquer que  $\beta$  et  $\alpha\omega$  sont respectivement associés à la partie réelle et à la partie imaginaire de la fonction de transfert  $H(j\omega)$

$$\alpha\omega = \Im[H(j\omega)] \quad \text{et} \quad \beta = \Re[H(j\omega)]$$

tel que les termes  $\sqrt{\alpha^2\omega^2 + \beta^2}$  et  $(\alpha\omega/\beta)$  ne soient autres que le module et la tangente de l'argument de  $H(j\omega)$ . Finalement, l'expression de la réponse forcée d'un système asymptotiquement stable soumis à une entrée sinusoïdale peut s'écrire sous la forme générique :

$$s_{\text{forcée}}(t) = e_0 |H(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi) u(t) \quad \text{avec} \quad \varphi = \angle H(j\omega)$$

où l'on voit que c'est aussi une sinusoïde de même pulsation  $\omega$  que le signal d'entrée mais d'amplitude différente car multipliée par le module  $|H(j\omega)|$  de  $H(j\omega)$  et déphasée d'un angle  $\varphi = \angle H(j\omega)$ , appelé l'argument de  $H(j\omega)$ , par rapport à l'entrée. Ce qui nous amène à formuler la proposition :

### **Théorème 1.2 (Réponse harmonique)**

*La réponse asymptotique forcée d'un système linéaire, continu et invariant asymptotiquement stable, de fonction de transfert  $H(p)$  à une entrée sinusoïdale  $e(t) = e_0 \sin(\omega t)u(t)$  est une sinusoïde d'expression :*

$$s_{\text{forcée}}(t) = e_0 |H(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi)u(t)$$

*de même pulsation  $\omega$ , d'amplitude multipliée par le module  $|H(j\omega)|$  et déphasée par l'argument  $\varphi = \angle H(j\omega)$  de la fonction de transfert complexe  $H(j\omega)$ .*

Nous venons de montrer, dans le cas général comprenant toutes les classes de systèmes asymptotiquement stables, que la réponse forcée d'un système asymptotiquement stable soumis à une entrée sinusoïdale est un signal sinusoïdal de même pulsation que le signal d'entrée, mais d'amplitude différente et déphasé par rapport à l'entrée. En particulier, nous avons montré que l'amplitude et le déphasage ne dépendent que de la fonction de transfert du système et qu'il est donc possible de prédire le comportement harmonique d'un système à partir de la seule connaissance de sa fonction de transfert. Bien que la démonstration soit générale, nous allons refaire à titre d'exemple la démonstration dans le cas d'un système du premier ordre.

### Exemple 1.1 (Réponse harmonique d'un système du premier ordre)

Un système du premier ordre est caractérisé par une fonction de transfert du type :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Lorsqu'il est soumis à une entrée de la forme :

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t) u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) = \frac{e_0 \omega}{p^2 + \omega^2}$$

sa réponse dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$S(p) = H(p) E(p) = \frac{K e_0 \omega}{(p^2 + \omega^2)(1 + \tau p)}$$

En décomposant en éléments simples, on obtient :

$$S(p) = \frac{Ap + B}{p^2 + \omega^2} + \frac{C}{1 + \tau p}$$

avec les coefficients :

$$A = \frac{1}{2j\omega} \left[ \lim_{p \rightarrow j\omega} (p^2 + \omega^2) S(p) - \lim_{p \rightarrow -j\omega} (p^2 + \omega^2) S(p) \right] = -\frac{K E_0 \omega \tau}{1 + \tau^2 \omega^2}$$

$$B = \frac{1}{2} \left[ \lim_{p \rightarrow j\omega} (p^2 + \omega^2) S(p) + \lim_{p \rightarrow -j\omega} (p^2 + \omega^2) S(p) \right] = \frac{K E_0 \omega}{1 + \tau^2 \omega^2}$$

$$C = \lim_{p \rightarrow -1/\tau} (1 + \tau p) S(p) = \frac{K E_0 \omega \tau^2}{1 + \tau^2 \omega^2}$$

tels que la réponse s'écrive :

$$S(p) = \frac{K E_0 \omega}{1 + \tau^2 \omega^2} \left( \frac{1 - \tau p}{p^2 + \omega^2} + \frac{\tau^2}{1 + \tau p} \right)$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$S(p) = \frac{K e_0 \omega}{1 + \tau^2 \omega^2} \left( \frac{\tau}{p + 1/\tau} + \frac{1}{\omega} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} - \tau \frac{p}{p^2 + \omega^2} \right)$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse, on obtient l'expression de la réponse temporelle du système :

$$s(t) = \frac{K e_0 \omega}{1 + \tau^2 \omega^2} \left( \underbrace{\tau e^{-t/\tau}}_{\text{régime transitoire}} + \underbrace{\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) - \tau \cos(\omega t)}_{\text{régime forcé}} \right) u(t)$$

Cette réponse est composée de deux parties :

- une réponse dite « libre » associée au régime transitoire et dont l'influence opère tant que  $t$  est de l'ordre de la constante de temps  $\tau$  du système et qui disparaît lorsque  $t \rightarrow +\infty$  car  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t/\tau} = 0$ ;
- une réponse dite « forcée » associée au régime permanent forcé quand  $t \gg \tau$  (en pratique dès que  $t \geq 5\tau$ ) :

$$s_{\text{forcée}}(t) = \frac{K e_0}{1 + \tau^2 \omega^2} (\sin(\omega t) - \tau \omega \cos(\omega t)) u(t)$$

En posant  $\tan(\varphi) = -\tau \omega$ , où  $\varphi = \angle H(j\omega)$  est l'argument de la fonction de transfert complexe  $H(j\omega)$ , tel que  $\cos(\varphi) = 1/\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \geq 0$  et  $\sin(\varphi) = -\tau \omega/\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \leq 0$ , l'expression de la réponse en régime forcé peut se récrire sous la forme :

$$s_{\text{forcée}}(t) = \frac{K e_0}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi) u(t)$$

En notant que le module de la fonction de transfert complexe  $H(j\omega)$  s'écrit :

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}$$

il vient l'expression de la réponse en régime forcé :

$$s_{\text{forcée}}(t) = e_0 |H(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi) u(t)$$

## 1.2 Analyse harmonique

Dans ce qui précède, nous avons montré que la réponse harmonique d'un système linéaire, continu et invariant asymptotiquement stable est une fonction harmonique de même pulsation propre  $\omega$  que le signal d'entrée, simplement amplifiée ou atténuée et déphasée. Or, dans le cas de signaux sinusoïdaux, la variable de Laplace se limite à un imaginaire pur  $p = j\omega$ , où  $\omega$  est la pulsation propre du signal sinusoïdal appliqué. La transformée de Laplace devient alors la transformée de Fourier

$$H(j\omega) = \int_0^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

et la fonction de transfert  $H(p)$ , correspondant à la réponse impulsionnelle  $h(t)$  d'un système, se limite à la fonction de transfert complexe  $H(j\omega)$ .

### Définition 1.4 (Fonction de transfert complexe)

On appelle fonction de transfert complexe ou transmittance isochrone l'expression  $H(j\omega)$  d'une fonction de transfert  $H(p)$  dans le cas où la variable complexe de Laplace  $p = j\omega$  est un imaginaire pur. On la notera :

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \exp(j\varphi(\omega))$$



avec  $|H(j\omega)|$  le module et  $\varphi(\omega) = \angle H(j\omega)$  l'argument, respectivement définis à partir des parties réelle et imaginaire comme :

$$\begin{aligned} \text{Module : } |H(j\omega)| &= \sqrt{\Re [H(j\omega)]^2 + \Im [H(j\omega)]^2} \\ \text{Argument : } \angle H(j\omega) \text{ tel que } &\begin{cases} \cos(\angle H(j\omega)) = \frac{\Re [H(j\omega)]}{|H(j\omega)|} \\ \sin(\angle H(j\omega)) = \frac{\Im [H(j\omega)]}{|H(j\omega)|} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour une pulsation propre d'excitation  $\omega$  donnée, le point  $H(j\omega)$  peut être représenté dans le plan complexe par ses coordonnées polaires  $|H(j\omega)|$  et  $\angle H(j\omega)$  qui sont respectivement son rayon et son angle (figure 2).

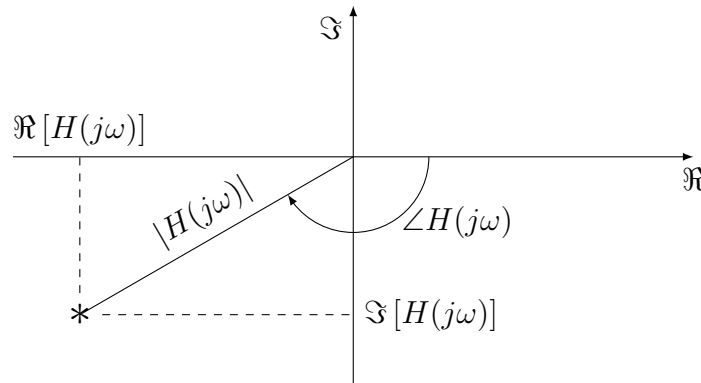


FIGURE 2 – Représentation dans le plan complexe d'un point associé à une fonction de transfert complexe  $H(j\omega)$  pour une pulsation donnée.

### Remarque 1.1 (Calcul de l'argument)

Pour calculer l'argument d'une fonction de transfert complexe, il est indispensable de déterminer le quadrant du plan complexe dans lequel se situe chaque point de  $H(j\omega)$  associé à une pulsation propre d'excitation donnée (figure 2). La détermination du quadrant se fait à partir des signes des parties réelle et imaginaire respectivement associés à ceux du cosinus et du sinus de l'argument recherché. Une fois le quadrant déterminé, il est possible d'utiliser la fonction arctangente

$$\angle H(j\omega) \equiv \text{Arctan} \left( \frac{\Im [H(j\omega)]}{\Re [H(j\omega)]} \right) [\pi]$$

en veillant au *modulo*  $\pi$  dans la détermination de l'angle.

### Exemple 1.2 (Réponse harmonique d'un système du premier ordre)

La réponse forcée d'un système du premier ordre de fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{4}{1 + 0,2 p}$$

soumis à une entrée sinusoïdale d'amplitude 3 et de pulsation  $2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  de la forme :

$$e(t) = 3 \sin(2t) u(t)$$

s'écrit :

$$s_{\text{forcée}}(t) = 3 \times |H(2j)| \times \sin(2t + \angle H(2j))$$

Avec la valeur du module :

$$|H(2j)| = \frac{|4|}{|1 + 0,2 \times 2j|} = \frac{4}{\sqrt{1 + 0,4^2}} = \frac{20}{\sqrt{29}} \approx 3,7$$

et celle de l'argument :

$$\angle H(2j) = \angle 4 - \angle(1 + 0,2 \times 2j) \equiv -\text{Arctan}(0,4) [2\pi] \approx -0,38 [2\pi]$$

on trouve l'expression du signal de la réponse forcée :

$$s_{\text{forcée}}(t) = 3 \cdot 3,7 \sin(2t - 0,38) = 11,1 \sin(2[t - 0,19])$$

qui correspond à un sinus de pulsation  $2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , d'amplitude 11,1, c'est-à-dire  $|H(2j)| = 3,7$  fois celle de  $e(t)$ , et en retard de 0,19 s sur le signal d'entrée car  $-\pi < \angle H(2j) < 0$ . L'entrée  $e(t)$  et la réponse forcée  $s_{\text{forcée}}(t)$  sont tracées sur la figure 3.

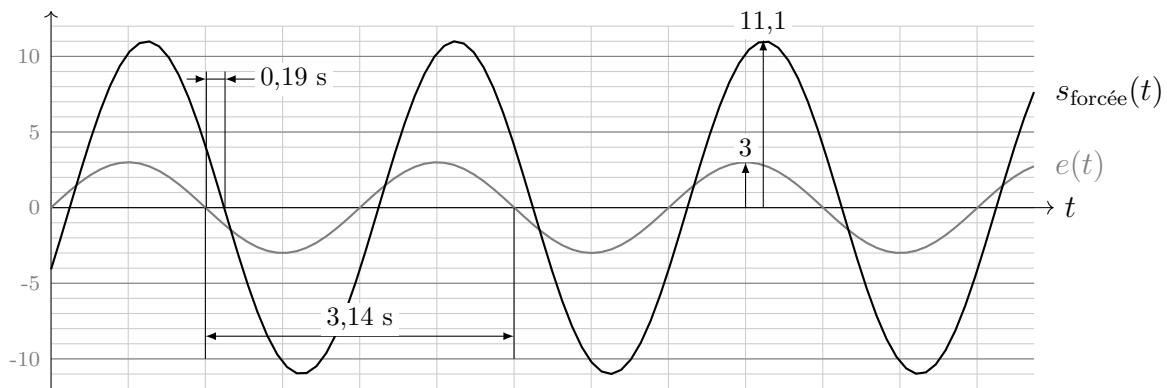


FIGURE 3 – Exemple de réponse forcée d'un système du premier ordre.

Partant de la réponse forcée d'un système, il est possible de déterminer, à partir de la période du signal  $T$ , sa pulsation  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  ; ici  $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Le décalage temporel de la réponse par rapport à l'entrée  $d$ , permet de déterminer l'argument  $\varphi = \omega d$  ; ici  $\varphi = 2 \times -0,19 = -0,38 \text{ rad}$  avec  $d < 0$  car la sortie est « en retard » sur l'entrée. Enfin, le rapport entre l'amplitude de la sortie et celle de l'entrée permet de déterminer le module ; ici  $|H(2j)| = \frac{11,1}{3} = 3,7$ .

**Remarque 1.2 (Module et argument d'une fraction rationnelle)**

Le module et l'argument de  $H(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$  peuvent être simplement déterminés à partir de :

$$|H(j\omega)| = \frac{|N(j\omega)|}{|D(j\omega)|} \quad \text{et} \quad \angle H(j\omega) \equiv \angle N(j\omega) - \angle D(j\omega) [2\pi]$$

L'analyse harmonique d'un système linéaire continu et invariant asymptotiquement stable consiste à étudier l'évolution du module et de l'argument de sa fonction de transfert complexe  $H(j\omega)$  en fonction de la pulsation propre du signal d'entrée  $\omega \in ]0, +\infty[$ . Cette étude permet de connaître le comportement d'un système pour chaque fréquence d'excitation (d'entrée) et ainsi de prédire sa réponse harmonique pour une entrée donnée.

**1.3 Lieux de transfert**

Pour étudier la façon dont la fonction de transfert complexe d'un système intervient dans le déphasage et la modification d'amplitude du signal de sortie pour différentes pulsations propres du signal d'entrée  $\omega \in ]0, +\infty[$ , il est habituel d'utiliser une représentation graphique.

**Définition 1.5 (Lieux de transfert)**

On appelle lieux de transfert, le tracé des différentes représentations graphiques de la fonction de transfert complexe  $H(j\omega)$  d'un système pour toutes les pulsations d'excitation possibles.

Sont principalement utilisés en ingénierie :

- les diagrammes de Bode ;
- le diagramme de Black (courbe paramétrée en  $\omega$  dans le plan  $(\varphi(\omega), |H(j\omega)|_{\text{dB}})$ , hors programme) ;
- le diagramme de Nyquist (courbe paramétrée en  $\omega$  dans le plan complexe, hors programme).

**1.3.1 Diagrammes de Bode**

La représentation des lieux de transfert dans les diagrammes de Bode est constituée de deux graphes respectivement associés au gain  $|H(j\omega)|_{\text{dB}}$  exprimé en décibel (dB) et à la phase  $\varphi(\omega)$  exprimée en degrés ou en radians :

$$\begin{cases} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log (|H(j\omega)|) \\ \varphi(\omega) \equiv \angle H(j\omega) [2\pi] \end{cases}$$

tracés en fonction de la pulsation propre du signal d'entrée  $\omega \in ]0; +\infty[$  sur une échelle logarithmique.

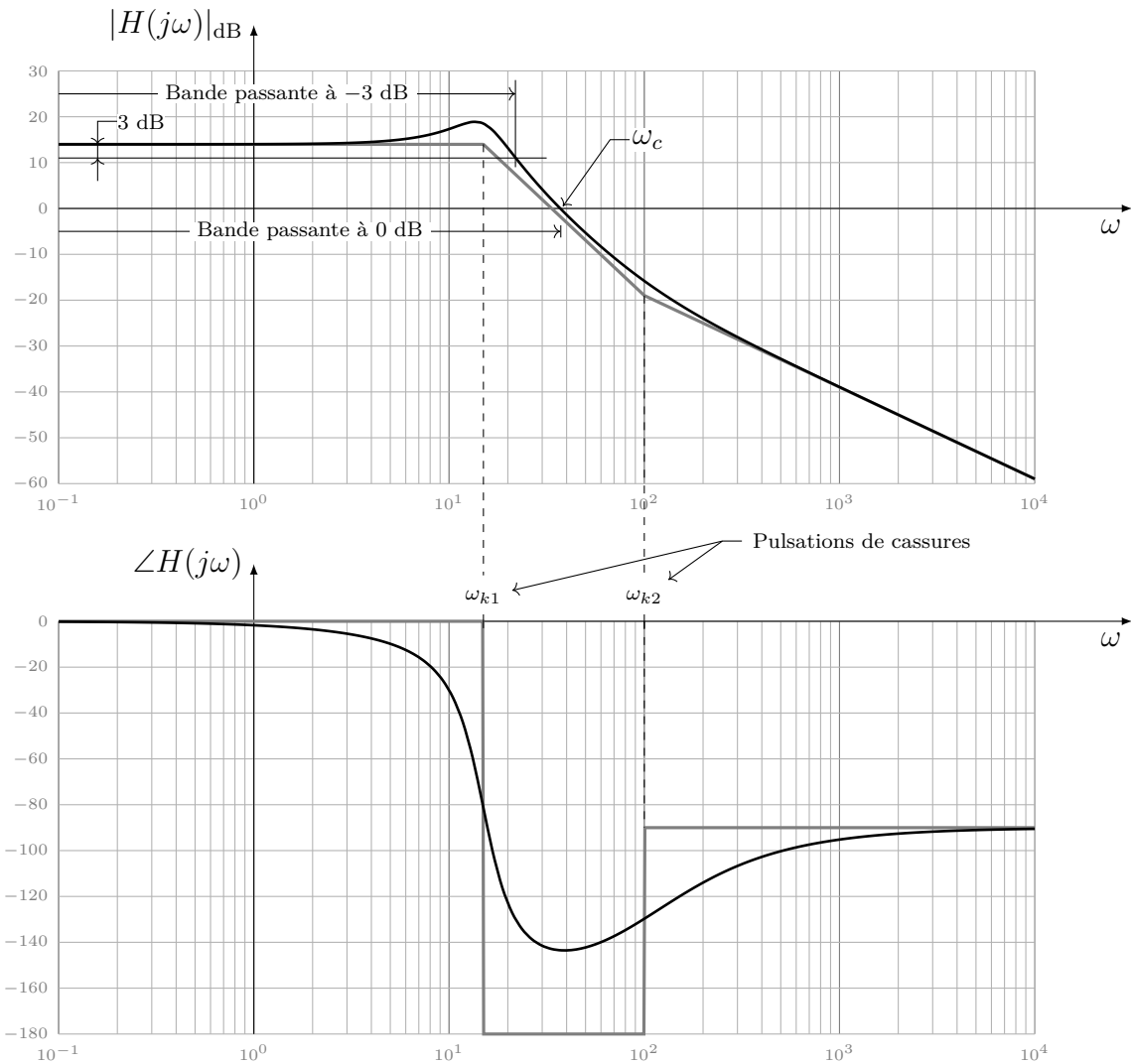


FIGURE 4 – Exemple de diagrammes de Bode.

**Remarque 1.3 (Module en décibel)**

La représentation du module en décibel, appelé le gain, a été introduite dans les années 1920 par les laboratoires Bell pour caractériser l'atténuation des signaux dans les câbles. L'intérêt majeur qu'elle présente dans le cadre de l'étude des réponses harmoniques est qu'un gain positif ( $>0$  dB) caractérisera toujours une amplification du signal d'entrée par le système alors qu'un gain négatif témoignera d'une atténuation.

TABLE 1 – Équivalences entre module et gain en décibel.

$ H $	1/100	1/10	1/2	$1/\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	10	100
$ H _{\text{dB}}$	-40	-20	-6	-3	0	3	6	20	40

**Tracé expérimental** Si un système est asymptotiquement stable, ses diagrammes de Bode peuvent s'obtenir expérimentalement (jusqu'à une certaine fréquence au-delà de laquelle les instruments sont inutilisables). À chaque essai doit correspondre une pulsation (ou fréquence) propre d'excitation  $\omega$  qui permettra de placer un point sur le tracé du gain et un point sur le tracé de la phase. Le gain sera déterminé en faisant «  $20 \log$  » du rapport des amplitudes du signal de sortie en régime forcé  $s_{\text{forcée}}(t)$  et du signal d'entrée  $e(t)$  et la phase sera déterminée à partir du décalage temporel observé (temps en s) multiplié par la pulsation d'excitation (en  $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ) de sorte à obtenir une mesure d'angle comprise entre  $-\pi$  et  $\pi$  (voir figures 1 et 3). Pour obtenir les diagrammes de Bode d'un système, il faudra répéter cette procédure pour différentes pulsations d'excitation. On obtiendra ainsi autant de points (gain et phase) que d'essais réalisés.

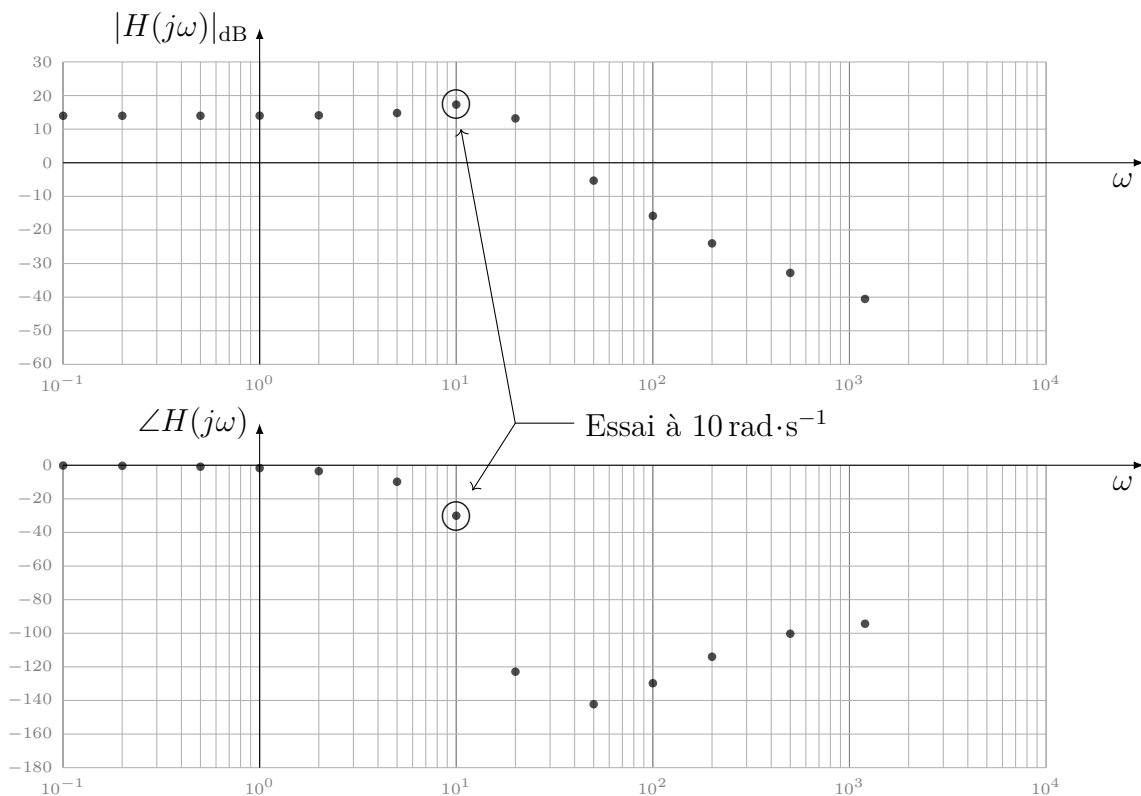


FIGURE 5 – Exemple de tracé expérimental des diagrammes de Bode.

**Propriétés des diagrammes de Bode** Si un système linéaire est décrit par le produit de deux fonctions de transfert

$$H(p) = H_1(p) \times H_2(p)$$

alors la représentation graphique des diagrammes de Bode de l'expression de la fonction de transfert complexe  $H(j\omega)$  sera la superposition des tracés des deux fonctions car :

$$\begin{cases} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log (|H_1(j\omega)| \times |H_2(j\omega)|) = 20 \log (|H_1(j\omega)|) + 20 \log (|H_2(j\omega)|) \\ \angle H(j\omega) \equiv \angle (H_1(j\omega) \times H_2(j\omega)) \equiv \angle H_1(j\omega) + \angle H_2(j\omega) [2\pi] \end{cases}$$

Graphiquement, il suffit donc d'ajouter les diagrammes de Bode des fonctions  $H_1(j\omega)$  et  $H_2(j\omega)$  aussi bien pour le diagramme de gain que pour le diagramme de phase.

**Tracé asymptotique** On superpose en général au tracé exact le tracé asymptotique. Ce tracé est souvent suffisant pour analyser la fonction.

**Définition 1.6 (Pulsation de cassure)**

On appelle pulsation de cassure toute pulsation propre d'excitation pour laquelle les asymptotes du tracé du gain se croisent (la cassure étant un changement de pente).

**Analyse des diagrammes de Bode** L'étude des lieux de Bode d'un système permet de caractériser son comportement global (passe bas, passe bande, résonance, etc.). Pour ce faire, on définit plusieurs notions.

**Définition 1.7 (Pulsation de coupure)**

On appelle pulsation de coupure toute pulsation propre d'excitation pour laquelle le module est unitaire ( $|H(j\omega_c)| = 1$ ) ou le gain nul ; soit :

$$\omega_c \text{ telle que } |H(j\omega_c)|_{\text{dB}} = 0 \text{ dB}$$

Lorsqu'un système est excité à une de ses pulsations de coupure, l'amplitude de sa réponse est identique à celle du signal d'entrée.

**Définition 1.8 (Bande passante)**

On appelle bande passante à 0 dB l'ensemble des pulsations d'excitation pour lesquelles la réponse harmonique du système est amplifiée, c'est-à-dire telle que  $|H(j\omega)| \geq 1$ .

$$\{ \omega \mid |H(j\omega)|_{\text{dB}} \geq 0 \text{ dB} \}$$

Une bande passante peut être délimitée par une ou deux pulsations de coupure. Un système complexe peut posséder plusieurs bandes passantes. Si un système ne possède qu'une bande passante (à 0 dB), comme c'est le cas de la plupart des systèmes rencontrés en sciences industrielles de l'ingénieur, alors on qualifiera son comportement – par analogie avec le traitement analogique des signaux en sciences physiques – de filtre passe-bas, passe-bande ou passe-haut (figure 6).

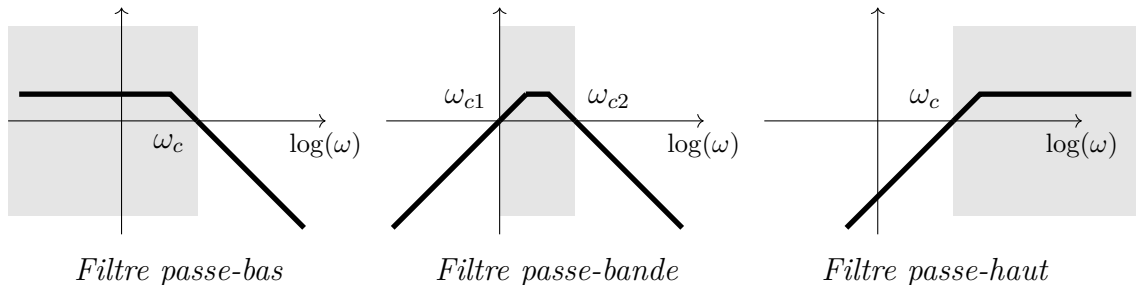


FIGURE 6 – Diagrammes de gain des filtres élémentaires.

### Définition 1.9 (Bande passante à $-3$ dB)

On appelle bande passante à  $-3$  dB l'ensemble des pulsations d'excitation

$$\left\{ \omega \mid |H(j\omega)|_{\text{dB}} \geq \max(|H(j\omega)|_{\text{dB}}) - 3 \text{ dB} \right\}$$

telles que le gain soit supérieur au gain maximum (hors résonance) moins trois décibels.

## 2 Représentations harmoniques des transmittances

Dans tout ce qui suit,  $K > 0$  désignera un gain pur.

### 2.1 Gain pur

La fonction de transfert d'un gain pur s'écrit :

$$H(p) = K \implies H(j\omega) = K$$

avec une expression complexe de partie imaginaire nulle. On en déduit, pour toute pulsation propre d'excitation  $\omega \in ]0; +\infty[$ , l'expression du module (ou du gain) et de la phase :

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = K \\ \angle H(j\omega) \equiv 0 [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(K) \\ \angle H(j\omega) \equiv 0 [2\pi] \end{cases}$$

Les diagrammes de Bode d'un gain pur sont constitués d'un graphe de gain constant et d'un graphe de phase nulle (figure 7).

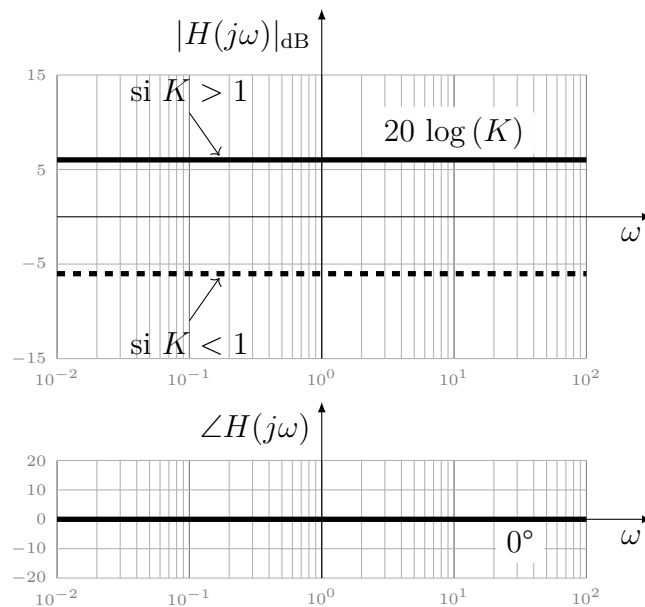


FIGURE 7 – Diagrammes de Bode d'un gain pur.

## 2.2 Intégrateur

La fonction de transfert d'un intégrateur s'écrit :

$$H(p) = \frac{1}{p} \implies H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{-j}{\omega}$$

avec une expression complexe de partie réelle nulle et de partie imaginaire négative. On en déduit, pour toute pulsation propre d'excitation  $\omega \in ]0; +\infty[$ , l'expression du module (ou du gain) et de la phase :

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \\ \sin(\angle H(j\omega)) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log(\omega) \\ \angle H(j\omega) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

Les diagrammes de Bode d'un intégrateur sont constitués d'un graphe de gain de pente :

$$|H(j10\omega)|_{\text{dB}} - |H(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log(10\omega) + 20 \log(\omega) = -20 \log(10) = -20 \text{ dB/décade}$$

et d'un graphe de phase constante à  $-90^\circ$  (figure 8).

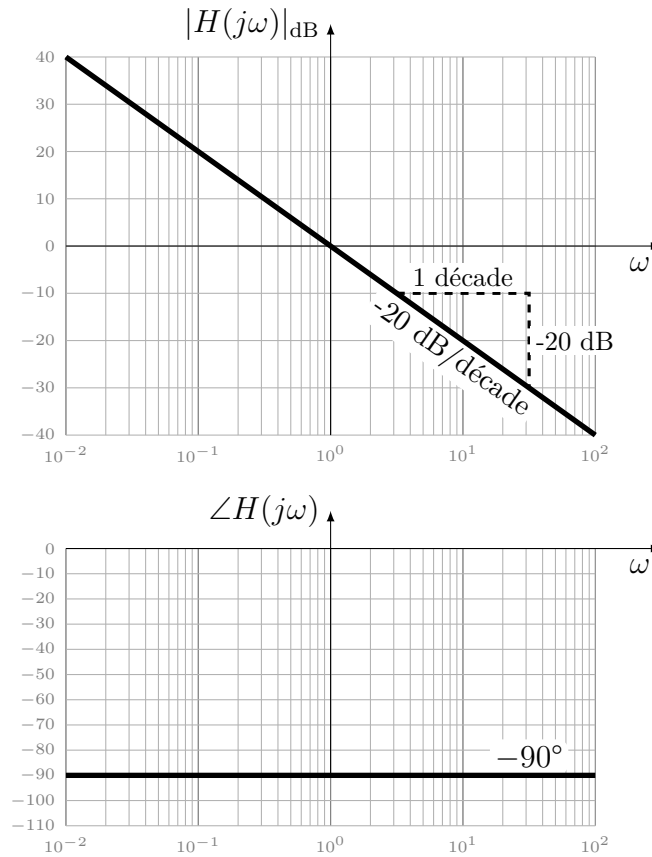


FIGURE 8 – Diagrammes de Bode d'un intégrateur.



## 2.3 Dérivateur

La fonction de transfert d'un dérivateur s'écrit :

$$H(p) = p \implies H(j\omega) = j\omega$$

avec une expression complexe de partie réelle nulle et de partie imaginaire positive. On en déduit, pour toute pulsation propre d'excitation  $\omega \in ]0; +\infty[$ , l'expression du module (ou du gain) et de la phase :

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = \omega \\ \sin(\angle H(j\omega)) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(\omega) \\ \angle H(j\omega) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

Les diagrammes de Bode d'un dérivateur sont constitués d'un graphe de gain de pente

$$|H(j10\omega)|_{\text{dB}} - |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(10\omega) - 20 \log(\omega) = 20 \log(10) = 20 \text{ dB/décade}$$

et d'un graphe de phase constante à  $+90^\circ$  (figure 9).

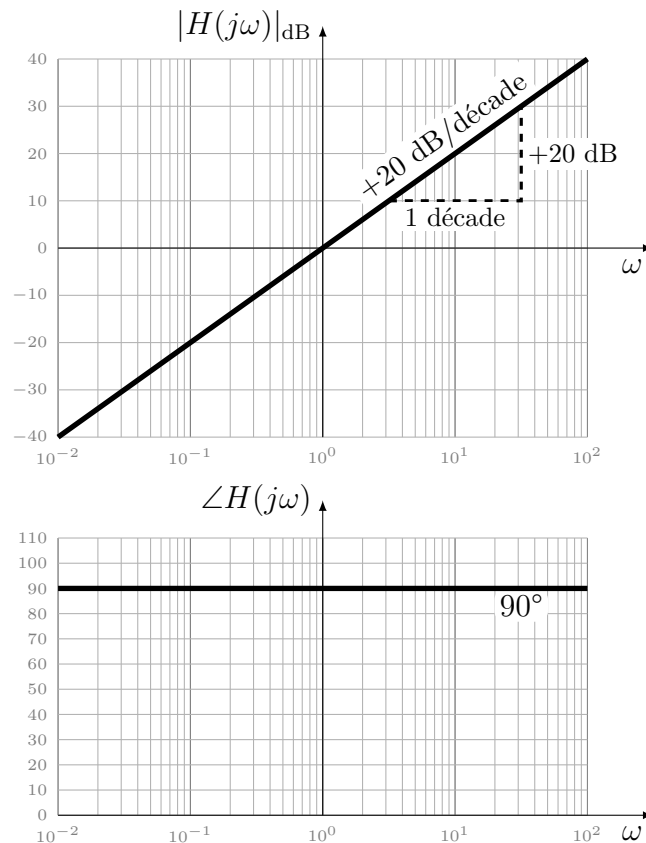


FIGURE 9 – Diagrammes de Bode d'un dérivateur.

## 2.4 Premier ordre

La fonction de transfert d'un premier ordre s'écrit :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \implies H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau j\omega} = K \frac{1 - j\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2}$$

telle que son expression complexe soit constituée des parties réelle et imaginaire :

$$\Re[H(j\omega)] = \frac{K}{1 + \tau^2\omega^2} > 0 \quad \text{et} \quad \Im[H(j\omega)] = \frac{-K\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2} < 0.$$

Comme la partie réelle est positive et la partie imaginaire est négative, l'argument sera compris entre  $-\pi/2$  et 0. Il est donc possible d'utiliser directement la fonction arc tangente pour déterminer l'argument. On en déduit, pour toute pulsation propre d'excitation  $\omega \in ]0; +\infty[$ , l'expression du module (ou du gain) et de la phase :

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \iff |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(K) - 20 \log(\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}) \\ \angle H(j\omega) \equiv -\text{Arctan}(\tau\omega) [2\pi] \end{cases}$$

D'après l'expression du gain, on peut remarquer que le comportement harmonique d'un système du premier ordre dépend de trois gammes de pulsations :

### Comportement basse fréquence ( $\omega \rightarrow 0$ )

On parle de comportement basse fréquence d'un premier ordre lorsque la pulsation propre d'excitation tend vers zéro. Ainsi, pour les très basses fréquences, les expressions du module (ou du gain) et de la phase se limitent à :

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)| = K \iff \lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(K) \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle H(j\omega) \equiv 0 [2\pi] \end{cases}$$

### Comportement haute fréquence ( $\omega \rightarrow +\infty$ )

On parle de comportement haute fréquence d'un premier ordre lorsque la pulsation propre d'excitation tend vers  $+\infty$ . Dans ce cas on a

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \tau^2\omega^2} \simeq \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \tau\omega$$

telle que l'on puisse approcher les expressions du module (ou du gain) et de la phase à haute fréquence par :

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H(j\omega)| \simeq \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{K}{\tau\omega} \iff \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H(j\omega)|_{\text{dB}} \simeq \lim_{\omega \rightarrow +\infty} 20 \log\left(\frac{K}{\tau}\right) - 20 \log(\omega) \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle H(j\omega) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

### Comportement moyenne fréquence ( $\omega \sim 1/\tau$ )

Les asymptotes à basses et à hautes fréquences du module ou du gain se coupent à la pulsation  $\omega_k = 1/\tau$ , dite de cassure. On parle alors de comportement moyenne fréquence d'un premier ordre lorsque la pulsation propre d'excitation est de l'ordre de grandeur de la pulsation de cassure  $1/\tau$ , que l'on note  $\omega \sim 1/\tau$ . On retiendra deux points particuliers autour de la pulsation de cassure :

$\omega$	$ H(j\omega) $	$ H(j\omega) _{\text{dB}}$	$\angle H(j\omega)$	$\angle H(j\omega) (^{\circ})$
$1/2\tau$	$2K/\sqrt{5}$	$20 \log(K) - 1 \text{ dB}$	$\text{Arctan}(-1/2)$	$-26,56^{\circ}$
$1/\tau$	$K/\sqrt{2}$	$20 \log(K) - 3 \text{ dB}$	$\text{Arctan}(-1) = -\pi/4$	$-45^{\circ}$
$2/\tau$	$K/\sqrt{5}$	$20 \log(K) - 7 \text{ dB}$	$\text{Arctan}(-2)$	$-63,43^{\circ}$

**Diagrammes de Bode** Les diagrammes de Bode d'un premier ordre sont constitués d'un graphe de gain et d'un graphe de phase, tous deux variables. D'après les trois gammes de fréquences mises en avant, il est possible de réaliser le tracé asymptotique du gain et de la phase. À basse fréquence ( $\omega \rightarrow 0$ ), le gain et la phase sont constants et admettent chacun une asymptote horizontale d'équation

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(K) \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle H(j\omega) \equiv 0 [2\pi] \end{cases}$$

À haute fréquence ( $\omega \rightarrow +\infty$ ), le gain ne cesse de décroître, suivant une asymptote oblique à partir du point de cassure (de pulsation  $1/\tau$  et de gain  $20 \log(K)$ ) et avec une pente de :

$$|H(j10\omega)|_{\text{dB}} - |H(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log(10\omega) + 20 \log(\omega) = -20 \text{ dB/décade}$$

La phase correspondante atteint une asymptote horizontale à  $-90^{\circ}$ . Entre ces deux gammes de fréquences, on retiendra qu'à la pulsation de cassure  $\omega_k = 1/\tau$ , la courbe du gain passe 3 dB en dessous du tracé asymptotique et que la phase vaut  $-45^{\circ}$ . Les caractéristiques nécessaires au tracé des diagrammes de Bode de la figure 10 sont données dans la table 2.

TABLE 2 – Caractéristiques des diagrammes de Bode d'un système du premier ordre.

$\omega$	$ H(j\omega) _{\text{dB}}$	$\angle H(j\omega)$
$\omega \rightarrow 0$	asymptote horizontale : $20 \log(K)$	asymptote horizontale : $0^{\circ}$
$1/\tau$	$20 \log(K) - 3 \text{ dB}$	$-45^{\circ}$
$\omega \rightarrow +\infty$	asymptote oblique : $20 \log\left(\frac{K}{\tau}\right) - 20 \log(\omega)$	asymptote horizontale : $-90^{\circ}$

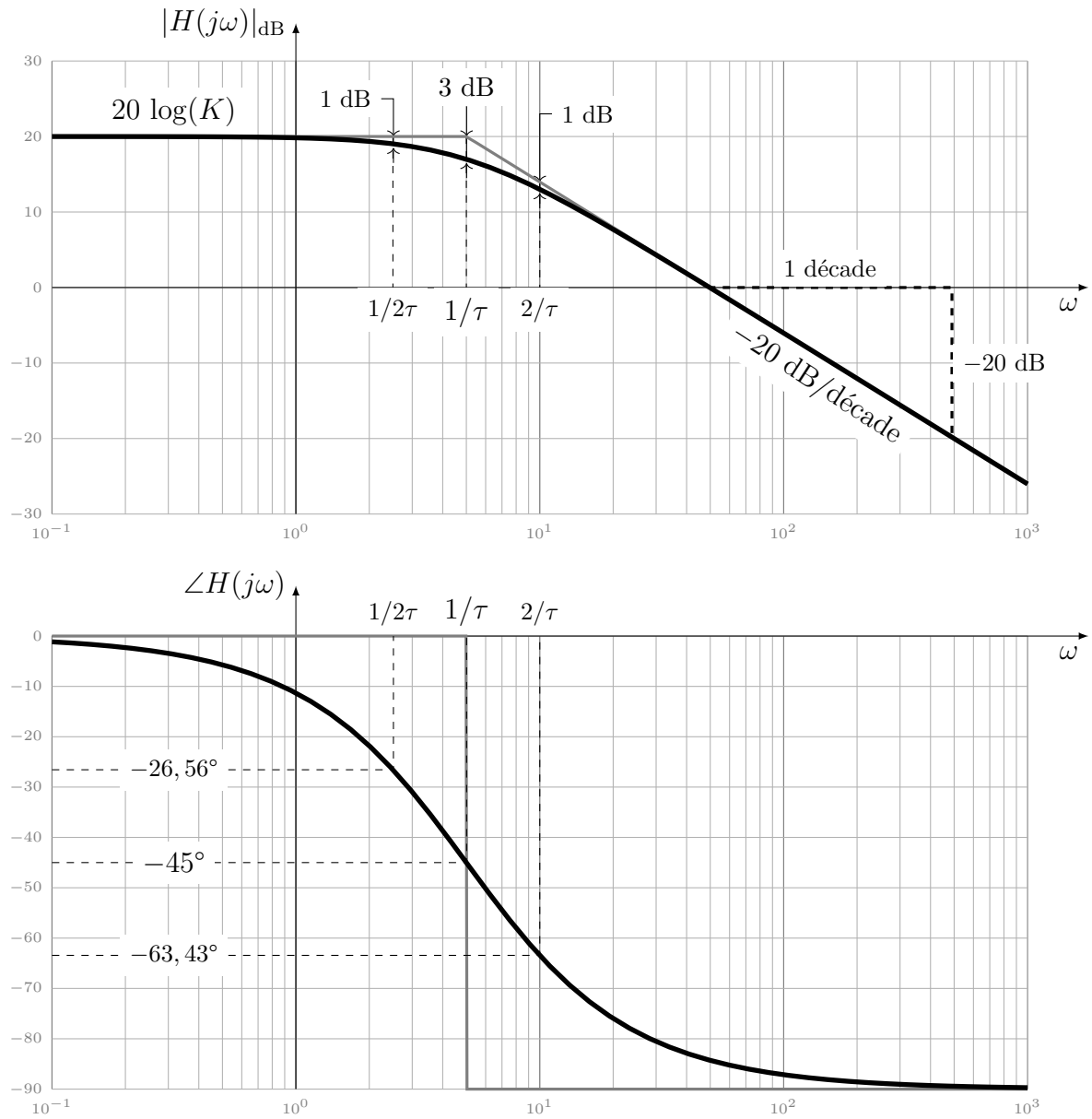


FIGURE 10 – Diagrammes de Bode d'un système du premier ordre avec  $K = 10$  et  $\tau = 0,2$  s.

## 2.5 Numérateur d'ordre 1

La fonction de transfert d'un numérateur d'ordre 1 s'écrit :

$$H(p) = 1 + \tau p \quad \Rightarrow \quad H(j\omega) = 1 + \tau j\omega$$

où les parties réelle et imaginaire de l'expression complexe sont évidentes et toutes deux positives. Elles permettent d'utiliser la fonction arc tangente pour déterminer l'argument, compris entre 0 et  $\pi/2$ . Ainsi, pour toute pulsation propre d'excitation  $\omega \in ]0; +\infty[$ , le module (ou le gain) et l'argument s'écrivent :

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \iff |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}) \\ \angle H(j\omega) \equiv \text{Arctan}(\tau \omega) [2\pi] \end{cases}$$

Comme pour un système du premier ordre, on peut remarquer que le comportement harmonique d'un numérateur d'ordre 1 dépend de trois gammes de pulsations :

### Comportement basse fréquence ( $\omega \rightarrow 0$ )

Lorsque la pulsation propre de l'entrée vérifie  $\omega \rightarrow 0$ , on a  $\lim_{\omega \rightarrow 0}(\tau \omega) = 0$  telle que la partie imaginaire soit nulle et que les expressions du module (ou du gain) et de la phase se limitent à :

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)| = 1 \iff \lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 0 \text{ dB} \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle H(j\omega) \equiv 0 [2\pi] \end{cases}$$

### Comportement haute fréquence ( $\omega \rightarrow +\infty$ )

Lorsque la pulsation propre de l'entrée vérifie  $\omega \rightarrow +\infty$ , on a  $(\tau \omega) \gg 1$  telle que la partie réelle tende vers 0 et permette d'approcher les expressions du module et de la phase par :

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H(j\omega)| \simeq \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \tau \omega \iff \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H(j\omega)|_{\text{dB}} \simeq \lim_{\omega \rightarrow +\infty} 20 \log(\tau) + 20 \log(\omega) \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle H(j\omega) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

### Comportement moyenne fréquence ( $\omega \sim 1/\tau$ )

Lorsque la pulsation propre de l'entrée est de l'ordre de grandeur de la pulsation de cassure  $\omega_k = 1/\tau$ , on retiendra là encore deux points particuliers :

$\omega$	$ H(j\omega) $	$ H(j\omega) _{\text{dB}}$	$\angle H(j\omega)$	$\angle H(j\omega) (^{\circ})$
$1/2\tau$	$\sqrt{5}/2$	1 dB	$\text{Arctan}(1/2)$	$26,56^{\circ}$
$1/\tau$	$\sqrt{2}$	3 dB	$\text{Arctan}(1) = \pi/4$	$45^{\circ}$
$2/\tau$	$\sqrt{5}$	7 dB	$\text{Arctan}(2)$	$63,43^{\circ}$

**Diagrammes de Bode** La construction des diagrammes de Bode d'un numérateur d'ordre 1 reprend la démarche vue pour un système du premier ordre, en particulier en ce qui concerne le tracé asymptotique du gain et de la phase. À basse fréquence ( $\omega \rightarrow 0$ ), le gain et la phase sont constants et admettent chacun une asymptote horizontale. À haute fréquence ( $\omega \rightarrow +\infty$ ), le gain, à la différence d'un premier ordre, ne cesse de croître, suivant une asymptote oblique à partir du point de cassure (de pulsation  $1/\tau$  et de gain nul) et avec une pente de :

$$|H(j10\omega)|_{\text{dB}} - |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(10\omega) - 20 \log(\omega) = +20 \text{ dB/décade}$$

La phase correspondante atteint une asymptote horizontale à  $+90^\circ$ . Entre ces deux gammes de fréquences, on retiendra qu'à la pulsation de cassure  $\omega_k = 1/\tau$ , la courbe du gain passe 3 dB au-dessus du tracé asymptotique et que la phase vaut  $+45^\circ$ .

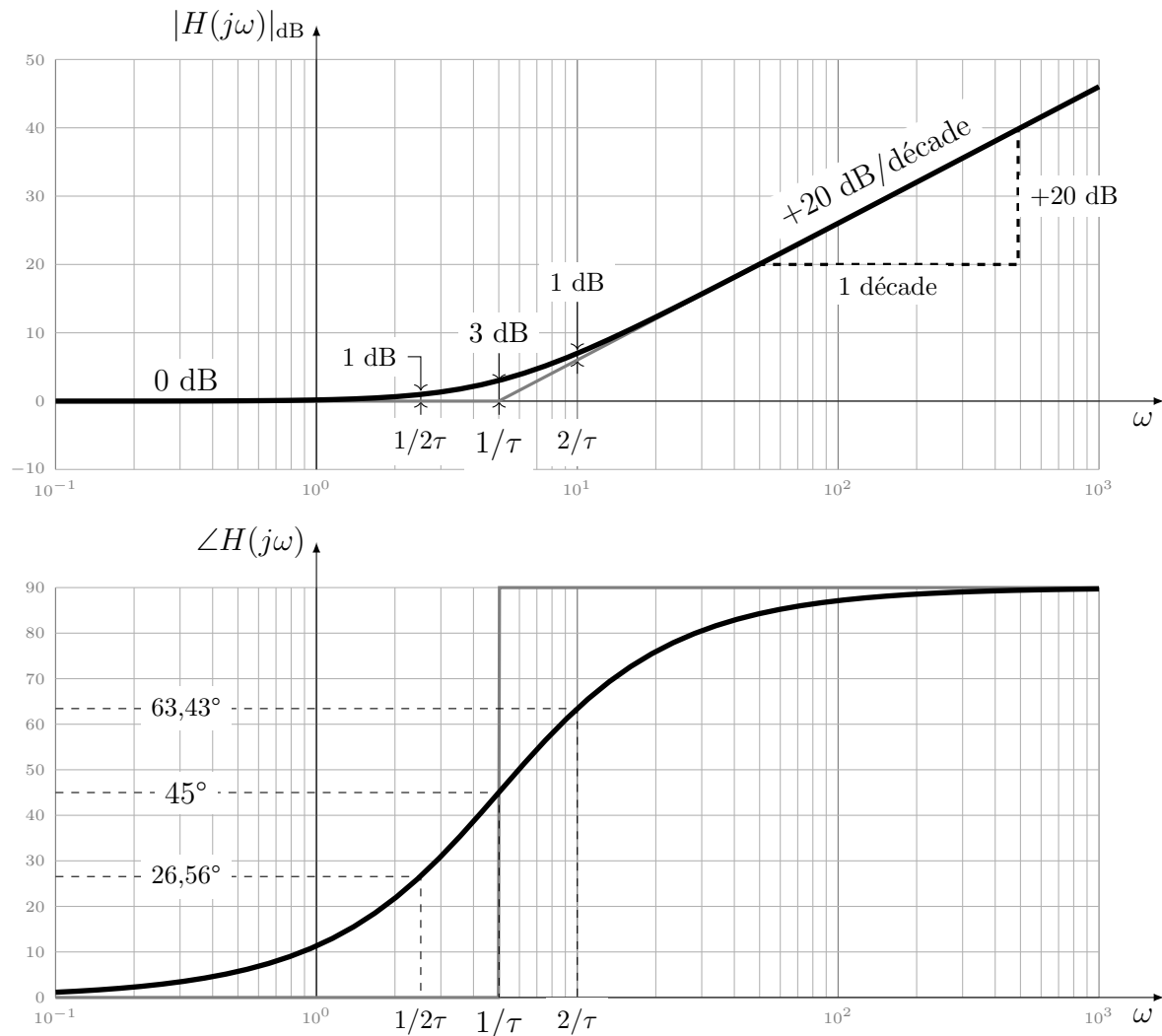


FIGURE 11 – Diagrammes de Bode d'un numérateur d'ordre 1 avec  $\tau = 0,2$  s.

## 2.6 Second ordre sous-amorti ( $\xi \leq 1$ )

Dans ce qui suit, nous nous intéressons seulement aux réponses harmoniques des systèmes du second ordre sous-amortis ( $\xi \leq 1$ ). En effet, nous verrons juste après (cf. § 2.7) que, comme la fonction de transfert d'un second ordre sur-amorti peut s'exprimer comme le produit de deux fonctions du premier ordre, le tracé des diagrammes de Bode peut être obtenu par simple superposition. Pour les systèmes du second ordre sous-amortis, la fonction de transfert s'écrit :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \implies H(j\omega) = \frac{K}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)}$$

telle que son expression complexe soit constituée des parties réelle et imaginaire :

$$\Re[H(j\omega)] = \frac{K \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2} \begin{cases} > 0 \text{ si } \omega < \omega_0 \\ = 0 \text{ si } \omega = \omega_0 \\ < 0 \text{ si } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

$$\Im[H(j\omega)] = \frac{-K \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2} < 0$$

Si la partie imaginaire est négative pour toute pulsation propre d'excitation  $\omega \in ]0; +\infty[$ , le signe de la partie réelle dépend du rapport  $\omega/\omega_0$  : la partie réelle est positive si  $\omega < \omega_0$ , nulle si  $\omega = \omega_0$  et négative sinon. On en déduit que, pour toute pulsation propre d'excitation  $\omega \in ]0; +\infty[$ , l'argument sera compris entre  $-\pi$  et 0. Pour utiliser la fonction arc tangente afin d'avoir une mesure d'angle à  $2\pi$  près sans ségréger les cas  $\omega < \omega_0$ ,  $\omega = \omega_0$  et  $\omega > \omega_0$ , il est nécessaire d'appliquer une rotation de  $+\pi/2$ , ce qui revient au changement de variable  $(\Re, \Im) \rightarrow (-\Im, \Re)$  puis d'appliquer après la rotation inverse. Il vient ainsi les expressions du module et de l'argument :

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2}} \\ \angle H(j\omega) \equiv \frac{-\pi}{2} + \text{Arctan} \left( \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\xi\omega\omega_0} \right) [2\pi] \end{cases}$$

ainsi que l'expression du gain en décibels

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(K) - 20 \log \left( \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2} \right)$$

On peut remarquer que le comportement harmonique d'un système du second ordre dépend de trois gammes de pulsations :

### Comportement basse fréquence ( $\omega \rightarrow 0$ )

On parle de comportement basse fréquence d'un second ordre lorsque la pulsation propre d'excitation tend vers zéro. Dans ce cas on a  $\omega \ll \omega_0$  tel que  $\lim_{\omega \rightarrow 0} (\omega/\omega_0) = 0$ , de sorte que les expressions du module (ou du gain) et de l'argument se limitent à :

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)| = K \iff \lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(K) \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle H(j\omega) \equiv 0 [2\pi] \end{cases}$$

### Comportement haute fréquence ( $\omega \rightarrow +\infty$ )

On parle de comportement haute fréquence d'un second ordre lorsque la pulsation propre d'excitation tend vers  $+\infty$ . Dans ce cas on a  $\omega \gg \omega_0$ , tel que  $(\omega/\omega_0) \rightarrow +\infty$ , de sorte que le rapport des parties imaginaire et réelle tende vers 0 et permette donc d'approcher les expressions du module et de la phase par :

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H(j\omega)| \simeq \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{K\omega_0^2}{\omega^2} \iff \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H(j\omega)|_{\text{dB}} \simeq \lim_{\omega \rightarrow +\infty} 20 \log(K\omega_0^2) - 40 \log(\omega) \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle H(j\omega) \equiv -\pi [2\pi] \end{cases}$$

### Comportement moyenne fréquence ( $\omega \sim \omega_0$ )

Les asymptotes à basses et à hautes fréquences du module ou du gain se coupent à la pulsation de cassure  $\omega_k = \omega_0$ , égale à la pulsation propre du système non amorti. On parle alors de comportement moyenne fréquence d'un second ordre sous-amorti lorsque la pulsation propre d'excitation est de l'ordre de grandeur de  $\omega_0$ . Dans cette gamme de fréquences, l'expression du module n'est pas forcément monotone et peut présenter un maximum. En effet, on peut remarquer que la dérivée du dénominateur s'annule pour deux valeurs. En posant  $u = \omega/\omega_0$ , il vient :

$$\frac{d[(1-u^2)^2 + (2\xi u)^2]}{du} = 4u(u^2 - 1 + 2\xi^2) = 0 \iff \begin{cases} u = 0 \\ u = \pm\sqrt{1-2\xi^2} \text{ si } \xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Le cas  $u = 0$  correspond à la tangente horizontale quand  $\omega \rightarrow 0$  (comportement basse fréquence). La seconde racine n'est accessible que si  $\xi \leq 1/\sqrt{2} \approx 0,7$  et correspond à la présence d'un maximum d'amplitude appelé **résonance** :

$$\text{si } \xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \begin{cases} |H(j\omega_r)|_{\text{dB}} = 20 \log(K) - 20 \log(2\xi\sqrt{1-\xi^2}) \\ \omega_r = \omega_0 \sqrt{1-2\xi^2} < \omega_0 \end{cases}$$

pour la pulsation de résonance  $\omega_r$  toujours plus faible que la pulsation propre du système non-amorti  $\omega_0$ . Il faut noter que dès que la résonance est marquée ( $\xi < 0,2$  environ), la pulsation de résonance est très proche de la valeur de  $\omega_0$ . Or la valeur en



$\omega_0$  se détermine très facilement en fonction de  $\xi$ . Au point de cassure, quand  $\omega = \omega_0$ , le gain et l'argument s'écrivent respectivement :

$$\begin{cases} |H(j\omega_0)| = \frac{K}{2\xi} = KQ \iff |H(j\omega_0)|_{\text{dB}} = 20 \log(K) - 20 \log(2\xi) \\ \angle H(j\omega_0) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

où  $Q = 1/(2\xi)$  est le facteur de qualité. Il permet notamment d'identifier le coefficient d'amortissement sur un tracé expérimental.

**Diagrammes de Bode** Les diagrammes de Bode d'un second ordre sous-amorti sont constitués d'un graphe de gain et d'un graphe de phase, tous deux variables. D'après les trois gammes de fréquences mises en avant, il est possible de réaliser le tracé asymptotique du gain et de la phase. À basse fréquence ( $\omega \rightarrow 0$ ), le gain et la phase sont constants et admettent chacun une asymptote horizontale, d'équations respectives

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(K) \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle H(j\omega) \equiv 0 [2\pi] \end{cases}$$

À haute fréquence ( $\omega \rightarrow +\infty$ ), le gain ne cesse de décroître, suivant une asymptote oblique à partir du point de cassure (de pulsation  $\omega_0$  et de gain  $20 \log(K)$ ) et avec une pente de :

$$|H(j10\omega)|_{\text{dB}} - |H(j\omega)|_{\text{dB}} = -40 \log(10\omega) + 40 \log(\omega) = -40 \text{ dB/décade}$$

La phase correspondante atteint une asymptote horizontale à  $-180^\circ$ . Entre ces deux gammes de fréquences, c'est-à-dire autour de la pulsation de cassure  $\omega_0$ , il est indispensable de connaître la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi$  pour savoir s'il va y avoir ou non une résonance et si oui, de quelle amplitude. Les caractéristiques nécessaires aux tracés des diagrammes de Bode de la figure 12 sont données dans la table 3.

TABLE 3 – Caractéristiques des diagrammes de Bode d'un système du 2<sup>ed</sup> ordre sous-amorti.

$\omega$	$ H(j\omega) _{\text{dB}}$	$\angle H(j\omega)$
$\omega \rightarrow 0$	asymptote horizontale : $20 \log(K)$	asymptote horiz. : $0^\circ$
$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$	$20 \log(K) - 20 \log(2\xi \sqrt{1 - \xi^2})$ si $\xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$	$> -90^\circ$
$\omega_0$	$20 \log(K) - 20 \log(2\xi)$	$-90^\circ$
$\omega \rightarrow +\infty$	asymptote oblique : $20 \log(K\omega_0^2) - 40 \log(\omega)$	asymptote horiz. : $-180^\circ$

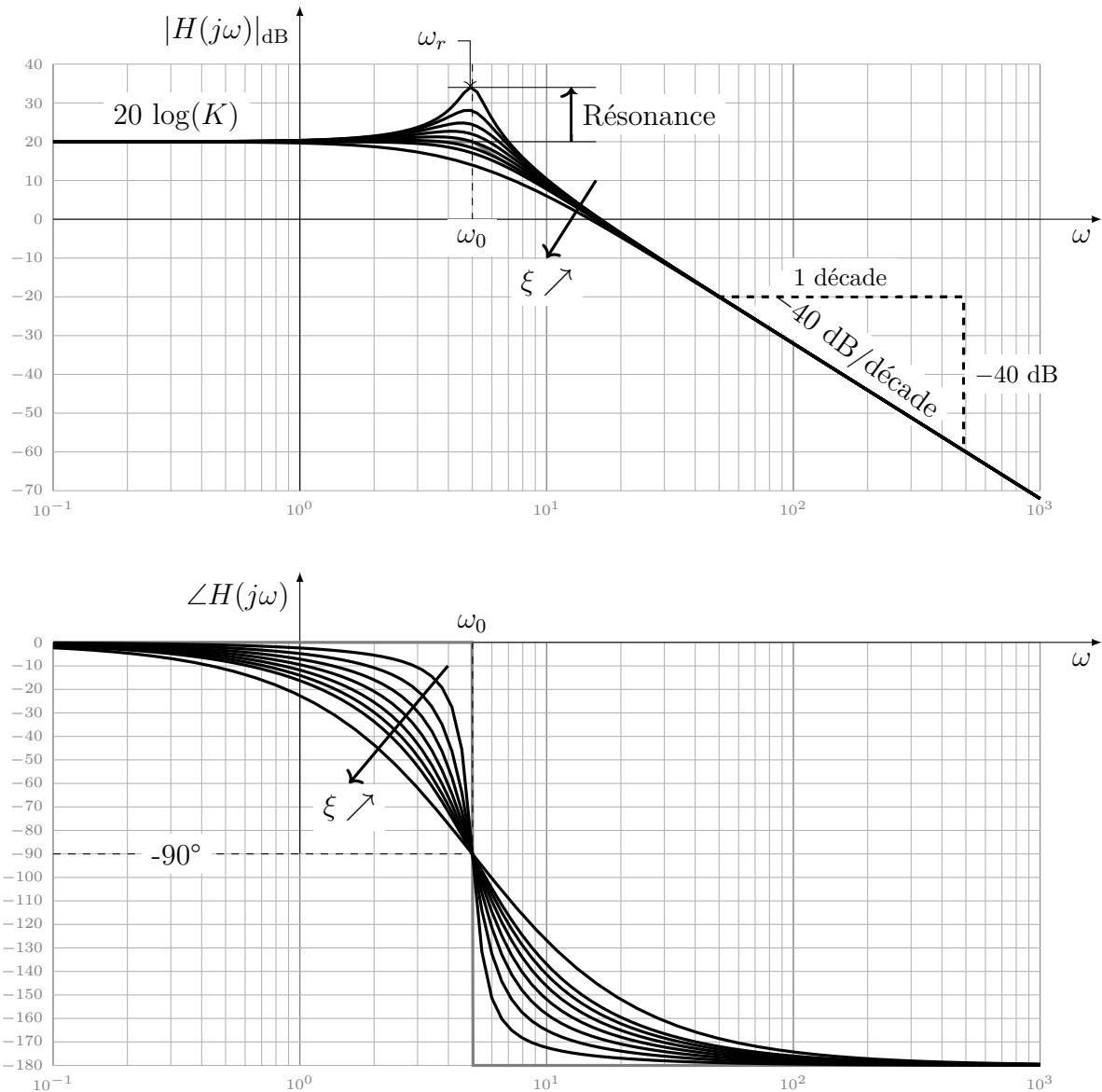


FIGURE 12 – Diagrammes de Bode d'un système du second ordre sous-amorti ( $\xi \leq 1$ ) avec  $K = 10$ ,  $\omega_0 = 5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  et pour différentes valeurs de  $\xi$  comprises entre 0,1 et 1.

Pour les systèmes du second ordre sous-amortis non résonnant, le tracé réel du gain autour de la pulsation de cassure  $\omega_0$  passera entre 3 et 6 dB en dessous du tracé asymptotique. En effet, dans le cas critique, c'est-à-dire lorsque  $\xi = 1$ , le tracé du gain ne présentera pas de pic résonance et le tracé réel passera  $20 \log(2) = 6$  dB en dessous du tracé asymptotique. Le graphe du gain qui restera le plus proche du tracé asymptotique sera celui pour  $\xi = 1/\sqrt{2}$  avec un tracé réel passant  $20 \log(\sqrt{2}) = 3$  dB en dessous du tracé asymptotique.

Dans le cas des systèmes du second ordre sous-amortis résonnants, c'est-à-dire avec  $\xi \in ]0, 1/\sqrt{2}[$ , le tracé réel du gain autour de la pulsation de cassure  $\omega_0$  passera toujours au-dessus du tracé asymptotique.

## 2.7 Cas général

Dans ce qui précède nous avons défini les lieux de transfert des fonctions de transfert élémentaires, caractéristiques des systèmes réels étudiés. Or toute fonction de transfert peut être décomposée sous la forme d'un produit de fonctions élémentaires associées à ses pôles et ses zéros :

$$H(p) = K \times \frac{p^\alpha \times \prod_{\beta} (1 + \tau_{\beta} p) \times \prod_{\delta} \left( 1 + \frac{2\xi_{\delta}}{\omega_{0\delta}} p + \frac{p^2}{\omega_{0\delta}^2} \right)}{p^\gamma \times \prod_{\kappa} (1 + \tau_{\kappa} p) \times \prod_{\mu} \left( 1 + \frac{2\xi_{\mu}}{\omega_{0\mu}} p + \frac{p^2}{\omega_{0\mu}^2} \right)}$$

Dérivateur (zéro nul) →
Numérateur d'ordre 1 (zéro réel négatif) ↓
Numérateur d'ordre 2 sous-amorti (paire de zéros complexes conjugués) ↙

Gain pur →

Intégrateur (pôle nul) ↗
Premier ordre (pôle réel négatif) ↑
Second ordre sous-amorti (paire de pôles complexes conjugués) ↘

que l'on peut écrire sous la forme générique

$$H(p) = \prod_i H_i(p) = H_1(p) \cdot H_2(p) \cdots$$

et conduisant à l'expression du gain et de l'argument

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = \sum_i 20 \log(|H_i(j\omega)|) \quad \text{et} \quad \angle H(j\omega) \equiv \sum_i \angle H_i(j\omega) [2\pi]$$

où la multiplication des fonctions de transfert élémentaires se traduit par une somme des gains et des arguments de chacune. De cette propriété de décomposition, on en déduit que pour tracer les diagrammes de Bode d'une fonction de transfert quelconque, il suffit d'ajouter chacune des contributions des fonctions de transfert élémentaires  $H_i(j\omega)$  la constituant, aussi bien pour le diagramme de gain que pour le diagramme de phase.

**Tracé des diagrammes de Bode** À l'exception des résonances, le tracé asymptotique des diagrammes de Bode d'une fonction de transfert met en évidence la plupart de ses caractéristiques (bande passante, comportement de type passe-bas, passe-haut, etc.). Aussi, pour réaliser le tracé des diagrammes de Bode d'une fonction de transfert quelconque, il s'agira toujours de :

1. factoriser la fonction de transfert de façon à faire apparaître les fonctions élémentaires (pas de second ordre sur-amorti!);
2. réaliser le tracé asymptotique de chacune des fonctions de transfert élémentaires (donnés dans la table 4) en spécifiant les caractéristiques (pentes, pulsations de cassures);
3. tracer l'allure du diagramme asymptotique final en sommant toutes les contributions;
4. tracer l'allure réelle des lieux de transfert dans l'ordre croissant des pulsations en tenant compte de chaque influence et, si besoin, calculer des valeurs particulières pour avoir une allure plus précise des lieux de transferts d'un système.

TABLE 4 – Tracés asymptotiques des diagrammes de Bode des fonctions de transfert élémentaires.

Fonction élémentaire	$H(p)$	$ H(j\omega) _{dB}$	$\angle H(j\omega)$
Gain pur	$K$		
Intégrateur	$\frac{1}{p}$		
Dérivateur	$p$		
Premier ordre	$\frac{1}{1 + \tau p}$		
Numérateur d'ordre 1	$1 + \tau p$		
Second ordre sous-amorti	$\frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$		
Numérateur d'ordre 2 sous-amorti	$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}$		

### Exemple 2.1

Soit la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{5(1 + 5p)}{p(1 + 0,5p + 0,25p^2)}$$

déjà exprimée sous forme factorisée car  $\omega_0 = 2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  et donc  $\xi = 0,5 < 1$  pour le second ordre du dénominateur. On peut donc simplement récrire cette fonction de transfert sous la forme de produit de fonctions élémentaires :

$$H(p) = 5 \times \frac{1}{p} \times (1 + 5p) \times \frac{1}{1 + 0,5p + 0,25p^2}$$

avec la pulsation de cassure du numérateur d'ordre 1 à  $1/5 = 0,2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  et celle du second ordre sous-amorti ( $\xi = 0,5$ ) à  $2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Les tracés asymptotiques et réels des diagrammes de Bode de cette fonction de transfert sont donnés sur la figure 13.

À basse fréquence, c'est-à-dire pour  $\omega \ll 0,2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , les seules influences sont celles du gain pur et de l'intégrateur. Le gain présente une asymptote oblique de pente  $-20 \text{ dB/décade}$  passant à  $20 \log(5) \approx 13,98 \text{ dB}$  à la pulsation de  $1 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . La phase suit une asymptote horizontale à  $-90^\circ$ . À partir de la pulsation  $\omega \sim 0,2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , le numérateur d'ordre 1 tend à atténuer l'effet de l'intégrateur. La pente de  $+20 \text{ dB/décade}$  du numérateur d'ordre 1 annule celle de l'intégrateur et le gain reste constant à la valeur de  $20 \log(5)$ . De façon analogue, la somme des tracés asymptotiques des phases montre que le numérateur d'ordre 1 tend à annuler le déphasage et le tracé réel atteint presque  $-45^\circ$  au niveau de la pulsation de cassure  $0,2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  et continue à évoluer progressivement vers  $0^\circ$  jusqu'à ce que l'effet du second ordre sous-amorti influe sur la réponse.

Si le tracé asymptotique ne montre qu'une modification des lieux de transfert à partir de la pulsation de cassure  $\omega_0 = 2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , le tracé réel montre une modification de la phase pour des pulsations d'excitation bien plus faibles. En effet, le déphasage cesse son atténuation pour une pulsation de  $0,5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  puis atteint presque  $-90^\circ$  au niveau de la pulsation de cassure  $\omega_0 = 2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Concernant le tracé du gain, comme  $\xi = 0,5 < 1/\sqrt{2}$ , le système présente une résonance de  $3 \text{ dB}$  pour la pulsation propre d'excitation  $\omega_r = \sqrt{2} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Enfin, à haute fréquence, pour  $\omega \gg 2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , la seule influence est celle du second ordre sous-amorti. Le gain présente une asymptote oblique de pente  $-40 \text{ dB/décade}$  et la phase atteint une asymptote horizontale à  $-180^\circ$ .

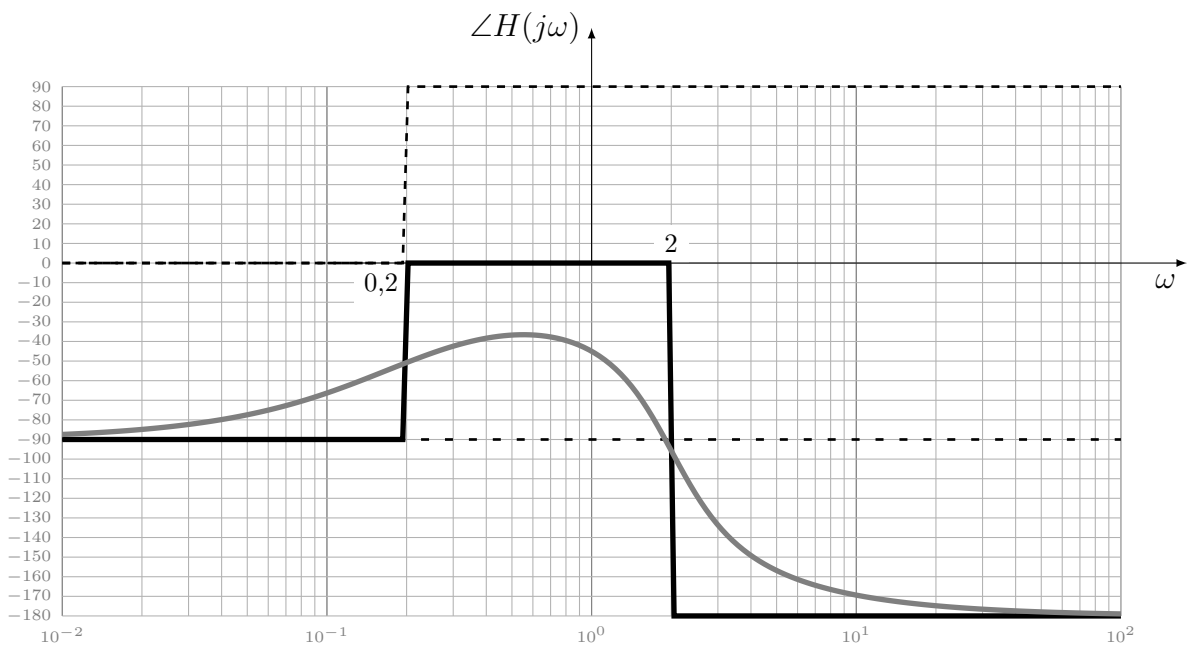
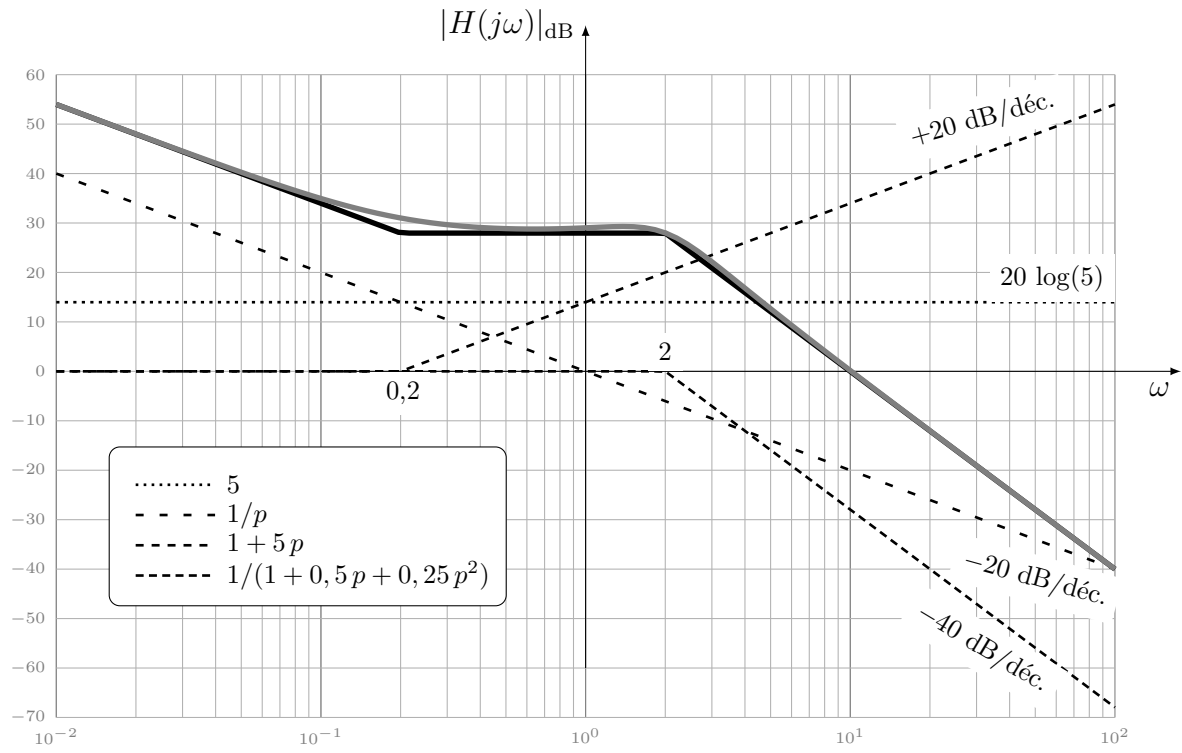
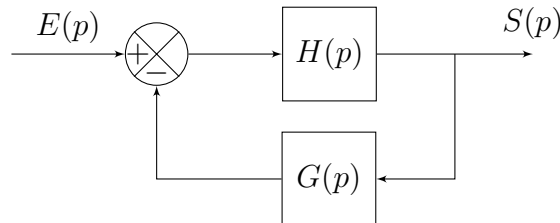


FIGURE 13 – Diagrammes de Bode de la fonction de transfert  $H(p) = \frac{5(1+2p)}{p(1+0,5p+0,25p^2)}$ .

### 3 Application à l'étude de la stabilité des systèmes

Le tracé de lieux de transfert des fonctions de transfert complexes permet d'obtenir des informations importantes sur le comportement harmonique des systèmes linéaires continus et invariants. En particulier, le tracé des lieux de transferts d'une fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) permet d'obtenir des informations sur le comportement bouclé. En effet, en considérant le schéma-blocs minimal d'un système asservi :



la fonction de transfert complexe en boucle fermée s'écrit :

$$\text{FTBF}(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{1 + \text{FTBO}(j\omega)} \quad \text{avec} \quad \text{FTBO}(j\omega) = H(j\omega)G(j\omega)$$

Dès lors, on remarque que si la FTBO s'approche du point  $-1$  dans une certaine gamme de fréquences, le dénominateur de la FTBF tend vers zéro et donc le module de la FTBF devient très grand : on parle de résonance de la FTBF. En particulier, lorsque le module de la FTBO vaut  $-1$ , le système en boucle fermée devient instable. Ainsi, pour évaluer la stabilité d'un système, il est nécessaire de rechercher si les lieux de transfert passent près ou non du point complexe  $-1$  appelé **point critique** et caractérisé par un module unitaire (ou un gain nul) et une phase de  $-180^\circ$ .

Plus les lieux de transfert de la boucle ouverte d'un système passent loin du point critique, plus le système sera stable. Or mesurer la distance des lieux de transfert au point critique n'est pas possible directement dans le lieu de Bode, car les axes n'ont pas les mêmes unités. Pour quantifier la proximité des lieux de transfert du point critique, il est nécessaire de mesurer les distances algébriques parallèlement aux axes qui seront appelées marge de gain et marge de phase.

#### Définition 3.1 (Marge de gain)

La marge de gain  $M_G$  est la distance algébrique en dB mesurée entre la courbe de gain et l'axe des abscisses pour une pulsation  $\omega_{-180}$  telle que la phase soit de  $-180^\circ$  :

$$M_G = -|H(j\omega_{-180})|_{\text{dB}} \quad \text{avec} \quad \angle H(j\omega_{-180}) = -180^\circ$$

#### Définition 3.2 (Marge de phase)

La marge de phase  $M_\varphi$  est la distance algébrique en degré mesurée entre  $-180^\circ$  et la courbe de phase pour une pulsation de coupure  $\omega_c$  telle que le gain soit nul :

$$M_\varphi = 180^\circ + \angle H(j\omega_c) \quad \text{avec} \quad |H(j\omega_c)|_{\text{dB}} = 0 \text{ dB}$$

La caractérisation des marges de stabilité est l'une des motivations principales de l'analyse harmonique des SLCI. Les ordres de grandeur usuels sont de  $45^\circ$  à  $60^\circ$  pour la marge de phase et d'environ 10 dB pour la marge de gain. Ces marges peuvent facilement être mesurées sur les diagrammes de Bode.

Sur les diagrammes de Bode (figure 14), une fois identifié le point de coupure, il suffit de tracer un axe vertical jusqu'à l'intersection avec le tracé de phase. La marge de phase correspond à la distance algébrique entre l'ordonnée  $-180^\circ$  et la courbe de phase. Pour déterminer la marge de gain, il faut tracer un axe horizontal à  $-180^\circ$  sur le diagramme de phase puis remonter jusqu'à la courbe de gain une fois la pulsation  $\omega_{-180}$  identifiée. La marge de gain correspond à la distance algébrique entre la courbe de gain et l'axe des abscisses à 0 dB.

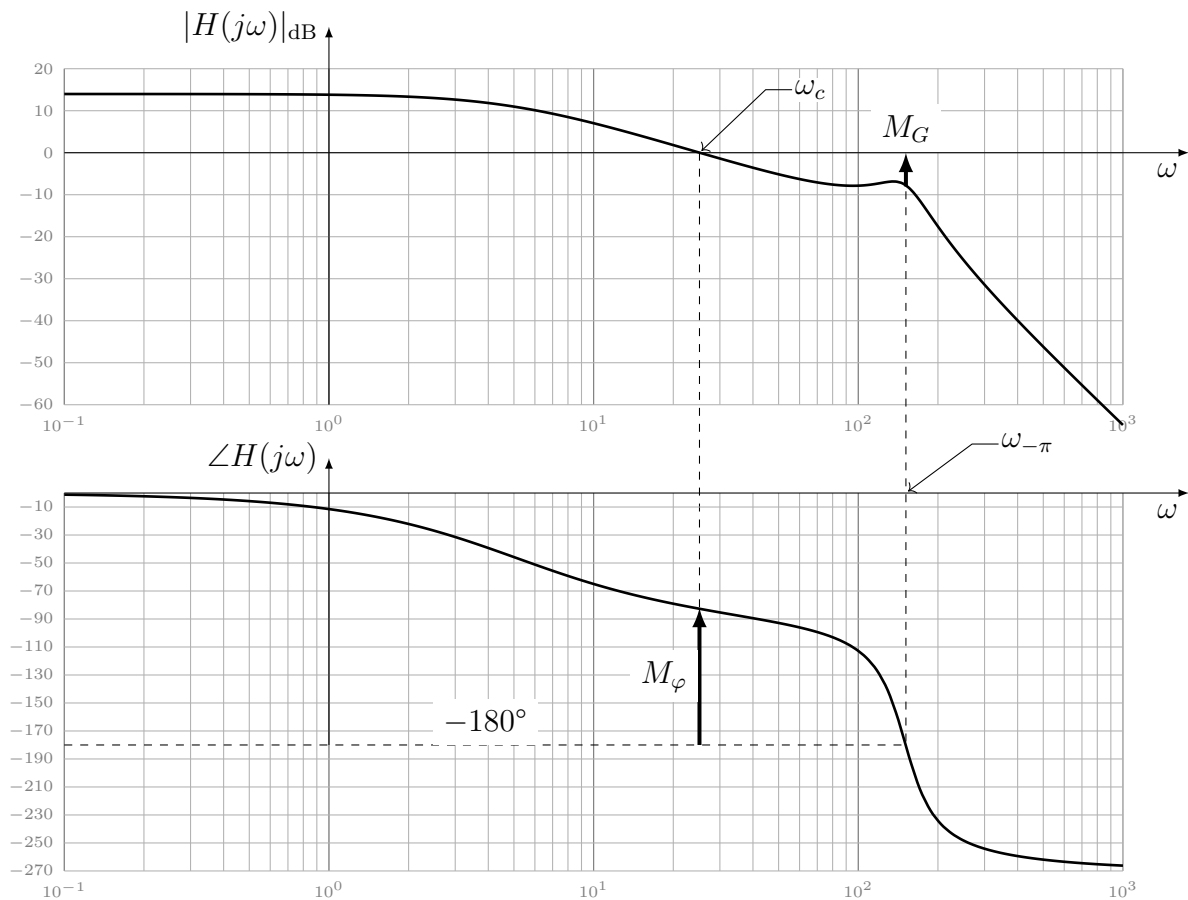


FIGURE 14 – Marges de stabilité sur les diagrammes de Bode.

\* \*  
\*