Développements limités et études locales

Cours de É. Bouchet – PCSI

22 janvier 2025

Table des matières

1 Développements limités **2**
1.1 Définition et premières propriétés 2
1.2 Opérations sur les développements limités 3
1.3 Formule de Taylor-Young 3
1.4 Développements limités usuels en 0 4
1.5 Exemples de calculs 5

2 Étude locale de suites et de fonctions **5**
2.1 Recherche de limite ou équivalent 5
2.2 Positions relatives de la courbe et sa tangente 5
2.3 Recherche d'asymptote 6
2.4 Recherche d'extremum local 6
2.5 Étude asymptotique de suites 6

Dans tout le chapitre, les fonctions et suites considérées sont à valeurs réelles, mais les résultats se généralisent sans difficulté au cas de valeurs complexes.

1 Développements limités

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.1 (Développement limité)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie au voisinage de a. On dit que f **admet un développement limité** d'ordre n en a lorsqu'il existe $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right).$$

Le polynôme $a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n$ est appelé la **partie régulière** du développement limité.

Exemple. On sait que $\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$, donc $\sin(x) \underset{x \to 0}{=} x + o(x)$. Donc sinus admet un développement limité d'ordre 1 en 0 ($a_0 = 0$, $a_1 = 1$). Sa partie régulière est x.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Donc $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$.
Par ailleurs, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{1-x} = 0$. Donc $\displaystyle\frac{x^{n+1}}{1-x} \underset{x \to 0}{=} o(x^n)$.
On en déduit que $\displaystyle\frac{1}{1-x}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0, qui vaut : $\displaystyle\frac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$.

Remarque. Un développement limité fournit des approximations polynomiales de f au voisinage du point étudié : la courbe $y = a_0$ est la meilleure approximation à l'ordre 0, $y = a_0 + a_1(x-a)$ la meilleure à l'ordre 1, etc.

Remarque. On peut ramener tout développement limité au voisinage de a à un développement limité au voisinage de 0, puisque $\displaystyle\lim_{h \to 0}(a+h) = a$: si $f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$, alors

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o\left(h^n\right).$$

Proposition 1.2 (Unicité du développement limité)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a. Si f admet un développement limité à l'ordre n en a, alors ce développement est unique.

Proposition 1.3 (Troncature)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a. On suppose que f admet un développement limité $f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$. Alors pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, f admet un développement limité $f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_k(x-a)^k + o\left((x-a)^k\right)$.

Remarque. Si on connaît un développement limité d'une fonction à un ordre $n \in \mathbb{N}$, on en connaît donc aussi à tous les ordres inférieurs.

Exemple. La relation $\displaystyle\frac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2)$ donne directement que $\displaystyle\frac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} 1 + x + o(x)$. Cette deuxième relation porte cependant moins d'informations que la première.

Proposition 1.4 (Cas des fonctions paires ou impaires)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0.
- Si f est paire, les coefficients de rang impair du développement limité sont nuls.
- Si f est impaire, les coefficients de rang pair du développement limité sont nuls.

Exemple. On a vu précédemment que $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$. Or $\lim_{x\to 0} -x^2 = 0$, donc par composition à droite :

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k + o((-x^2)^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}).$$

1.2 Opérations sur les développements limités

Proposition 1.5 (Somme de développements limités)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On suppose que f et g admettent des développements limités d'ordre n en a. Alors $f + \lambda g$ admet un développement limité d'ordre n en a.
La partie régulière du développement limité de $f + \lambda g$ est égale à la partie régulière du développement limité de f plus λ fois la partie régulière du développement limité de g.

Proposition 1.6 (Produit de développements limités)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On suppose que f et g admettent des développements limités d'ordre n en a. Alors fg admet un développement limité d'ordre n en a.
La partie régulière du développement limité de fg est obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le produit des parties régulières de f et g.

Exercice 1. Déterminer un développement limité de $\left(\frac{1}{1-x}\right)^2$ à l'ordre 2 en 0.

Proposition 1.7 (Primitivation d'un développement limité)

Soit I un intervalle, $a \in I$ et f une fonction dérivable sur I.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que f' admet pour développement limité $f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$.

Alors f admet pour développement limité $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right)$

Remarque. Attention : dans le cas général, on ne peut par contre pas dériver un développement limité.

Proposition 1.8 (Développement limité de $\tan(x)$)

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

1.3 Formule de Taylor-Young

Proposition 1.9 (Existence d'un développement limité d'ordre 0)

Soit $a \in \mathbb{R}$, et f une fonction définie en a et au voisinage de ce point. La fonction f est continue en a si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 0 en a. On a alors $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o(1)$.

Proposition 1.10 (Existence d'un développement limité d'ordre 1)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie en a et au voisinage de ce point. La fonction f est dérivable en a si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 1 en a. On a alors :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o((x-a)).$$

Proposition 1.11 (Formule de Taylor-Young)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction de classe C^n sur un intervalle I et $a \in I$, alors :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o\left((x-a)^n\right).$$

Remarque. On peut également écrire $f(a+h) \underset{h \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o\left(h^n\right)$.

1.4 Développements limités usuels en 0

Proposition 1.12 (Développement limité de la fonction exponentielle)

$$\exp(x) \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

Proposition 1.13 (Développement limité de $\mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{ch}(x)$)

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x \to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\mathrm{ch}(x) \underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}).$$

Remarque. Les exposants $2k$ et $2k+1$ ont été introduits pour permettre d'avoir des formules simples, mais il faut garder à l'esprit que l'ordre d'un développement limité correspond à la puissance qui apparaît dans le o.

Exercice 2. Déterminer les développements limités en 0 de sh et ch à l'ordre 5.

Proposition 1.14 (Développement limité de la fonction inverse)

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n),$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \to 0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n).$$

Proposition 1.15 (Développement limité de la fonction logarithme)

$$\ln(1+x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

Proposition 1.16 (Développement limité de $\arctan(x)$)

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}).$$

Proposition 1.17 (Développement limité des fonctions puissances)

Pour tout réel α,

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha\frac{x}{1!} + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Exercice 3. Déterminer un développement limité de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 en 0.

Proposition 1.18 (Développement limité de $\sin(x)$ et $\cos(x)$)

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}).$$

1.5 Exemples de calculs

Exercice 4. Déterminer un développement limité d'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \cos x$.

Exercice 5. Déterminer un développement limité d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \cos x$.

Exercice 6. Déterminer un développement limité d'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+2x} - \exp(x)$.

Exercice 7. Déterminer un développement limité d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{1+x}$.

Exercice 8. Déterminer un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$.

Exercice 9. Déterminer un développement limité d'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1+\ln(1+x)}$.

2 Étude locale de suites et de fonctions

2.1 Recherche de limite ou équivalent

Exercice 10. Montrer que la fonction f définie sur $]0,1]$ par $\forall x \in]0,1]$, $f(x) = \dfrac{2}{\sin(x)} - \dfrac{2}{\ln(1+x)}$ est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 11. Déterminer un équivalent de la suite $u_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

2.2 Positions relatives de la courbe et sa tangente

Exercice 12. Déterminer la tangente en 0 de la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $\forall x \in]-1,+\infty[$, $f(x) = \frac{\cos(x)}{1+x}$ et étudier la position de la courbe par rapport à sa tangente.

2.3 Recherche d'asymptote

Définition 2.1 (Asymptote)

Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On dit que f admet la droite d'équation $y = ax+b$ pour **asymptote** au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} ax+b+o(1) \qquad \text{(resp. } f(x) \underset{x\to-\infty}{=} ax+b+o(1)\text{)}$$

Exercice 13. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2+2}$. Déterminer son asymptote au voisinage de $+\infty$ et étudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote.
Remarque : on pourrait utiliser une décomposition en éléments simples, mais on ne le fera pas ici pour travailler les compétences de développements limités.

2.4 Recherche d'extremum local

Remarque. Rappel : les extremums locaux d'une fonction de classe C^1 sauf en un nombre fini de points, sur un intervalle quelconque, sont à chercher parmi :
- ses points critiques,
- les points où la fonction n'est pas dérivable,
- les bornes de l'intervalle.

Proposition 2.2 (Utilisation de la dérivée seconde)

Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle ouvert I et soit $c \in I$ un point critique de f. Alors,
- Si $f^{(2)}(c) > 0$, alors f possède un minimum local en c.
- Si $f^{(2)}(c) < 0$, alors f possède un maximum local en c.

Remarque. Si $f^{(2)}(c) = 0$, on ne peut rien conclure.

Exercice 14. Trouver les extremums de la fonction $f : x \longmapsto x^3 - x^2 - x + 1$ définie sur $[-2, \frac{3}{2}]$. Déterminer leur nature, et s'ils sont locaux ou globaux.

2.5 Étude asymptotique de suites

Exercice 15. On considère les suites $(x_n)_{n\geqslant 2}$ et $(y_n)_{n\geqslant 2}$ telles que $\begin{cases} x_n \longrightarrow -\infty \\ e^{x_n} = x_n + n \end{cases}$ et $\begin{cases} y_n \longrightarrow +\infty \\ e^{y_n} = y_n + n \end{cases}$.
Un exercice de la fiche d'exercices « Limites et continuité » garantit la bonne définition de ces suites, en déterminer des équivalents au voisinage de $+\infty$.

Exercice 16. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 \leqslant u_n \leqslant 1 + \frac{2}{n}$.
2. En déduire que $u_n = 1 + o(1)$:
3. En déduire que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$:
4. En déduire que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$:
5. En déduire que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$: