Espaces vectoriels de dimension finie

Cours de É. Bouchet – PCSI

12 décembre 2024

Table des matières

1 Définition et existence de bases **2**
1.1 Familles génératrices finies 2
1.2 Construction de bases 2

2 Dimension d'un espace de dimension finie **3**
2.1 Définition et premières propriétés 3
2.2 Caractérisations des bases 3
2.3 Rang d'une famille finie de vecteurs 4

3 Sous-espaces et dimensions **4**
3.1 Sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie 4
3.2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires 5
3.3 Caractérisation de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires 5

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définition et existence de bases

1.1 Familles génératrices finies

Définition 1.1 (Espace vectoriel de dimension finie)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est un **espace vectoriel de dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie.

Remarque. E est donc de dimension finie lorsqu'il existe une famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ de vecteurs de E tels que

$$E = \mathrm{Vect}\left(f_1, f_2, \ldots, f_n\right).$$

Remarque. Par convention, $\{0_E\}$ est un espace vectoriel de dimension finie.

Exemple. On a déjà rencontré notamment :
- $\mathbb{K}^n$, espace vectoriel de dimension finie engendré par la base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
- $\mathbb{K}_n[X]$, espace vectoriel de dimension finie engendré par la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, espace vectoriel de dimension finie engendré par la base canonique $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$.

Proposition 1.2 (Modification d'une famille génératrice)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une de ses familles génératrices. Alors pour tout vecteur $e_1 \neq 0_E$, on peut extraire $n-1$ vecteurs de $\mathcal{F}$ (que par réindexation éventuelle on note $f_2, ..., f_n$) tels que la famille $(e_1, f_2, \ldots, f_n)$ est une famille génératrice de E.

Exemple. La famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$, et $(X+1)^2 \neq 0$. On peut donc trouver une nouvelle famille qui engendre $\mathbb{K}_n[X]$:

$$((X+1)^2, X, X^2, \ldots, X^n) \text{ ou } ((X+1)^2, 1, X^2, \ldots, X^n) \text{ ou } ((X+1)^2, 1, X, X^3 \ldots, X^n)$$

Proposition 1.3 (Cardinaux des familles libres et génératrices)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre finie de E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E, alors $\mathrm{Card}(\mathcal{L}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathcal{G})$.

Remarque. Une famille n'est pas un ensemble, mais on lui étend la définition de cardinal pour simplifier les écritures.

1.2 Construction de bases

Proposition 1.4 (Théorème de la base extraite)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$. De toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base finie de E.

Proposition 1.5 (Existence de bases en dimension finie)

Tout espace vectoriel E de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$ admet au moins une base (finie).

Exercice 1. Soit $E = \mathrm{Vect}(1, 1+X, 5+X)$. Déterminer une base de E.

Proposition 1.6 (Théorème de la base incomplète)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$. Toute famille libre de E peut être complétée en une base finie de E.

Exercice 2. Compléter $(X+2, X+1)$ en une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On admet (la suite du chapitre le justifiera) qu'il suffit d'obtenir une famille libre à quatre éléments.

2 Dimension d'un espace de dimension finie

2.1 Définition et premières propriétés

Définition 2.1 (Dimension d'un espace vectoriel)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$. Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Cet entier naturel est appelé la **dimension** de l'espace vectoriel et est noté $\dim(E)$.

Remarque. Par convention $\dim(\{0_E\}) = 0$.

Exemple. Cas des espaces vectoriels usuels (à connaître) :
- $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel de dimension n, dont une base est $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
- $\mathbb{K}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$, dont une base est $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension np, dont une base est $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$.

Exemple. On a vu dans un chapitre précédent que $(((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de l'espace vectoriel des suites vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
De manière générale, l'ensemble des suites récurrentes linéaires doubles vérifiant une relation donnée est un espace vectoriel de dimension 2.

Exercice 3. Montrer que l'ensemble E des solutions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $-2y'' + y' + 3y = 0$ est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension.

2.2 Caractérisations des bases

Proposition 2.2 (Cardinal d'une famille libre ou génératrice)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :
- Toute famille libre $\mathcal{L}$ de E vérifie $\mathrm{Card}(\mathcal{L}) \leqslant n$.
- Toute famille génératrice $\mathcal{G}$ de E vérifie $\mathrm{Card}(\mathcal{G}) \geqslant n$.

Remarque. L'hypothèse $n \in \mathbb{N}^*$ permet d'écarter le cas $E = \{0_E\}$.

Proposition 2.3 (Caractérisation des familles libres ou génératrices par le cardinal)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
- Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E. Alors $\mathcal{L}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Card}(\mathcal{L}) = n$.
- Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Alors $\mathcal{G}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Card}(\mathcal{G}) = n$.

Exercice 4. Montrer que $(1, X+1, X^2+X+1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2.3 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 2.4 (Rang d'une famille finie de vecteurs)

Soit E un espace vectoriel et $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle **rang** de la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ et on note $\mathrm{rg}\,(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre :

$$\mathrm{rg}\,(f_1, f_2, \ldots, f_p) = \dim\left(\mathrm{Vect}\,(f_1, f_2, \ldots, f_p)\right).$$

Remarque. La famille étant finie, $\mathrm{Vect}\,(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ est nécessairement un espace vectoriel de dimension finie (il possède une famille génératrice finie), on peut donc bien étudier sa dimension.

Proposition 2.5 (Lien entre rang et liberté)

Soit E un espace vectoriel et $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une famille finie de vecteurs de E. Alors $\mathrm{rg}(f_1, \ldots, f_p) \leqslant p$ et :

$$\mathrm{rg}(f_1, \ldots, f_p) = p \Longleftrightarrow (f_1, \ldots, f_p) \text{ est libre.}$$

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, déterminer les valeurs de $\mathrm{rg}(X, X^2)$, $\mathrm{rg}(1, X+1, X, X^2)$ et $\mathrm{rg}((X+1)^2, X^2)$.

3 Sous-espaces et dimensions

3.1 Sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie

Proposition 3.1 (Sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et G un sous-espace vectoriel de E. Alors G est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim(G) \leqslant \dim(E)$. De plus, si $\dim(G) = \dim(E)$, alors $G = E$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer $\dim(\mathcal{A}_2(\mathbb{R}))$.
2. Déterminer $\dim(\mathcal{S}_2(\mathbb{R}))$.
3. Conjecturer les valeurs de $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

Définition 3.2 (Sous-espaces particuliers, cas particuliers)

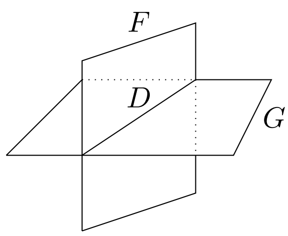
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$.
- Une **droite vectorielle** de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension 1.
- Un **plan vectoriel** de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2.

Proposition 3.3 (Formule de Grassman)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Exemple. Considérons deux plans vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$, qui se coupent selon une droite D.



On a bien $\dim(F+G) = 3 = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

3.2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Proposition 3.4 (Existence d'un supplémentaire en dimension finie)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et F un sous-espace vectoriel de E. Alors il existe un sous-espace vectoriel G de E qui est supplémentaire de F dans E.

Exercice 7. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] | P(1) = 0\}$. Déterminer un supplémentaire à F dans $\mathbb{R}_2[X]$.

3.3 Caractérisation de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires

Proposition 3.5 (Caractérisation de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E,
2. $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$,
3. $E = F + G$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$,
4. Si B_1 est une base de F et B_2 est une base de G, la famille B obtenue en juxtaposant les vecteurs de B_1 et B_2 est une base de E. On dit que la base B est **adaptée** à la décomposition en somme directe.