Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1 (★). Montrer que $\mathcal{F} = ((1,-3,0),(0,2,1),(1,0,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 (★). On pose $E = \mathbb{R}[X]$. Soient $F = \mathrm{Vect}(X, X^2)$ et $G = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(2) = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que $F \cap G$ est une droite vectorielle.

Exercice 3 (★). On considère $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] | P(1) + P'(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base de F puis sa dimension.

Exercice 4 (★). Démontrer que l'ensemble E des suites arithmétiques à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

Exercice 5 (★). Soit F l'ensemble des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$, solutions de $y'' + y' - 2y = 0$. Montrer qu'il s'agit d'un espace vectoriel de dimension finie et déterminer une base.

Exercice 6 (★). Soit $E = \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos(x)\right\}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Déterminer une base de E et sa dimension.

Exercice 7 (★★). Montrer que la famille $\left(X^k (X-1)^{n-k}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 8 (★★). Dans $\mathbb{R}_n[X]$, soit H l'espace vectoriel des polynômes admettant 2 pour racine. Déterminer une base et la dimension de H.

Exercice 9 (★). On se place dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = ((3,2,1),(1,2,3),(1,1,1))$.

Exercice 10 (★). Déterminer le rang de la famille $(X^2 + X + 1, X^2 + 3X + 1, 2X, X^3 + 3)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 11 (★★). Dans l'ensemble des applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on donne les éléments f_0, f_1, f_2, f_3 et f_4 définis par : pour tout réel x,

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \cos^2 x, \quad f_3(x) = \sin x \quad \text{et} \quad f_4(x) = \cos(2x).$$

Déterminer le rang de la famille $S = (f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$.

Exercice 12 (★). Dans $\mathbb{R}^4$, on donne $\varepsilon_1 = (1,0,1,1)$, $\varepsilon_2 = (2,1,3,0)$, $\varepsilon_3 = (1,-1,1,1)$.

1. Prouver que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$, la compléter pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer un sous-espace vectoriel supplémentaire de $G = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 13 (★). On pose $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y + z = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, puis en déterminer une base. Déterminer ensuite un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 14 (★). On pose $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 | 3x + 4y + 5iz = 0\}$. H est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$? Si oui, en donner une base et déterminer un sous-espace supplémentaire de H dans $\mathbb{C}^3$.

Exercice 15 (★★). Soit $m \in \mathbb{R}$ et $e_1 = (1,1,0)$. On pose $F_m = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + z = m\}$ et $G = \mathrm{Vect}(e_1)$.

1. Déterminer les valeurs de m telles que F_m soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
2. Prouver qu'alors $\mathbb{R}^3 = F_m \oplus G$.

Exercice 16 (★). On se place dans $E = \mathbb{R}^3$, avec $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right)$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et que $E = F \oplus G$. Expliciter une base adaptée à cette somme directe.

Exercice 17 (★★). Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On pose $F = \mathrm{Vect}(X^2 - X, X^2 + 1)$ et $G = \{P \in E | P(-1) = P'(-1) = 0\}$.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $E = F \oplus G$ et déterminer une base de E adaptée à cette somme directe.
3. Déterminer la décomposition dans $F \oplus G$ de $R(X) = 4X^2 - 4X + 2$.

Exercice 18 (★★★)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que $F \neq \{0_E\}$ et $F \neq E$. Soit G un supplémentaire de F dans E et $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de G.

1. Montrer que si $f \in F$, la famille $(e_1 + f, e_2 + f, \ldots, e_r + f)$ est de rang r.
2. Si $f \in F$, on note $G_f = \mathrm{Vect}(e_1 + f, e_2 + f, \ldots, e_r + f)$. Montrer que G_f est un supplémentaire de F dans E.
3. Soit f et f' deux éléments distincts de F. Montrer que $G_f \neq G_{f'}$.
4. En déduire que F admet une infinité de supplémentaires.

Exercice 19 (Type DS)**.** Soient a_1, …, a_{n+1} des réels deux à deux distincts. Pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, on pose :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n+1} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}.$$

1. Pour cette question uniquement, on pose $n = 1$, $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$. Calculer $L_1(X)$ et $L_2(X)$.
   On n'hésitera pas à se servir de cet exemple pour conjecturer les réponses des questions suivantes…
2. (a) Soit $i \in [\![1, n+1]\!]$. Calculer $L_i(a_i)$.
   (b) Soit $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, avec $i \neq j$. Calculer $L_i(a_j)$.
3. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
   (a) Quel est le degré des polynômes $L_i(X)$?
   (b) Montrer que la famille $(L_i(X))_{i\in[\![1,n+1]\!]}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (c) En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Soient b_1, …, b_{n+1} des réels fixés. On pose : $P(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} b_i L_i(X)$. Ce polynôme s'appelle polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n+1$ couples de scalaires (a_i, b_i).
   (a) Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux 2 couples $(1, 1)$ et $(2, 1)$.
   (b) On se place de nouveau dans le cadre général de $n+1$ couples de scalaires (a_i, b_i). Montrer que le polynôme d'interpolation de Lagrange P est de degré inférieur à n et vérifie $\forall j \in [\![1, n+1]\!]$, $P(a_j) = b_j$.
   (c) Montrer que P est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui vérifie $\forall j \in [\![1, n+1]\!]$, $P(a_j) = b_j$.