Dénombrement

Cours de É. Bouchet – PCSI

12 décembre 2024

Table des matières

1 Cardinal d'un ensemble fini

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.1 (Cardinal)

Soit A un ensemble fini. On appelle **cardinal** le nombre de ses éléments, et on le note $\mathrm{Card}(A)$ ou $|A|$.

Exemple. $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$. Si $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a \leqslant b$, $\mathrm{Card}([\![a, b]\!]) = b - a + 1$.

Proposition 1.2 (Partie d'un ensemble)

Soit E un ensemble fini et A un sous-ensemble de E. Alors A est fini, et $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(E)$. De plus,

$$A = E \iff \mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E).$$

Remarque. Pour montrer que deux ensembles finis sont égaux, on peut donc au choix raisonner par double inclusion ou montrer une inclusion et l'égalité des cardinaux.

Proposition 1.3 (Formule de somme)

Soit E un ensemble fini et A et B deux sous-ensembles de E. Si A et B sont disjoints, alors

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B).$$

Remarque. Pour rappel, deux ensembles A et B sont dits disjoints quand $A \cap B = \emptyset$.

Proposition 1.4 (Formule de partition)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un ensemble fini et $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une partition de E. Alors $\mathrm{Card}(E) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(A_i)$.

Proposition 1.5 (Formule de différence)

Soit E un ensemble fini et A et B deux sous-ensembles de E. Alors $\mathrm{Card}(A \setminus B) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(A \cap B)$.

Remarque. En particulier, si $B \subset A$, on a $\mathrm{Card}(A \setminus B) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(B)$.

Proposition 1.6 (Formule du complémentaire)

Soit E un ensemble fini et A un sous-ensemble de E. Alors $\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$.

Proposition 1.7 (Formule de somme, cas général)

Soit E un ensemble fini et A et B deux sous-ensembles de E. Alors

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Proposition 1.8 (Formule du produit)

Soit A et B deux ensembles finis. Alors $\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B)$.

Remarque. Cette formule se généralise facilement : si A_1, ..., A_p sont des ensembles finis, alors $A_1 \times \cdots \times A_p$ est fini et $\mathrm{Card}(A_1 \times \cdots \times A_p) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} \mathrm{Card}(A_k)$.

1.2 Cardinaux et applications

Proposition 1.9 (Principe des tiroirs)

Soit E et F deux ensembles finis et f une application de E dans F. Si $\mathrm{Card}(E) > \mathrm{Card}(F)$, alors f ne peut pas être injective.

Exemple. Si on cherche à ranger $n+1$ objets dans n tiroirs, au moins un tiroir contiendra deux objets.

Proposition 1.10 (Applications bijectives en cas d'égalité de cardinal)

Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal et f une application de E dans F. Alors :

$$f \text{ est injective } \iff f \text{ est surjective } \iff f \text{ est bijective.}$$

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose qu'on a n objets à ranger dans n tiroirs. Alors « chaque tiroir contient au moins un objet » équivaut à « aucun tiroir ne contient plus d'un objet » et à « chaque tiroir contient exactement un objet ».

Proposition 1.11 (Nombre d'applications de E dans F)

Soit E et F deux ensembles finis. Le nombre d'applications de E dans F vaut :

$$\mathrm{Card}(F^E) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)}.$$

1.3 Parties d'un ensemble à n éléments

Proposition 1.12 (Parties d'un ensemble à n éléments)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de parties de E est $\mathrm{Card}\left(\mathcal{P}(E)\right) = 2^n$.

Exemple. Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. On avait déterminé $\mathcal{P}(E)$ dans le chapitre sur les ensembles en constatant que $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 16$. On retrouve bien ce résultat avec $16 = 2^4 = 2^{\mathrm{Card}(E)}$.

2 Listes et combinaisons

2.1 p-listes d'un ensemble à n éléments

Définition 2.1 (p-liste)

Soit $(p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit E un ensemble fini de cardinal n. On appelle **p-liste** (ou **p-uplet**) de E tout élément de E^p.

Remarque. L'ordre des éléments dans la p-liste est important.

Exemple. $(1, 2, 1)$ et $(1, 1, 2)$ sont deux exemples différents de 3-listes d'éléments de $[\![1, 6]\!]$.

Proposition 2.2 (Nombre de p-listes)

Soit $(p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Le nombre de p-listes d'un ensemble E à n éléments est $\mathrm{Card}\left(E^p\right) = n^p$.

Exercice 1. On tire trois cartes avec remise dans un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on rencontrer ?

Définition 2.3 (p-liste d'éléments distincts)

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $p \in [\![1, n]\!]$. On appelle **p-liste** (ou **p-uplet**) **d'éléments distincts** de E tout élément $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ tel que : $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2$tels que $i \neq j$, $x_i \neq x_j$.

Exemple. $(1, 2, 5)$ est une 3-liste d'éléments distincts de $[\![1, 6]\!]$, mais pas $(1, 2, 1)$.

Proposition 2.4 (Nombre de p-listes d'éléments distincts)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$. Le nombre de p-listes d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Exercice 2. On tire trois cartes sans remise dans un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on rencontrer ?

Exercice 3. Soit E et F deux ensembles finis. On pose $p = \mathrm{Card}(E)$ et $n = \mathrm{Card}(F)$. Si $p \leqslant n$ (c'est-à-dire s'il existe des applications injectives de E dans F), montrer que l'ensemble des applications injectives de E dans F est de cardinal $\frac{n!}{(n-p)!}$.

2.2 Permutations d'un ensemble à n éléments

Définition 2.5 (Permutation)

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **permutation** de E toute n-liste d'éléments distincts de E.

Remarque. Une permutation de n objets distincts rangés dans un certain ordre correspond à un changement de l'ordre de succession de ces n objets.

Exemple. Si $E = [\![1, 5]\!]$, $(1, 2, 3, 4, 5)$, $(5, 4, 3, 2, 1)$ et $(2, 4, 1, 3, 5)$ sont des permutations de E.

Proposition 2.6 (Nombre de permutations)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de **permutations** d'un ensemble à n éléments est $n!$.

Exercice 4. De combien de manières différentes peut-on mélanger un jeu de 32 cartes ?

Exercice 5. Combien PERLE a-t-il d'anagrammes ?

2.3 Parties à p-éléments d'un ensemble à n éléments

Définition 2.7 (Parties à p éléments d'un ensemble à n éléments)

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et soit $p \in [\![0, n]\!]$. On appelle **partie à p éléments** de E (ou **p-combinaison** de E) tout sous-ensemble de E à p éléments.

Exemple. $\{1, 2, 5\}$ est une partie à 3 éléments de $[\![1, 6]\!]$.

Remarque. L'ordre des éléments d'un ensemble n'a pas d'importance (contrairement au cas des listes).

Proposition 2.8 (Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de parties à p éléments de E est

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

Exercice 6. On tire simultanément trois cartes dans un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on rencontrer ?

Proposition 2.9 (Formule de Pascal, rappel)

$$\forall (n,p) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\},\ \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

Proposition 2.10 (Formule du binôme de Newton, rappel)

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant un dénombrement, montrer que $2^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.