Développements limités et études locales

Exercice 1 (★). Déterminer les développements limités en 0 de :

1. $\frac{e^x}{1+x}$ à l'ordre 2
2. $\sin^2(x)$ à l'ordre 6
3. $\frac{\cos(x)}{(1+x)^2}$ à l'ordre 4

Exercice 2 (★). Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de :

1. $u_1(x) = \frac{1}{1-2x} - e^{4x}$
2. $u_2(x) = \sqrt{1+x} \times \ln(1+3x)$
3. $u_3(x) = (1+\tan x)^{1/3}$
4. $u_4(x) = \sqrt{1+\sin x}$
5. $u_5(x) = \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^x\right)$

Exercice 3 (★). Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{e^t - e^{-t}}{t}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x(1+x)}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$

Exercice 4 (★★).

1. A l'aide de la formule de Taylor-Young, déterminer le développement limité à l'ordre 1 de tan en $\frac{\pi}{4}$.
2. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)\right]^n$.

Exercice 5 (★).

1. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\frac{1}{\cos(x)}$.
2. En déduire un équivalent en 0 de $\frac{1}{\cos(x)} - 1$.

Exercice 6 (★). Soit $\delta(x) = \frac{\sin^2(x)}{\sqrt{4+x}-2}$.

1. Déterminer un développement limité de $\sqrt{4+x} - 2$ à l'ordre 1 en 0.
2. Déterminer un équivalent lorsque $x \to 0$ de $\delta(x)$.

Exercice 7 (★★). Donner un équivalent simple en 0 pour les fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2\exp(x) - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$
2. $g(x) = \frac{\sin(x) - \sqrt{x+1} + (1+2x)^{\frac{1}{3}}}{1+\ln(1+x) - \exp(x)}$

Exercice 8 (★★). Déterminer un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de $\sin\left(\frac{1}{n+1}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 9 (★★). Déterminer un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, puis de $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Exercice 10 (★). Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Montrer que $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 11 (★★). On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Dérivable ? De classe C^1 ?

Exercice 12 (★). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

1. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 de f. En déduire la tangente au graphe en 0 et sa position par rapport à la courbe au voisinage de 0.
2. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x + 1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. En déduire l'allure de la courbe au voisinage de $+\infty$.

Exercice 13 (★). On considère les suites $(a_n)_{n\geqslant 3}$ et $(b_n)_{n\geqslant 3}$ telles que $\begin{cases} a_n \longrightarrow 0^+ \\ a_n e^{-a_n} = \frac{1}{n} \end{cases}$ et $\begin{cases} b_n \longrightarrow +\infty \\ b_n e^{-b_n} = \frac{1}{n} \end{cases}$, dont on admet qu'elle sont bien définies (cela se montrerait en étudiant la fonction $x \mapsto xe^{-x}$).

1. Montrer que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, puis que $a_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
2. Montrer que $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ puis que $b_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \ln(\ln n) + o(1)$.

Exercice 14 (★★).

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $x_n > 0$ tel que $x_n^n + x_n - 1 = 0$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 1.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $y_n = 1 - x_n$. Montrer que $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\ln(y_n)}{n}$ puis que $-\ln(y_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
5. En déduire un développement asymptotique de x_n à deux termes.

Exercice 15 (★★★). Soit $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{n + v_n}$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 1 : \sqrt{n-1} \leqslant v_n \leqslant 2\sqrt{n}$.
2. En déduire que $v_n = O(\sqrt{n})$.
3. Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.
4. Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$.

Exercice 16 (Type DS)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On étudie les solutions de l'équation (E_n) : $\ln(t) + t = n$, d'inconnue $t \in \mathbb{R}_+^*$. Pour cela, on introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = \ln(t) + t$.

1. **Existence des solutions de** (E_n)
   (a) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet une unique solution, notée x_n
   (c) Que vaut x_1 ?
   (d) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. **Encadrement et limite de** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
   (a) Montrer que $\forall t > 0$, $\ln(t) \leqslant t$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{2} \leqslant x_n \leqslant n$. *Indication : montrer séparément les deux inégalités.*
   (c) Quelle est la limite de x_n quand $n \to +\infty$?
3. **Comportement asymptotique de** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
   (a) Justifier que $x_n \sim n$.
   (b) En déduire que $x_n = n - \ln(n) + o(1)$.
   (c) En déduire la limite de $x_{n+1} - x_n$ lorsque $n \to +\infty$.
   (d) Montrer que $x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.