Exercices PCSI
É.Bouchet

Développements limités et études locales

Exercice 1 (★). Déterminer les développements limités en 0 de :

1. $\frac{e^x}{1+x}$ à l'ordre 2
2. $\sin^2(x)$ à l'ordre 6
3. $\frac{\cos(x)}{(1+x)^2}$ à l'ordre 4

Résultat attendu :

1. $1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$
2. $x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + o(x^6)$
3. $1 - 2x + \frac{5}{2}x^2 - 3x^3 + \frac{85}{24}x^4 + o(x^4)$

Exercice 2 (★). Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de :

1. $u_1(x) = \frac{1}{1-2x} - e^{4x}$
2. $u_2(x) = \sqrt{1+x} \times \ln(1+3x)$
3. $u_3(x) = (1 + \tan x)^{1/3}$
4. $u_4(x) = \sqrt{1 + \sin x}$
5. $u_5(x) = \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^x\right)$

Résultat attendu :

1. $u_1(x) \underset{x\to 0}{=} -2x - 4x^2 + o(x^2)$
2. $u_2(x) \underset{x\to 0}{=} 3x - 3x^2 + o(x^2)$
3. $u_3(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + o(x^2)$
4. $u_4(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$
5. $u_5(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$

Exercice 3 (★). Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{e^t - e^{-t}}{t}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x(1+x)}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$

Résultat attendu :

1. 2
2. $\frac{3}{2}$
3. -1
4. 0
5. $\frac{1}{6}$

Exercice 4 (★★).

1. A l'aide de la formule de Taylor-Young, déterminer le développement limité à l'ordre 1 de tan en $\frac{\pi}{4}$.
2. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)\right]^n$.

Résultat attendu :

1. $\tan(x) \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{=} 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$
2. La limite vaut e^2

Exercice 5 (★).

1. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\frac{1}{\cos(x)}$.
2. En déduire un équivalent en 0 de $\frac{1}{\cos(x)} - 1$.

Résultat attendu :

1. $\frac{1}{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
2. $\frac{1}{\cos(x)} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

Exercice 6 (★). Soit $\delta(x) = \frac{\sin^2(x)}{\sqrt{4+x}-2}$.

1. Déterminer un développement limité de $\sqrt{4+x} - 2$ à l'ordre 1 en 0.
2. Déterminer un équivalent lorsque $x \to 0$ de $\delta(x)$.

Résultat attendu :

1. $\sqrt{4+x} - 2 \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{4} + o(x)$.
2. Un quotient d'équivalents donne $\delta(x) \underset{x\to 0}{\sim} 4x$.

Exercice 7 (★★). Donner un équivalent simple en 0 pour les fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2\exp(x) - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$
2. $g(x) = \frac{\sin(x) - \sqrt{x+1} + (1+2x)^{\frac{1}{3}}}{1 + \ln(1+x) - \exp(x)}$

Résultat attendu :

1. $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{11}{3}x^3$
2. $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{7}{6}x}{-x^2} = -\frac{7}{6x}$

Exercice 8 (★★). Déterminer un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de $\sin\left(\frac{1}{n+1}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Résultat attendu : L'équivalent cherché est $-\frac{1}{n^2}$.

Exercice 9 (★★). Déterminer un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$, puis de $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.
Résultat attendu : Les équivalents cherchés sont $2\sqrt{n}$ puis $\frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Exercice 10 (★). Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Montrer que $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Résultat attendu : $\frac{\sin(x)}{x} \underset{x \to 0}{=} 1 + o(x)$, donc φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$. On calcule ensuite la dérivée sur $\mathbb{R}^*$ pour étudier sa limite en 0 et comparer.

Exercice 11 (★★). On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Dérivable ? De classe C^1 ?
Résultat attendu : f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable et de classe C^1. On le montre en cherchant un développement limité en 0, puis par un calcul de dérivée avant passage à la limite.

Exercice 12 (★). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

1. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 de f. En déduire la tangente au graphe en 0 et sa position par rapport à la courbe au voisinage de 0.
2. Montrer que $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} x + 1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. En déduire l'allure de la courbe au voisinage de $+\infty$.

Résultat attendu :

1. $f(x) \underset{x \to 0}{=} -x - x^2 + o(x^2)$ donc la tangente est d'équation $y = -x$ et la courbe se trouve en dessous.
2. On pose $h = \frac{1}{x}$ pour se ramener en 0 (par valeurs positives), ce qui donne $f(\frac{1}{h}) = \frac{1}{h}\frac{\sqrt{1+h^2}}{1-h}$. Un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\frac{\sqrt{1+h^2}}{1-h}$ permet alors d'obtenir la relation demandée. La courbe admet donc une asymptote d'équation $y = x + 1$ en $+\infty$.

Exercice 13 (★). On considère les suites $(a_n)_{n \geqslant 3}$ et $(b_n)_{n \geqslant 3}$ telles que $\begin{cases} a_n \longrightarrow 0^+ \\ a_n e^{-a_n} = \frac{1}{n} \end{cases}$ et $\begin{cases} b_n \longrightarrow +\infty \\ b_n e^{-b_n} = \frac{1}{n} \end{cases}$, dont on admet qu'elle sont bien définies (cela se montrerait en étudiant la fonction $x \mapsto xe^{-x}$).

1. Montrer que $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, puis que $a_n \underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
2. Montrer que $b_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$ puis que $b_n \underset{n \to +\infty}{=} \ln(n) + \ln(\ln n) + o(1)$.

Résultat attendu : Il suffit de revenir aux définitions du cours.

Exercice 14 (★★).

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $x_n > 0$ tel que $x_n^n + x_n - 1 = 0$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 1.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 1.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $y_n = 1 - x_n$. Montrer que $y_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{-\ln(y_n)}{n}$ puis que $-\ln(y_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.
5. En déduire un développement asymptotique de x_n à deux termes.

Résultat attendu :

1. On utilise le théorème de la bijection.
2. La majoration découle de la question précédente, puis on compare $f_{n+1}(x_n)$ et $f_{n+1}(x_{n+1})$ pour montrer la croissance.
3. On montre la convergence, puis passe à la limite dans une égalité bien choisie pour montrer que la limite ne peut pas être dans $[0, 1[$.
4. Calculs usuels.
5. $x_n = 1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

Exercice 15 (★★★). Soit $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{n + v_n}$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 1 : \sqrt{n-1} \leqslant v_n \leqslant 2\sqrt{n}$.
2. En déduire que $v_n = O(\sqrt{n})$.
3. Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.
4. Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$.

Résultat attendu : On montre la première question par récurrence, puis on revient aux définitions du cours.

Exercice 16 (Type DS)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On étudie les solutions de l'équation $(E_n)\ : \ln(t)+t=n$, d'inconnue $t \in \mathbb{R}_+^*$. Pour cela, on introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t)=\ln(t)+t$.

1. **Existence des solutions de** (E_n)
   (a) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet une unique solution, notée x_n
   (c) Que vaut x_1 ?
   (d) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. **Encadrement et limite de** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
   (a) Montrer que $\forall t>0$, $\ln(t)\leqslant t$.
   (b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{n}{2}\leqslant x_n\leqslant n$. *Indication : montrer séparément les deux inégalités.*
   (c) Quelle est la limite de x_n quand $n\to+\infty$?
3. **Comportement asymptotique de** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
   (a) Justifier que $x_n \sim n$.
   (b) En déduire que $x_n = n-\ln(n)+o(1)$.
   (c) En déduire la limite de $x_{n+1}-x_n$ lorsque $n\to+\infty$.
   (d) Montrer que $x_n = n-\ln(n)+\frac{\ln(n)}{n}+o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

Résultat attendu :

1. (a) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (par somme de fonctions dérivables) et $\forall t>0$, $g'(t)=\frac{1}{t}+1>0$. Donc g croît strictement sur $\mathbb{R}_+^*$. Or g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par théorème de la bijection, g est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $g(\mathbb{R}_+^*)$. Comme $\lim\limits_{x\to0} g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, g est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Comme $n\in\mathbb{R}$, n admet un unique antécédent $g^{-1}(n)$ par g, que l'on note x_n.
   (c) x_1 est l'unique solution de l'équation $g(t)=1$. Or $g(1)=1+\ln(1)=1$. L'unicité donne donc $x_1=1$.
   (d) Par théorème de la bijection, la fonction g^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (car g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$). Donc la suite (explicite) $(g^{-1}(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2. (a) Soit $\varphi : t\mapsto t-\ln(t)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est dérivable, et $\forall t>0$, $\varphi'(t)=1-\frac{1}{t}$. On en déduit les variations. Donc $\forall t>0$, $\varphi(t)\geqslant 1\geqslant 0$, ce qui donne $t\geqslant \ln(t)$.

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

   (b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La question 2a. donne $\ln(x_n)\leqslant x_n$, donc $\ln(x_n)+x_n\leqslant 2x_n$. Or $\ln(x_n)+x_n=n$ (par définition de x_n), donc $n\leqslant 2x_n$.
   D'autre part, par stricte croissance de g sur $\mathbb{R}_+^*$, montrer $x_n\leqslant n$ équivaut à montrer $g(x_n)\leqslant g(n)$, c'est-à-dire $n\leqslant g(n)$. Or $g(n)=\ln(n)+n$. Comme $n\geqslant 1$, on a $\ln(n)\geqslant 0$, donc $g(n)\geqslant n$, donc $x_n\leqslant n$. Variante : x est croissante, donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $x_n\geqslant x_1=1$. Donc $\ln(x_n)\geqslant 0$, donc $x_n\leqslant n$.
   (c) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $x_n\geqslant \frac{n}{2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$. Donc par théorème de comparaison, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

3. (a) $\frac{n}{x_n}=\frac{\ln(x_n)}{x_n}+1\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0+1=1$, par croissances comparées (car $x_n\to+\infty$). Donc $x_n\sim n$.
   (b) $x_n\sim n$, donc $x_n=n+o(n)$. Or $\ln(x_n)+x_n=n$, ce qui donne :
   $$x_n=n-\ln(n+o(n))=n-\ln\big(n(1+o(1))\big)=n-\ln(n)-\ln(1+o(1))=n-\ln(n)+o(1).$$
   La dernière égalité s'obtient car $o(1)$ tend vers 0, donc par composition $\ln(1+o(1))$ tend vers $\ln(1)=0$.
   (c) La question précédente donne $x_{n+1}-x_n=\big((n+1)-\ln(n+1)+o(1)\big)-\big(n-\ln(n)+o(1)\big)$, donc $x_{n+1}-x_n=1-\ln(n+1)+\ln(n)+o(1)=1+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)+o(1)$. Or $\ln(\frac{n}{n+1})\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ln(1)=0$. Donc $x_{n+1}-x_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$.
   (d) On repart des relations $\ln(x_n)+x_n=n$ et $x_n=n-\ln(n)+o(1)$:
   $x_n=n-\ln(n-\ln(n)+o(1))=n-\ln\left[n\left(1-\frac{\ln(n)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]=n-\ln(n)-\ln\left(1-\frac{\ln(n)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.
   Or $\ln(1+x)\underset{x\to0}{=}x+o(x)$ et $-\frac{\ln(n)}{n}+o(\frac{1}{n})\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, donc par composition à droite :
   $\ln\left(1-\frac{\ln(n)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=-\frac{\ln(n)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)+o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)=-\frac{\ln(n)}{n}+o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$, puisque $\frac{\frac{1}{n}}{\frac{\ln(n)}{n}}=\frac{1}{\ln(n)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
   Donc $x_n=n-\ln(n)+\frac{\ln(n)}{n}+o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.