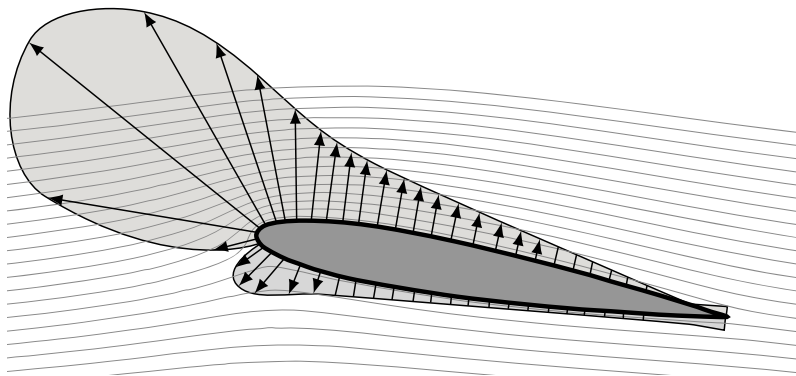


# Modélisation des actions mécaniques



## Objectifs

La finalité de ce cours est de pouvoir modéliser les actions mécaniques agissant entre les solides. On s'intéressera notamment aux cas des solides en contact avec et sans frottement et aux actions à distance. L'objectif est de savoir associer un modèle à une action mécanique et de déterminer la relation entre le modèle local et le modèle global. Cette dernière modélisation servira de base à l'étude de l'équilibre des solides.

## Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Notions d'actions mécaniques</b>  | <b>3</b>  |
| 1.1      | Définition . . . . .   | 3         |
| 1.2      | Classification des actions mécaniques . . . . .  | 3         |
| <b>2</b> | <b>Modèles d'actions mécaniques</b>  | <b>4</b>  |
| 2.1      | Aspect local . . . . .   | 6         |
| 2.2      | Aspect global . . . . .  | 8         |
| <b>3</b> | <b>Modèles de répartition de charges</b>   | <b>10</b> |
| 3.1      | Cas des répartitions volumiques : exemple de la gravité . . . . .                              | 10        |
| 3.2      | Cas des répartitions surfaciques . . . . .   | 15        |
| <b>4</b> | <b>Actions mécaniques transmissibles par les liaisons</b>                                      | <b>17</b> |
| 4.1      | Exemple de construction à partir de l'aspect local pour une liaison cylindre-plan . . . . .    | 17        |
| 4.2      | Construction pratique des actions mécaniques transmissibles par une liaison parfaite . . . . . | 18        |
| <b>5</b> | <b>Modélisation du frottement</b>  | <b>21</b> |
| 5.1      | Frottement et phénomènes tribologiques . . . . .   | 21        |
| 5.2      | Modélisation du frottement de glissement . . . . .   | 23        |
| 5.3      | Modélisation du frottement visqueux . . . . .  | 28        |



# 1 Notions d'actions mécaniques

## 1.1 Définition

### Définition 1.1 (Action mécanique)

Une action mécanique est une interaction mécanique de type force, couple ou moment entre deux systèmes matériels définie par dualité avec la notion de mouvement dans un référentiel galiléen.

D'une façon générale, en milieu isotherme, on appelle action mécanique toute cause physique susceptible :

- de maintenir un corps au repos ;
- de créer, de maintenir ou de modifier le mouvement ;
- de déformer un corps.

On peut par exemple recenser : le pied d'un footballeur qui frappe un ballon, les champs électriques et magnétiques qui deviennent un faisceau d'électrons, le rotor qui entraîne l'axe d'une turbine.

## 1.2 Classification des actions mécaniques

Les actions mécaniques exercées sur un solide  $S$  sont classées en deux familles :

- **actions mécaniques à distance** : elles sont exercées par un champ de pesanteur, un champ électrique ou un champ magnétique, elles s'appliquent à l'ensemble des points d'un solide  $S$  et sont qualifiées d'actions volumiques (figure 1a) ;
- **actions mécaniques de contact** : elles sont exercées au niveau des surfaces de contact dans les liaisons mécaniques ou avec des solides extérieurs, elles s'appliquent sur la frontière  $\partial S$  du solide étudié et sont qualifiées d'actions surfaciques (figure 1b).

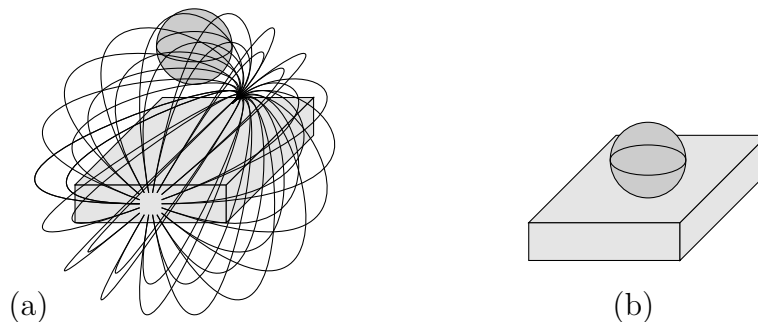


FIGURE 1 – Exemples d'action mécanique à distance (a) et de contact (b).

Quand on a plusieurs solides en présence, on peut définir un ensemble isolé. Dans ce cas, le système matériel  $\Sigma$  considéré (isolé) est délimité par une frontière (surface extérieure) que l'on note  $\partial\Sigma$ . On distingue alors les actions mécaniques extérieures des actions mécaniques intérieures à cet ensemble. L'extérieur du système matériel  $\Sigma$  est, par définition, le complémentaire de  $\Sigma$  par rapport à l'univers matériel, noté  $\bar{\Sigma}$  (figure 2).

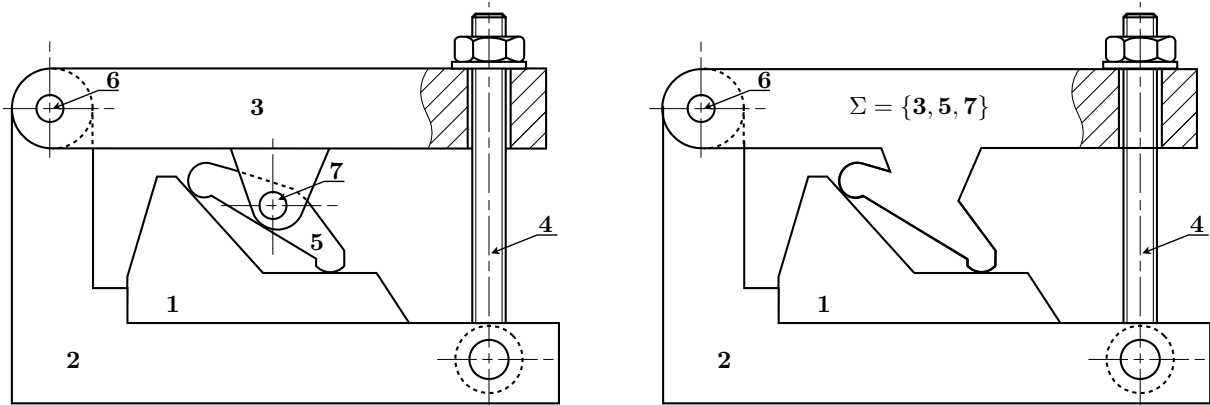


FIGURE 2 – Système complet de bridage (à gauche) et ensemble isolé (à droite). La frontière de l'ensemble isolé est celle du groupe  $\{3, 5, 7\}$ . Les actions mécaniques entre les pièces 3, 5 et 7 sont dites intérieures et les actions mécaniques entre les pièces 5 et 1, 3 et 6 et 3 et 4 sont dites extérieures.

## 2 Modèles d'actions mécaniques

L'analyse des actions mécaniques exercées sur un solide ou un système matériel  $\Sigma$  repose sur deux points de vue différents :

- le **modèle local**, qui permet d'étudier les actions mécaniques élémentaires en chacun des points d'un solide ou d'un système matériel et leurs effets en tout point de la zone où elles s'exercent (étude des pressions de contact, contraintes dans les matériaux, déformation du solide, etc.) ;
- le **modèle global**, qui est construit par association de toutes les actions élémentaires sous forme de torseur d'actions mécaniques. Ce modèle fait disparaître l'effet local des actions mécaniques mais rend son utilisation plus pratique pour l'étude de l'équilibre ou du comportement dynamique d'un solide ou d'un système matériel dans un référentiel galiléen.

Ces deux approches (locales et globales) ne sont pas équivalentes et l'on emploiera l'une ou l'autre suivant l'objectif de l'étude.

### Remarque 2.1 (Local–global)

S'il est toujours possible de passer du local au global en déterminant le torseur d'actions mécaniques à partir de la répartition locale des actions élémentaires, il est important de noter qu'il est impossible de faire le chemin inverse sans faire d'hypothèse sur leur répartition.

L'outil mathématique permettant de relier les modélisations locales et globales est le torseur des actions mécaniques. On note  $\{\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\}$  le torseur des actions mécaniques exercées par  $S_1$  sur  $S_2$ . Comme un torseur est par définition un champ antisymétrique, il permet de traduire sans ambiguïté l'action réciproque :

$$\{\mathcal{T}_{S_2 \rightarrow S_1}\} = -\{\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\}$$

exercée par  $S_2$  sur  $S_1$ . Comme en cinématique, il est toujours possible de calculer les éléments de réduction d'un torseur des actions mécaniques exercées par  $S_1$  sur  $S_2$  en un point  $A$  :

$$\{\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{S_1 \rightarrow S_2}} \\ \overrightarrow{M_{A, S_1 \rightarrow S_2}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{S_1 \rightarrow S_2}} \\ \overrightarrow{M_{A, S_1 \rightarrow S_2}} + \overrightarrow{F_{S_1 \rightarrow S_2}} \wedge \overrightarrow{AB} \end{array} \right\}_B$$

La résultante du torseur est un effort, exprimé en N, et le moment du torseur un moment, exprimé en N·m, pour lequel la formule de changement de point

$$\overrightarrow{M_{B, S_1 \rightarrow S_2}} = \overrightarrow{M_{A, S_1 \rightarrow S_2}} + \overrightarrow{F_{S_1 \rightarrow S_2}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

reste valide. Comme pour les torseurs cinématiques, tout torseur d'actions mécaniques dont la résultante est non nulle possède un axe central.

### Définition 2.1 (Axe central)

L'axe central du torseur des actions mécaniques exercées par  $S_1$  sur  $S_2$  correspond à l'ensemble des points  $A$  où le moment du torseur est colinéaire à la résultante du torseur :

$$\overrightarrow{M_{A, S_1 \rightarrow S_2}} \wedge \overrightarrow{F_{S_1 \rightarrow S_2}} = \vec{0}$$

L'axe central n'existe que si la résultante est non nulle.

### Théorème 2.1

L'ensemble des points  $A$  de l'axe central d'un torseur des actions mécaniques exercées par  $S_1$  sur  $S_2$  est défini à partir d'un point  $M$  quelconque par la relation :

$$\overrightarrow{MA} = \lambda \overrightarrow{F_{S_1 \rightarrow S_2}} - \frac{\overrightarrow{M_{M, S_1 \rightarrow S_2}} \wedge \overrightarrow{F_{S_1 \rightarrow S_2}}}{\overrightarrow{F_{S_1 \rightarrow S_2}} \cdot \overrightarrow{F_{S_1 \rightarrow S_2}}}$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

*Démonstration.* (Voir le cours de cinématique.) □

La plupart du temps, les éléments de réduction d'un torseur d'actions mécaniques en un point quelconque le sont aussi. Par exemple, le torseur des actions mécaniques exercées par  $S_1$  sur  $S_2$  peut s'écrire en un point  $A$  :

$$\{\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{S_1 \rightarrow S_2}} \\ \overrightarrow{M_{A, S_1 \rightarrow S_2}} \end{array} \right\}_A$$

On distinguera toutefois :

- les torseurs dont la résultante est nulle ;
- les torseurs dont le moment est nul sur l'axe central.

Si la résultante d'un torseur d'actions mécaniques est nulle, comme c'est un invariant, elle le sera en tout point. Or, d'après la formule de changement de point, le moment aura la même valeur en tout point est sera alors appelé **couple**, souvent noté  $\mathcal{C}$ .

### Définition 2.2 (Torseur couple)

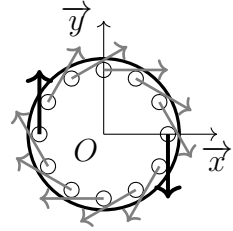
Si la résultante d'un torseur d'actions mécaniques est nulle, alors ce torseur est un torseur couple :

$$\forall M, \{ \mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2} \} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{C}_{S_1 \rightarrow S_2}} \end{array} \right\}, \quad \overrightarrow{\mathcal{C}_{S_1 \rightarrow S_2}} = \overrightarrow{M_{A, S_1 \rightarrow S_2}}$$

Il possède les mêmes éléments de réduction en tous points.

#### Exemple 2.1 (Couple moteur)

Le torseur global correspondant aux actions mécaniques induites par des forces électromagnétiques (volumiques) entre un stator et un rotor de moteur électrique, de rayon  $R$  et possédant  $2n$  voies d'enroulement, est un torseur couple.



Si la résultante d'un torseur d'actions mécaniques est non nulle mais que son moment en un point  $A$  l'est, alors ce point se situe sur l'axe central  $(A, \overrightarrow{F_{S_1 \rightarrow S_2}})$  du torseur.

### Définition 2.3 (Glisseur)

Si le moment d'un torseur d'actions mécaniques est nul en un point  $A$ , alors que sa résultante  $\overrightarrow{F_{S_1 \rightarrow S_2}}$  est non nulle, alors ce torseur est un glisseur :

$$\forall M \in (A, \overrightarrow{F_{S_1 \rightarrow S_2}}), \{ \mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2} \} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{S_1 \rightarrow S_2}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

#### Exemple 2.2

Le torseur global correspondant à une action mécanique induite par l'action de la pesanteur (force volumique) au centre de gravité du solide est un glisseur.

## 2.1 Aspect local

Qu'il s'agisse d'une action mécanique surfacique ou volumique, la modélisation au niveau local utilise la notion d'action mécanique élémentaire. Cette action mécanique élémentaire agit sur une surface ou un volume élémentaire (infinitement petit) au voisinage d'un point courant  $M$ .

### Définition 2.4 (Action mécanique élémentaire)

Une action mécanique élémentaire exercée par un système matériel  $S_1$  sur un système matériel  $S_2$  au voisinage d'un point  $M$  est un glisseur noté :

$$\{ d\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}(M) \} = \left\{ \begin{array}{c} d\overrightarrow{F_{S_1 \rightarrow S_2}}(M) \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

où  $d\overrightarrow{F_{S_1 \rightarrow S_2}}(M)$  est la densité d'effort surfacique (respectivement volumique) exercée au point  $M$  sur un élément de surface  $dS$  (resp. de volume  $dV$ ).

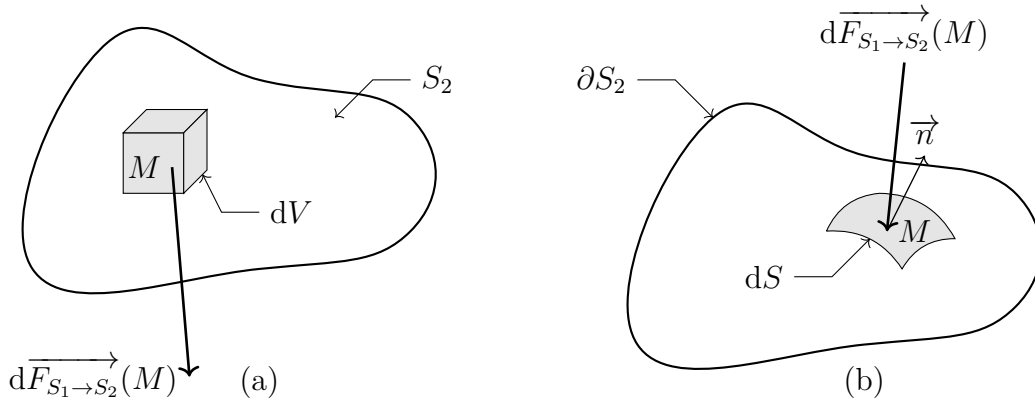


FIGURE 3 – Action mécanique élémentaire volumique (a) et surfacique (b).

La densité d'effort ou effort élémentaire surfacique (resp. volumique) au voisinage d'un point \$M\$ est définie comme :

$$\vec{dF}_{S_1 \rightarrow S_2} = f(M) \vec{u}(M) d\tau$$

où :

- \$f(M)\$ est la norme de l'action mécanique surfacique au niveau du point \$M\$, homogène à une pression de contact et exprimée en \$\text{N}\cdot\text{m}^{-2}\$ (resp. une action mécanique volumique exprimée en \$\text{N}\cdot\text{m}^{-3}\$) ;
- \$\vec{u}(M)\$ est le vecteur unitaire portant la direction de l'effort élémentaire au point \$M\$ ;
- \$d\tau\$ est l'élément géométrique différentiel associé à la surface élémentaire \$dS\$ (resp. volume élémentaire \$dV\$).

Finalement, l'action mécanique élémentaire au point \$M\$ s'écrit :

$$\{d\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}(M)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{dF}_{S_1 \rightarrow S_2}(M) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{c} f(M) \vec{u}(M) d\tau \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M$$

### Remarque 2.2 (Les actions mécaniques élémentaires sont des glisseurs)

En mécanique « classique », on n'envisage pas d'action mécanique élémentaire de type couple et une action mécanique élémentaire s'écrit toujours sous la forme d'un glisseur au point local considéré. De ce fait, on élimine la possibilité d'actions électromagnétiques dans ce cours.

Si une action mécanique élémentaire s'écrit toujours sous la forme d'un glisseur au niveau de son point d'application, il est évidemment possible d'exprimer les éléments de réduction du torseur associé en un autre point pour étudier son influence. Par exemple en un point \$A\$, il vient :

$$\{d\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}(M)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{dF}_{S_1 \rightarrow S_2}(M) \\ \vec{AM} \wedge \vec{dF}_{S_1 \rightarrow S_2}(M) \end{array} \right\}_A$$

Le moment du torseur induit au point  $A$  par l'effort élémentaire exercé au point  $M$  est appelé moment élémentaire. Il est défini par :

$$\overrightarrow{dM}_{A,S_1 \rightarrow S_2}(M) = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{dF}_{S_1 \rightarrow S_2}(M)$$

Comme tout moment, il dépend évidemment du point considéré et il est caractérisé par son axe  $(A, \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{dF}_{S_1 \rightarrow S_2})$  et son intensité en N·m, proportionnelle à l'action mécanique élémentaire et à la distance du point  $A$  par rapport à l'axe central du torseur, à savoir la droite  $(M, \overrightarrow{dF}_{S_1 \rightarrow S_2})$  (longueur notée  $\ell$  sur la figure 4). Le mouvement induit par l'action élémentaire en  $M$  au niveau du point  $A$  est donc une translation suivant la direction de  $\overrightarrow{dF}_{S_1 \rightarrow S_2}$  et une rotation autour d'un axe passant par  $A$  et perpendiculaire au plan défini par les vecteurs  $\overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{dF}_{S_1 \rightarrow S_2}$ .

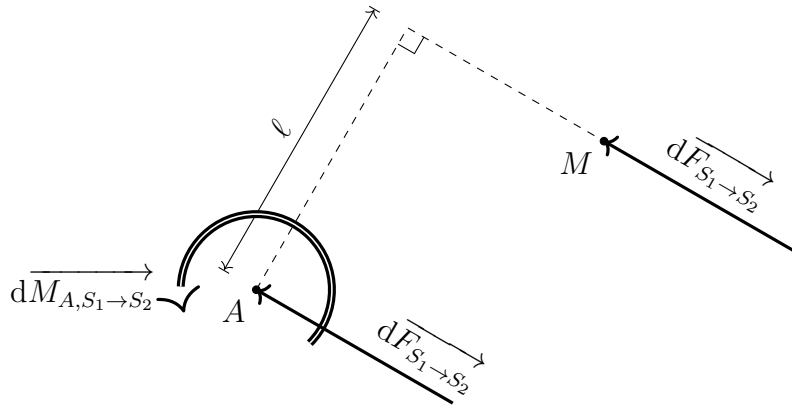


FIGURE 4 – Moment élémentaire induit en  $A$  par un glisseur élémentaire au point  $M$ .

### Remarque 2.3 (Glisseur & axe central)

Un glisseur en un point  $M$  traduit les éléments de réduction (composantes) d'un torseur dont la résultante  $\vec{F} \neq \vec{0}$  est non nulle mais dont le moment en ce point est nul. Par définition, la droite  $(M, \vec{F})$  est l'axe central du torseur ce qui signifie que le moment du torseur sera nul pour tous les points de cette droite.

## 2.2 Aspect global

Au niveau global, l'action mécanique totale est la somme des actions mécaniques élémentaires. On peut la représenter par un torseur défini comme la somme des torseurs d'actions mécaniques élémentaires :

$$\{\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\} = \int_{M \in \mathcal{D}} \{d\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}(M)\}$$

Le domaine d'intégration  $\mathcal{D}$  de tous les points  $M$  sur lesquels s'exerce une action mécanique élémentaire est soit le volume de  $S_2$  pour une action volumique, soit la surface de contact



entre  $S_1$  et  $S_2$  pour une action surfacique. Les éléments de réduction (composantes) du torseur de l'action mécanique totale en un point  $A$ , quelconque, sont la somme de ceux des torseurs des actions mécaniques élémentaires exprimés en ce même point. Comme initialement toutes les actions élémentaires sont exprimées sous forme de glisseurs au niveau de tous les points  $M \in \mathcal{D}$ , il convient de les exprimer au même et unique point  $A$  :

$$\forall M \in \mathcal{D}, \{d\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\} = \left\{ \begin{array}{c} d\overrightarrow{F}_{S_1 \rightarrow S_2}(M) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{c} d\overrightarrow{F}_{S_1 \rightarrow S_2}(M) \\ \overrightarrow{AM} \wedge d\overrightarrow{F}_{S_1 \rightarrow S_2}(M) \end{array} \right\}_A$$

avant d'en faire la somme en ce même point  $A$  :

$$\{\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \int_{M \in \mathcal{D}} d\overrightarrow{F}_{S_1 \rightarrow S_2}(M) \\ \int_{M \in \mathcal{D}} \overrightarrow{AM} \wedge d\overrightarrow{F}_{S_1 \rightarrow S_2}(M) \end{array} \right\}_A$$

Les éléments de réduction du torseur de l'action mécanique totale en un point  $A$ , quelconque, sont donc :

— la résultante :

$$\overrightarrow{F}_{S_1 \rightarrow S_2} = \int_{M \in \mathcal{D}} d\overrightarrow{F}_{S_1 \rightarrow S_2} = \int_{M \in \mathcal{D}} f(M) \vec{u}(M) d\tau$$

dont la norme (force ou effort) s'exprime en N ;

— le moment au point  $A$  :

$$\overrightarrow{M}_{A, S_1 \rightarrow S_2} = \int_{M \in \mathcal{D}} \overrightarrow{AM} \wedge d\overrightarrow{F}_{S_1 \rightarrow S_2} = \int_{M \in \mathcal{D}} f(M) \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}(M) d\tau$$

dont la norme (moment ou couple si la résultante est nulle) s'exprime en N·m.

#### **Remarque 2.4 (Calcul du moment « global » en un point)**

Il est très important de remarquer que l'intégration permettant d'obtenir le moment « global » en un point  $A$  porte sur tous les points  $M \in \mathcal{D}$  et inclut par définition le produit vectoriel  $\overrightarrow{AM} \wedge d\overrightarrow{F}_{S_1 \rightarrow S_2}$  tel que :

$$\overrightarrow{M}_{A, S_1 \rightarrow S_2} = \int_{M \in \mathcal{D}} \overrightarrow{AM} \wedge d\overrightarrow{F}_{S_1 \rightarrow S_2}(M)$$

Il n'y aurait donc pas de sens de mettre en facteur de cette intégrale sur tous les points  $M \in \mathcal{D}$  une expression qui dépende de ces points. Vulgairement :

« Tout ce qui dépend d'un point  $M$  reste sous l'intégrale. »

### 3 Modèles de répartition de charges

La connaissance de l'aspect local est importante pour calculer les contraintes locales internes au matériau (théorie de la pression de Hertz pour les contacts ponctuels ou linéiques, au programme de 2<sup>e</sup> année) ou vérifier que la pression ne dépasse pas la pression limite admissible de matage du matériau (voir dimensionnement des clavettes). Mais elle permet aussi de calculer le torseur global des actions mécaniques qui sera utile pour étudier l'équilibre ou le comportement dynamique du système étudié. Cette partie du cours s'attache donc à décrire la méthode pour passer de l'aspect local à l'aspect global d'une action mécanique.

#### 3.1 Cas des répartitions volumiques : exemple de la gravité

On va montrer ici comment passer de la connaissance locale d'une action volumique au torseur global agissant sur le solide. Pour cela on va prendre l'exemple de l'interaction gravitationnelle entre la terre et un solide  $S$ . La pesanteur est un champ de force volumique supposé constant à la surface de la Terre et valant :

$$f(M) = \rho g$$

où

- $g$  est l'accélération de la pesanteur (9,81 m·s<sup>-2</sup> au sol), supposée constante pour tout solide de dimensions petites par rapport au rayon de la terre (« à taille humaine ») ;
- $\rho$  la masse volumique (kg·m<sup>-3</sup>) du matériau constituant le solide, supposée uniforme (même matière) et homogène (même état de la matière).

L'action élémentaire due à l'action de pesanteur en un point  $M$  quelconque est dirigée suivant la verticale descendante, ici notée  $(-\vec{z})$ , et s'écrit :

$$d\overrightarrow{F}_{\text{pes} \rightarrow S} = -\rho g \vec{z} dV$$

Elle est associée au torseur d'action mécanique élémentaire, successivement réduit au point  $M$  puis au point  $A$  :

$$\{d\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow S}\} = \underset{M}{\left\{ \begin{array}{c} -\rho g \vec{z} dV \\ \vec{0} \end{array} \right\}} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} -\rho g \vec{z} dV \\ -\rho g \overrightarrow{AM} \wedge \vec{z} dV \end{array} \right\}}$$

Le torseur global des actions mécaniques exercées par la pesanteur sur le solide  $S$  s'écrit alors en un point  $A$  :

$$\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow S}\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} -\int_S \rho g \vec{z} dV \\ -\int_S \rho g \overrightarrow{AM} \wedge \vec{z} dV \end{array} \right\}}$$

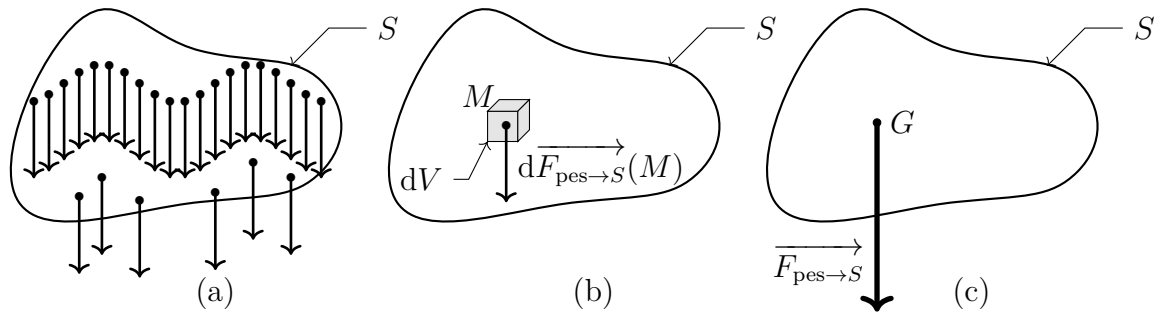


FIGURE 5 – Champ uniforme des actions mécaniques volumiques de pesanteur (a), action mécanique élémentaire au voisinage d’un point  $M$  (b) et action mécanique globale (c).

### 3.1.1 Résultante

On note  $\vec{P}$  la résultante du torseur global. Comme l’action de la pesanteur est supposée identique en tout point, il est possible de mettre la constante  $g$  en facteur. Il vient :

$$\vec{P} = - \int_S \rho g \vec{z} \, dV = -g \underbrace{\left( \int_S \rho \, dV \right)}_m \vec{z} = -mg \vec{z}$$

où on reconnaît la forme globale « classique » du poids d’un solide de masse  $m$ .

#### Définition 3.1 (Masse d’un solide)

La masse d’un solide  $S$ , de masse volumique  $\rho$  est définie par :

$$m = \int_S \rho \, dV = \int_S dm$$

#### Remarque 3.1 (Masse d’un solide homogène)

Si le solide  $S$  est supposé homogène, c’est-à-dire de masse volumique constante  $\rho(M) = \rho$ , pour tout point  $M \in S$ , alors la masse volumique peut « être sortie de l’intégrale », de sorte que la masse du solide soit le simple produit de sa masse volumique  $\rho$  et de son volume  $V$  :

$$m = \rho \underbrace{\int_S dV}_V = \rho V$$

#### Remarque 3.2 (Éléments de masse)

Pour les corps dont :

- une dimension est négligeable (plaques), l’élément de masse peut être défini par une masse surfacique  $\rho_S$  telle que  $dm = \rho_S \, dS$  (exemple : feuilles  $80 \, \text{g} \cdot \text{m}^{-2}$ ) ;
- deux dimensions sont négligeables (fils), l’élément de masse peut être défini par une masse linéique  $\rho_\ell$  telle que  $dm = \rho_\ell \, d\ell$ .

### 3.1.2 Moment en $A$ de l'action mécanique de pesanteur

Le moment global de l'action mécanique de pesanteur exercée sur un solide  $S$  peut être calculé en un point  $A$  quelconque comme :

$$\overrightarrow{M_{A,\text{pes}\rightarrow S}} = - \int_S \rho g \overrightarrow{AM} \wedge \vec{z} \, dV = -g \left( \int_S \rho \overrightarrow{AM} \, dV \right) \wedge \vec{z}$$

Comme la résultante du torseur global est non nulle ( $\vec{P} \neq \vec{0}$ ), le torseur possède un axe central défini par la droite  $(G_0, \vec{P})$  telle que

$$\overrightarrow{G_0A} = \lambda \vec{P} + \frac{\overrightarrow{M_{A,\text{pes}\rightarrow S}} \wedge \vec{P}}{\vec{P} \cdot \vec{P}}$$

avec  $\lambda$  une constante réelle.

#### Théorème 3.1

*Le moment du torseur induit par une action de pesanteur est nul sur l'axe central.*

*Démonstration.* La position de l'axe central est définie à partir d'un point  $A$  quelconque comme :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{G_0A} &= \lambda \vec{P} + \frac{\overrightarrow{M_{A,\text{pes}\rightarrow S}} \wedge \vec{P}}{\vec{P} \cdot \vec{P}} \\ &= -\lambda mg \vec{z} + \frac{1}{m} \left( \int_S \rho \overrightarrow{AM} \, dV \wedge \vec{z} \right) \wedge \vec{z} \\ &= -\lambda mg \vec{z} + \frac{1}{m} \left[ \left( \int_S \rho \overrightarrow{AM} \, dV \cdot \vec{z} \right) \vec{z} - \int_S \rho \overrightarrow{AM} \, dV \right] \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la relation du double produit vectoriel

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

En notant

$$\beta = \frac{1}{m} \left( \int_S \rho \overrightarrow{AM} \, dV \cdot \vec{z} \right) - \lambda mg$$

il vient :

$$\overrightarrow{G_0A} = \beta \vec{z} - \frac{1}{m} \int_S \rho \overrightarrow{AM} \, dV$$

de sorte que le moment au point  $G_0$  puisse être déduit du moment au point  $A$  comme :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{G_0,\text{pes}\rightarrow S}} &= \overrightarrow{M_{A,\text{pes}\rightarrow S}} + \overrightarrow{G_0A} \wedge \vec{P} \\ &= -g \left( \int_S \rho \overrightarrow{AM} \, dV \right) \wedge \vec{z} - mg \left( \beta \vec{z} - \frac{1}{m} \int_S \rho \overrightarrow{AM} \, dV \right) \wedge \vec{z} \\ &= g \left( \underbrace{\int_S \rho \overrightarrow{AM} \, dV - \int_S \rho \overrightarrow{AM} \, dV}_{=0} \right) \wedge \vec{z} - mg \beta \underbrace{\vec{z} \wedge \vec{z}}_{=\vec{0}} = \vec{0} \end{aligned}$$

□

De ce théorème, on en déduit que le torseur global d'une action mécanique de pesanteur exercée sur un solide  $S$  peut être défini comme un glisseur

$$\forall M \in (G_0, \vec{P}), \{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow S}\} = \underset{M}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = -mg \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

En généralisant ce résultat à toute orientation du solide dans ce champ de pesanteur,

### **Théorème 3.2**

*Il existe un unique point  $G$  d'un solide  $S$  tel que, quelle que soit l'orientation de ce dernier dans un champ de pesanteur uniforme  $g \vec{z}$ , le moment du torseur global en ce point, appelé centre de gravité, soit nul.*

*Démonstration.* Commençons par considérer un point  $G$  de l'axe central et un point  $A$  quelconque. Par définition on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{G_{\text{pes} \rightarrow S}}} &= \overrightarrow{M_{A_{\text{pes} \rightarrow S}}} + \overrightarrow{GA} \wedge \vec{P} = \vec{0} \\ \left( \int_S -\rho \overrightarrow{AM} \, dV \right) \wedge g \vec{z} + \overrightarrow{GA} \wedge \left( \int_S -\rho \, dV \right) g \vec{z} &= \vec{0} \\ \left( \int_S -\rho \overrightarrow{AM} \, dV \right) \wedge g \vec{z} + \left( \int_S -\rho \overrightarrow{GA} \wedge g \vec{z} \, dV \right) &= \vec{0} \\ \left( \int_S -\rho (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{GA}) \, dV \right) \wedge g \vec{z} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Comme, cette relation doit être vraie pour toute orientation du solide dans le champ de pesanteur et pour toute intensité  $g$ , on en déduit la relation :

$$\forall \vec{z}, \int_S \rho (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{GA}) \, dV = \vec{0}$$

qui, sachant que le vecteur  $\overrightarrow{AG}$  est constant, peut se récrire :

$$\overrightarrow{AG} \int_S \rho \, dV = \int_S \rho \overrightarrow{AM} \, dV$$

d'où on tire une relation qui définit la position du centre de gravité  $G$  du solide  $S$  à partir d'un point  $A$  quelconque comme :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m} \int_S \rho \overrightarrow{AM} \, dV$$

□

### **Définition 3.2 (Centre d'inertie d'un solide)**

Le centre d'inertie  $G$  d'un solide  $S$ , de masse volumique  $\rho$  est défini par :

$$\int_S \overrightarrow{GM} \, dm = \vec{0}$$

### Proposition 3.1 (Centre d'inertie d'un solide)

Le centre d'inertie  $G$  d'un solide  $S$ , de masse volumique  $\rho$  peut être déterminé à partir d'un point  $O$  quelconque comme :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_S \overrightarrow{OM} dm$$

*Démonstration.* En faisant intervenir le point  $O$ , la relation devient :

$$\begin{aligned} \int_S (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM}) dm &= \vec{0} \\ \int_S \overrightarrow{GO} dm + \int_S \overrightarrow{OM} dm &= \vec{0} \end{aligned}$$

En notant que  $\overrightarrow{OG}$  est un vecteur constant et

$$m = \int_S dm$$

la masse du solide, il vient finalement :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_S \overrightarrow{OM} dm$$

□

### Remarque 3.3 (Centre d'inertie)

Plusieurs points sont à noter :

- si le système matériel est un solide indéformable, le centre d'inertie est un point fixe du solide ;
- si le système matériel possède un élément de symétrie matérielle, plan ou axe de symétrie, aussi bien du point de vue géométrique que du point de vue de la répartition des masses, le centre d'inertie appartient à cet élément de symétrie ;
- le centre d'inertie est confondu avec **centre de gravité** dans le cas d'un champ de pesanteur uniforme ;
- le centre d'inertie d'un système matériel est le barycentre de l'ensemble des points matériels du système affectés de leur masse. Pour un ensemble fini de solides  $S_i$  de masse  $m_i$ , le centre d'inertie  $G$  de l'ensemble matériel vérifie :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{OG}_i}{\sum m_i}$$

Pour résumer, on peut modéliser d'un point de vue global l'action mécanique de pesanteur exercée sur un solide  $S$  comme un glisseur au centre d'inertie  $G$  (voir figure 5) :

$$\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow S}\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = -mg \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

### 3.2 Cas des répartitions surfaciques

On considère deux solides  $S_1$  et  $S_2$  en contact. Le solide  $S_1$  exerce sur le solide  $S_2$  une action mécanique qui empêche leur déplacement relatif (interpénétration) suivant la normale au plan tangent commun  $\Pi$  (figure 6).

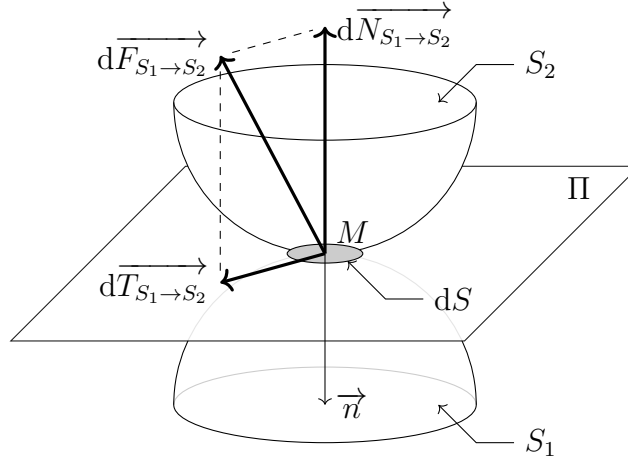


FIGURE 6 – Modèle local d'action mécanique de contact.

L'effort élémentaire peut se décomposer de manière générale (voir § 5.2) en :

$$\overrightarrow{dF_{S_1 \rightarrow S_2}} = \overrightarrow{dN_{S_1 \rightarrow S_2}} + \overrightarrow{dT_{S_1 \rightarrow S_2}}$$

avec

- $\overrightarrow{dN_{S_1 \rightarrow S_2}}$  est l'effort élémentaire porté par la normale  $\vec{n}$  au plan tangent commun  $\Pi$  en  $M$  dirigée vers l'extérieur de la matière à  $S_2$  et telle que  $\overrightarrow{dN_{S_1 \rightarrow S_2}} = dN_{S_1 \rightarrow S_2} \vec{n}$  ;
- $\overrightarrow{dT_{S_1 \rightarrow S_2}}$  est un effort élémentaire dont la direction est dans le plan tangent commun tel que  $\overrightarrow{dT_{S_1 \rightarrow S_2}} \cdot \vec{n} = 0$ .

L'action mécanique élémentaire de  $S_1$  sur  $S_2$  s'écrit alors :

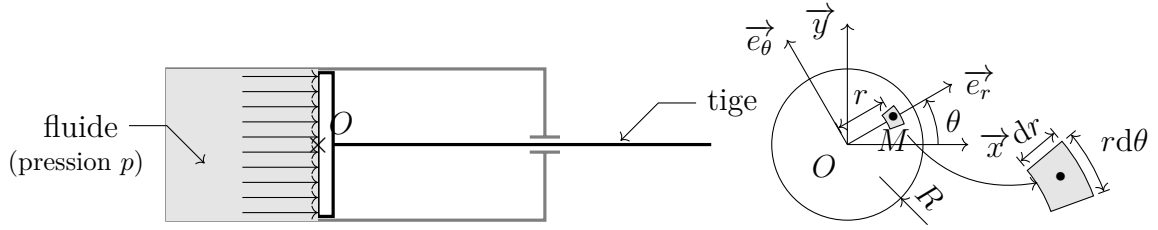
$$\{\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\}_M = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{dF_{S_1 \rightarrow S_2}} = \overrightarrow{dN_{S_1 \rightarrow S_2}} + \overrightarrow{dT_{S_1 \rightarrow S_2}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

L'action mécanique résultante sur toute la surface de contact  $S$  s'écrira en un point  $A$  quelconque :

$$\{\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \int_S \overrightarrow{dF_{S_1 \rightarrow S_2}} = \int_S \overrightarrow{dN_{S_1 \rightarrow S_2}} + \int_S \overrightarrow{dT_{S_1 \rightarrow S_2}} \\ \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{dF_{S_1 \rightarrow S_2}} \end{array} \right\}$$

### Exemple 3.1 (Action mécanique d'un fluide sur le piston d'un vérin)

On souhaite calculer l'action d'un fluide sous pression sur la tige d'un vérin.



L'action d'un fluide au repos sur une surface exerce toujours une seule action normale à cette dernière. On en déduit donc que *l'effort élémentaire est uniquement normal à la surface du disque de contact* et est dû à la pression du fluide, tel que

$$\begin{cases} d\overrightarrow{N}_{\text{fluide} \rightarrow \text{tige}} = -p \vec{n} dS \\ d\overrightarrow{T}_{\text{fluide} \rightarrow \text{tige}} = \vec{0} \end{cases}$$

L'action mécanique élémentaire peut donc être modélisée par le torseur d'action mécanique élémentaire due à la pression du fluide sur la tige :

$$\{d\mathcal{T}_{\text{fluide} \rightarrow \text{tige}}\}_M = \begin{cases} d\overrightarrow{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{tige}} = -p \vec{n} dS \\ \vec{0} \end{cases}$$

Au vu de l'ordre de grandeur usuel du diamètre du disque sur lequel s'exerce la pression du fluide, on peut raisonnablement considérer que la pression est constante (effets de pesanteur négligeables). De même, la normale au disque est constante pour tous points de  $S$ . On a alors, au centre du disque  $O$  :

$$\{\mathcal{T}_{\text{fluide} \rightarrow \text{tige}}\}_O = \begin{cases} \int_S -p \vec{n} dS \\ \int_S \overrightarrow{OM} \wedge (-p \vec{n} dS) \end{cases}$$

En tenant compte du paramétrage  $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$  de tous les points  $M$  par rapport au centre du disque et de l'élément de surface élémentaire  $dS = r dr d\theta$ , il vient :

$$\{\mathcal{T}_{\text{fluide} \rightarrow \text{tige}}\}_O = \begin{cases} -p \vec{n} \int_S dS \\ -p \int_S r \underbrace{\vec{e}_r \wedge \vec{n}}_{-\vec{e}_\theta} dS \end{cases} = \begin{cases} -p \vec{n} \times \left( \int_0^R r dr \right) \times \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \\ -p \times \left( \int_0^R r^2 dr \right) \times \left( \int_0^{2\pi} \vec{e}_\theta d\theta \right) \end{cases}$$

Comme  $\vec{e}_\theta$  n'est pas constant pour tous les points  $M$  de  $S$ , on doit le décomposer dans une base fixe :  $\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{x} + \cos \theta \vec{y}$ . Dès lors comme les fonctions sinus et cosinus sont  $2\pi$ -périodiques et de valeur moyenne nulle, leur intégration sur un tour l'est aussi. En notant  $S = \pi R^2$  la surface du disque, il vient finalement :

$$\{\mathcal{T}_{\text{fluide} \rightarrow \text{tige}}\}_O = \begin{cases} -pS \vec{n} \\ \vec{0} \end{cases}$$



## 4 Actions mécaniques transmissibles par les liaisons

Dans cette partie, on cherche à décrire le torseur des actions mécaniques transmissibles par les liaisons élémentaires. Deux approches vont être traitées :

1. dans la première, nous allons partir de l'aspect local, c'est-à-dire, faire une hypothèse de répartition de pression pour retrouver l'expression globale du torseur des actions mécaniques transmissibles ;
2. dans un second temps, une approche plus rapide basée sur la dualité entre torseur cinématique et torseur des actions mécaniques transmissibles nous permettra de trouver l'expression du torseur des actions mécaniques pour l'ensemble des liaisons standards.

### 4.1 Exemple de construction à partir de l'aspect local pour une liaison cylindre-plan

On veut ici calculer le torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison en partant de l'aspect local du contact. On va donc se donner une répartition de pression entre les deux solides. Afin de faciliter la démonstration, on basera l'étude sur l'exemple de deux solides  $S_1$  et  $S_2$  en liaison cylindre-plan de normale  $\vec{z}$  et de direction  $\vec{x}$ . La liaison sera considérée sans frottement et donc la charge élémentaire normale au plan.

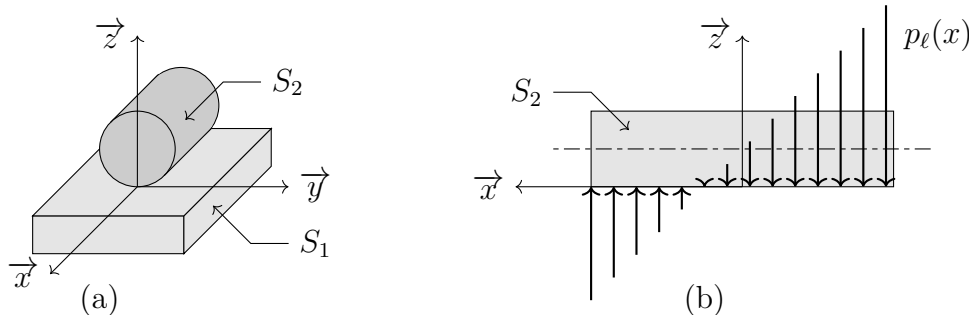


FIGURE 7 – Paramétrage du contact cylindre-plan (a) et action mécanique linéique (b).

On suppose que la charge répartie s'écrit à partir de la charge linéique sous la forme :

$$p_\ell(x) = ax + b$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes qui s'expriment respectivement en  $\text{N}\cdot\text{mm}^{-2}$  et  $\text{N}\cdot\text{mm}^{-1}$ . La charge linéique  $p_\ell$  s'exprime en  $\text{N}\cdot\text{mm}^{-1}$ . Au point  $M$  d'abscisse  $x$ , le torseur élémentaire des actions mécaniques s'écrit :

$$\{\mathcal{D}_{S_1 \rightarrow S_2}\}_M = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{dF_{S_1 \rightarrow S_2}} = -p_\ell(x) dx \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

En notant  $G$  le milieu de la ligne de contact, le torseur global s'exprime en ce point comme la somme de toutes les actions élémentaires sur la ligne de contact :

$$\{\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} -p_\ell(x) dx \vec{z} \\ \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \overrightarrow{GM} \wedge (-p_\ell(x) dx \vec{z}) \end{array} \right\}$$

#### 4.1.1 Résultante

Calculons la résultante des actions mécaniques de  $S_1$  sur  $S_2$  :

$$\overrightarrow{F_{S_1 \rightarrow S_2}} = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} -p_\ell(x) dx \vec{z} = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} -(a \cdot x + b) dx \vec{z} = -b\ell \vec{z}$$

On pose  $Z = -b\ell$  d'où :

$$\overrightarrow{F_{S_1 \rightarrow S_2}} = Z \vec{z}$$

#### 4.1.2 Moment de l'action mécanique en $G$ de $S_1$ sur $S_2$

Par définition, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{G, S_1 \rightarrow S_2}} &= \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \overrightarrow{GM} \wedge (-p_\ell(x) dx \vec{z}) = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} (x \vec{x}') \wedge (-ax - b) dx \vec{z} \\ &= \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} (ax^2 + bx) dx \vec{y} = \left[ \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} \right]_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \vec{y} = \frac{a\ell^3}{12} \vec{y} \end{aligned}$$

On pose  $M = a\ell^3/12$  d'où :

$$\overrightarrow{M_{G, S_1 \rightarrow S_2}} = M \vec{y}$$

#### Torseur de la liaison cylindre-plan

Finalement, le torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison cylindre-plan de normale  $\vec{z}$  et de direction  $\vec{x}$  est de la forme :

$$\{\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\} = \left\{ \begin{array}{l} Z \vec{z} \\ M \vec{y} \end{array} \right\}_G$$

## 4.2 Construction pratique des actions mécaniques transmissibles par une liaison parfaite

L'approche précédente est un peu « lourde » en pratique pour trouver le torseur des actions mécaniques transmissibles entre deux pièces en liaison. Il est plus facile d'utiliser la dualité entre le torseur des actions mécaniques transmissibles et le torseur cinématique.

**Définition 4.1 (Puissance dissipée dans une liaison)**

La puissance mécanique dissipée dans une liaison entre deux solides  $S_1$  et  $S_2$  est égale au co-moment du torseur des actions mécaniques transmissibles et du torseur cinématique :

$$\mathcal{P}_{1\leftrightarrow 2} = \{\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\} \otimes \{\mathcal{V}_{S_2/S_1}\} \leq 0$$

**Définition 4.2 (Liaison parfaite)**

Une liaison entre deux solides  $S_1$  et  $S_2$  est dite parfaite si elle est sans jeu et si elle ne dissipe pas d'énergie :

$$\mathcal{P}_{1\leftrightarrow 2} = \{\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\} \otimes \{\mathcal{V}_{S_2/S_1}\} = 0 \quad (1)$$

Si  $\{\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{1\rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{A,1\rightarrow 2}} \end{array} \right\}}$  et  $\{\mathcal{V}_{S_2/S_1}\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{A,2/1}} \end{array} \right\}}$  l'équation (1) se traduit par :

$$\overrightarrow{R_{1\rightarrow 2}} \cdot \overrightarrow{V_{A,2/1}} + \overrightarrow{M_{A,1\rightarrow 2}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = 0$$

Reprenons l'exemple de la liaison cylindre-plan de normale  $\vec{z}$  et de direction  $\vec{x}$ . Le torseur cinématique du mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  s'écrit en un point  $G$  de la ligne de contact :

$$\{\mathcal{V}_{S_2/S_1}\} = \underset{G}{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \omega_x \vec{x} + \omega_z \vec{z} \\ \overrightarrow{V_{G,2/1}} = V_x \vec{x} + V_y \vec{y} \end{array} \right\}}$$

On ne postule rien sur le torseur des actions mécaniques transmissibles et on le prend pour l'instant « complet » :

$$\{\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\} = \underset{G}{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{1\rightarrow 2}} = X \vec{x} + Y \vec{y} + Z \vec{z} \\ \overrightarrow{M_{G,1\rightarrow 2}} = L \vec{x} + M \vec{y} + N \vec{z} \end{array} \right\}}$$

La relation (1) se traduit alors dans ce cas par :

$$\overrightarrow{R_{1\rightarrow 2}} \cdot \overrightarrow{V_{G,2/1}} + \overrightarrow{M_{G,1\rightarrow 2}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = 0$$

soit, en remplaçant :

$$XV_x + YV_y + L\omega_x + N\omega_z = 0$$

Puisque ce résultat est valable quels que soient  $\omega_x$ ,  $\omega_z$ ,  $V_x$  et  $V_y$ , on en déduit :

$$X = Y = 0 \quad \text{et} \quad L = N = 0$$

Finalement :

$$\{\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\} = \underset{G}{\left\{ \begin{array}{c} Z \vec{z} \\ M \vec{y} \end{array} \right\}}$$

Évidemment il n'y a pas à refaire la démonstration à chaque fois. Pour la translation (moment du torseur cinématique et cause en résultante du torseur des actions transmissibles) les termes non nuls dans le torseur cinématique seront nuls dans le torseur des efforts transmissibles, et inversement. De même pour la rotation. On récapitule cela dans le tableau 1 donnant le torseur des actions mécaniques transmissibles pour chaque liaison.

TABLE 1 – Torseurs des actions mécaniques transmissibles par les liaisons élémentaires.

| Liaison         | Schématisation spatiale | Schématisation plane | Torseur des actions mécaniques transmissibles   |
|-----------------|-------------------------|----------------------|---|
| Glissière       |                         |                      | $\left\{ \begin{array}{c} Y\vec{v} + Z\vec{w} \\ L\vec{u} + M\vec{v} + N\vec{w} \end{array} \right\}_B$   |
| Pivot           |                         |                      | $\left\{ \begin{array}{c} X\vec{u} + Y\vec{v} + Z\vec{w} \\ M\vec{v} + N\vec{w} \end{array} \right\}_B$<br>$\star \forall B \in (A, \vec{u})$   |
| Hélicoïdale     |                         |                      | $\left\{ \begin{array}{c} X\vec{u} + Y\vec{v} + Z\vec{w} \\ -\frac{p}{2\pi}X\vec{u} + M\vec{v} + N\vec{w} \end{array} \right\}_B$<br>pas $p$ à droite, $\star \forall B \in (A, \vec{u})$ |
| Pivot glissant  |                         |                      | $\left\{ \begin{array}{c} Y\vec{v} + Z\vec{w} \\ M\vec{v} + N\vec{w} \end{array} \right\}_B$<br>$\star \forall B \in (A, \vec{u})$  |
| Appui-plan      |                         |                      | $\left\{ \begin{array}{c} X\vec{n} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A, \vec{M}_A \cdot \vec{n} = 0$  |
| Sphérique       |                         |                      | $\left\{ \begin{array}{c} X\vec{u} + Y\vec{v} + Z\vec{w} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$   |
| Cylindre-plan   |                         |                      | $\left\{ \begin{array}{c} X\vec{n}_1 \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A, \left\{ \begin{array}{l} \vec{M}_A \cdot \vec{n}_1 = 0 \\ \vec{M}_A \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{array} \right.$    |
| Sphère-cylindre |                         |                      | $\left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C, \vec{R} \cdot \vec{u} = 0$   |
| Sphère-plan     |                         |                      | $\forall M \in (C, \vec{n}), \left\{ \begin{array}{c} X\vec{n} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M$   |

$\star$  Même forme de torseur, mais les valeurs des composantes de moment changent.

## 5 Modélisation du frottement

Dans le cas des liaisons parfaites (voir table 1), toutes les pressions de contact entre deux solides étaient orthogonales à leur plan tangent commun. Dans cette partie, on envisage le cas où on modélise le frottement au contact, ce qui va modifier l'orientation de la pression au contact.

### 5.1 Frottement et phénomènes tribologiques

La science qui étudie le frottement se nomme la tribologie. Ce mot, construit à partir des racines grecques *tribein* (frotter) et *logos* (discours, étude), a été proposé en 1968 par G. Salomon pour désigner la science qui étudie les phénomènes susceptibles de se produire sur les surfaces de systèmes matériels en contact, immobiles ou animés de mouvements relatifs. En effet, les propriétés dégradées des solides sont bien plus souvent causées par celles des surfaces que celles des volumes. Les enjeux de la tribologie sont de plusieurs natures : assurer le bon fonctionnement et la fiabilité des machines ou améliorer leur rendement et leur durée de vie, diminuer les bruits de fonctionnement liés aux contacts mécaniques, diminuer le coût d'obtention des surfaces frottantes, etc. Il est important de reconnaître le caractère pluridisciplinaire de la tribologie où le terme de couplage multi-physique prend tout son sens avec la science des matériaux, la physico-chimie des surfaces, la mécanique des solides et des surfaces, la thermique et la thermodynamique, la thermo-chimie et la thermo-métallurgie.

#### 5.1.1 Système tribologique

Un système tribologique est un système mécanique constitué de deux solides  $S_1$  et  $S_2$  en contact et animés d'un mouvement relatif. Ces deux solides, évoluant dans un milieu ambiant donné, peuvent être séparés par un film appelé troisième corps. Ce troisième corps peut être introduit dans le contact par entraînement cinématique (lubrifiants solides ou liquides) ou par formation *in situ* (particules détachées).

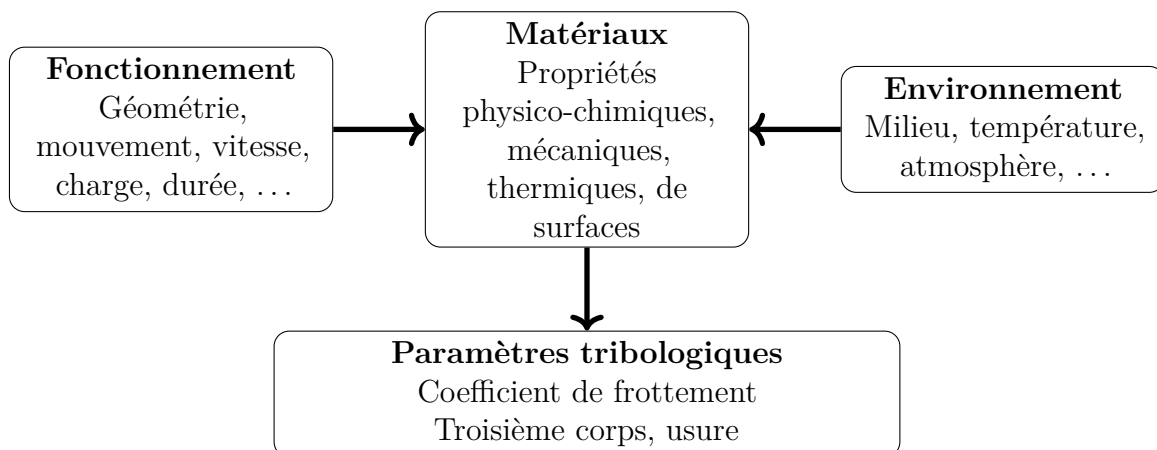


FIGURE 8 – Synoptique général d'un système tribologique.

L'interface d'un système tribologique est le siège de phénomènes dissipatifs, regroupés sous le terme générique de **frottement**.

TABLE 2 – Les différents modes de dissipation d'énergie en frottement.

| <i>Énergie dissipée</i> | <i>Mode de dissipation</i>                                 |
|-------------------------|--|
| Énergie de déformation  | Déformation élastiques et plastiques                       |
| Énergie de rupture      | Fissuration, formation de débris, arrachements, écaillages |
| Énergie thermique       | Échauffements, transferts de chaleur                       |
| Énergie chimique        | Adhésion, oxydation  |
| Énergie acoustique      | Vibrations, bruits   |
| Énergie électrique      | Électrisation, accumulation de charges électro-chimiques   |
| Énergie lumineuse       | Étincelles, rayonnement, photoémission                     |

La quantification de ces énergies dissipées est primordiale, car elles conditionnent l'échauffement de l'interface, modifient la géométrie du contact (usure) et conditionnent les écoulements des surfaces en contact.

### 5.1.2 Surfaces

La surface d'un corps est la limite physique de son volume, le séparant du milieu extérieur. Elle correspond à une discontinuité dans l'arrangement périodique des éléments. Le terme de surface représente une couche d'épaisseur comprise entre  $10^{-2}$  et  $10^{-6}$  mm. La composition chimique et les propriétés mécaniques de cette zone sont souvent différentes de celles du cœur du matériau. La surface est l'endroit le plus perturbé d'une pièce.

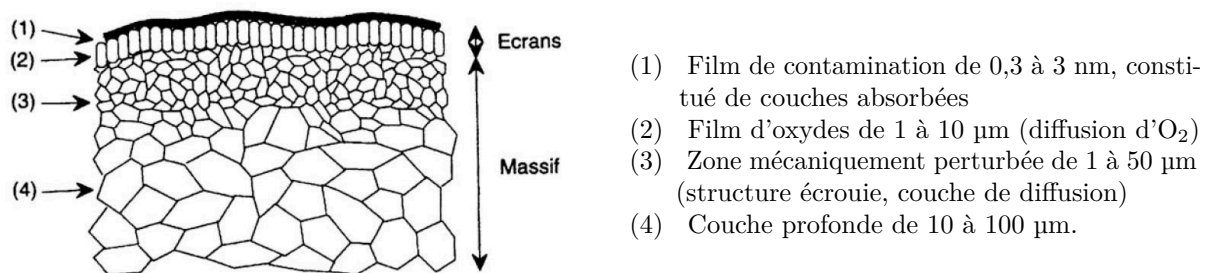


FIGURE 9 – Coupe théorique d'une surface.

Il est important de noter que les surfaces en contact ne peuvent jouer des rôles symétriques et que la surface de contact réelle n'est pas la surface apparente mais un ensemble de zones discrètes. Lorsque l'usure est limitée à l'enlèvement des films de surface, elle est qualifiée d'usure « douce ». Une fois détruits, ces écrans peuvent se reconstituer par réaction avec l'environnement. Quand ce n'est pas le cas et que l'usure s'étend au massif, elle est qualifiée d'usure « sévère » voire « destructrice ».

### 5.1.3 Le concept de troisième corps

Le mouvement entre deux surfaces peut produire des débris qui commencent leur vie dans le contact. S'ils restent piégés dans le contact, le contact passe de deux à trois corps. Ces débris définissent le troisième corps, par opposition aux deux premiers corps du contact. Il apparaît intéressant de préciser les définitions des premiers et troisième corps.

**Premiers corps** ce sont les matériaux qui bordent le contact. Ils interviennent par leur géométrie et leurs propriétés thermo-élastiques définissant les zones élémentaires de contact. Ils réagissent aux sollicitations de contact soit *(i)* par changements de phases ou de structures qui conduisent, par fragmentation, au détachement de particules, soit *(ii)* par fissuration. L'adhésion, l'abrasion et l'écaillage apparaissent dans un second temps.

**Troisième corps** c'est le volume de matière présent entre les premiers corps. C'est un « opérateur » de transmission de charge accommodant la différence de vitesse des premiers corps. Il est dit naturel lorsqu'il est issu ou se forme sur au moins un des deux premiers corps et artificiel lorsqu'il est apporté dans le contact (lubrification solide ou fluide). Un troisième corps naturel implique une période de formation par détachement de particules des premiers corps.

Un revêtement ou traitement de surface fait partie intégrante des premiers corps alors que les couches d'oxydes, de pollution présentes initialement sur les premiers corps font partie du troisième corps.

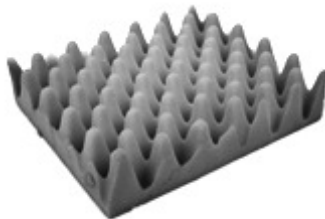
### 5.1.4 Mécanismes de dégradation des surfaces

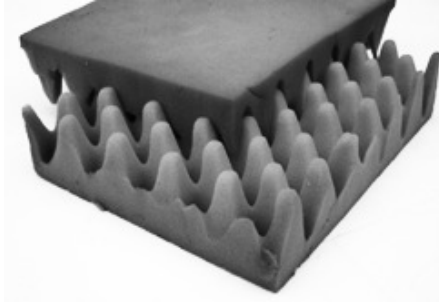
L'usure est un ensemble de phénomènes complexes évoluant de façon non-linéaire en fonction des sollicitations et du temps. Les effets de tous les paramètres influents sont non directement additifs : l'usure est un processus « sur-additif ». On reconnaît trois étapes d'usure d'une pièce :

1. le rodage où la vitesse d'usure très importante au début diminue progressivement ;
2. le fonctionnement normal avec une vitesse d'usure relativement faible et constante ;
3. le vieillissement où la vitesse d'usure croît jusqu'à la ruine.

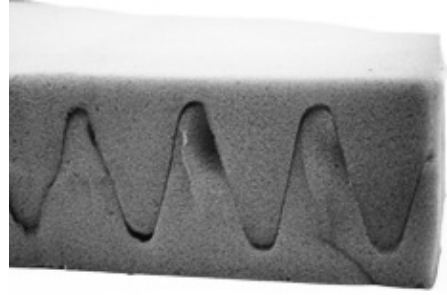
## 5.2 Modélisation du frottement de glissement

Pour appréhender le phénomène de frottement de glissement, considérons une vision idéalisée d'une surface réelle d'un solide comme illustrée ci-dessous.





(a) Vue globale



(b) zoom

FIGURE 10 – Assemblage de deux surfaces réelles idéalisées.

Lorsque l'on met deux surfaces de ce type en contact, on obtient l'assemblage des figures 10. Pour pouvoir déplacer le bloc supérieur, il faut donc vaincre une force de résistance due aux aspérités de la surface. C'est cette force qui est associée au frottement de glissement.

De façon plus formelle maintenant. On considère deux solides en contact avec frottement. Le solide  $S_1$  exerce sur le solide  $S_2$  une action mécanique qui empêche leur déplacement relatif (interpénétration) suivant la normale  $\vec{n}$  au plan tangent commun  $\Pi$ . Au voisinage de chaque point  $M$  en contact, on définit une surface élémentaire  $dS$  sur laquelle s'exerce l'action élémentaire de contact (voir figure 6) :

$$d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = f(M) \vec{u} dS$$

que l'on peut décomposer en une action normale et une action tangentielle telles que :

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} &= d\vec{N}_{1 \rightarrow 2} + d\vec{T}_{1 \rightarrow 2} \\ d\vec{N}_{1 \rightarrow 2} &= -p(M) \vec{n}(M) dS \\ d\vec{T}_{1 \rightarrow 2} &= q(M) \vec{t}(M) dS \end{aligned}$$

avec :

- $p(M)$  la pression de contact au point  $M$  en  $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$  ;
- $\vec{n}(M)$  le vecteur unitaire normal au plan tangent commun dirigé vers l'extérieur du solide isolé ;
- $q(M)$  la répartition tangentielle de l'effort en  $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$  ;
- $\vec{t}(M)$  un vecteur unitaire contenu dans le plan tangent et portant la direction de l'action tangentielle.

Pour déterminer complètement la fonction de répartition surfacique, il faut déterminer trois inconnues  $p(M)$ ,  $q(M)$  et la direction  $\vec{t}(M)$ . Les lois de Coulomb permettent de déterminer la direction de l'action tangentielle et une relation entre  $p(M)$  et  $q(M)$  suivant que les deux solides en contact sont ou non en mouvement.



### 5.2.1 Lois de Coulomb

Les lois de Coulomb sont un premier modèle permettant de représenter les efforts de frottement. Il en existe d'autres plus compliqués, mais Coulomb (1736–1806) a formalisé le premier le frottement en termes de rugosité et d'aspérités élastiques<sup>1</sup>.

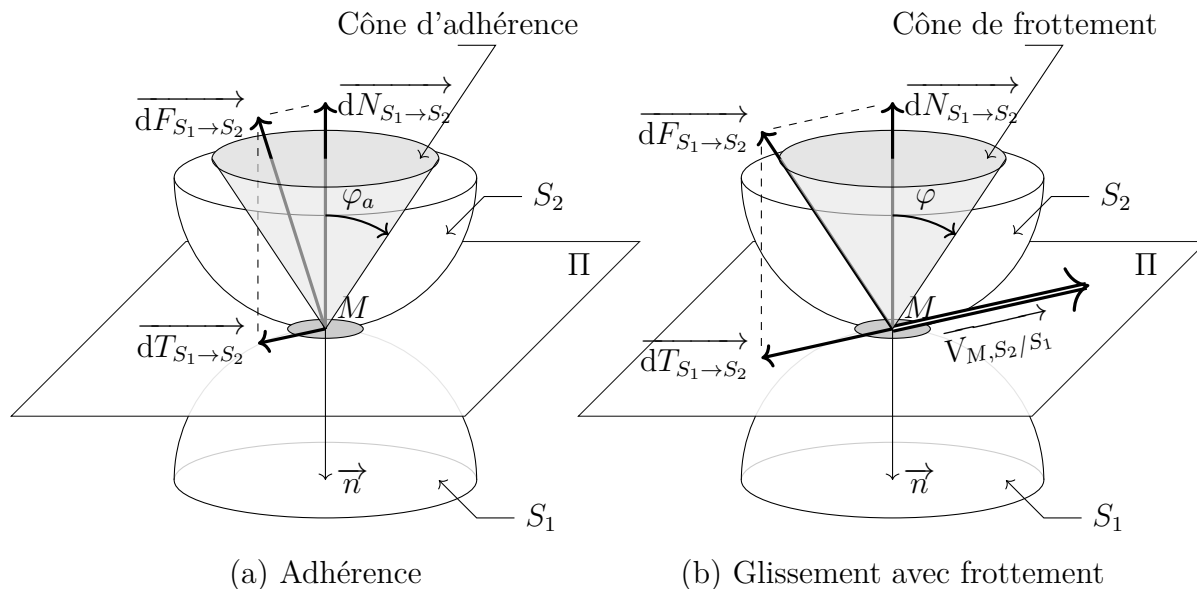


FIGURE 11 – Modèle de Coulomb des actions mécaniques des contacts adhésifs (a) ou glissants avec frottement (b).

Les lois de Coulomb distinguent deux cas pour modéliser le frottement de glissement que nous avons illustré sur la figure 11 :

#### 1. Contact glissant

Si les deux solides sont en mouvement l'un par rapport à l'autre, on a  $\overrightarrow{V_{M,2/1}} \neq \vec{0}$ . Dans ce cas, la direction de l'effort tangentiel  $\overrightarrow{dT_{1 \rightarrow 2}}$  est opposée à la vitesse de glissement  $\overrightarrow{V_{M,2/1}} \neq \vec{0}$  (équations 2a et 2b) et la norme de l'effort tangentiel  $q(M)$  est proportionnelle à la norme  $p(M)$  de l'effort normal  $\overrightarrow{dN_{1 \rightarrow 2}}$  (équation 2c) au point de contact  $M$ . On a donc :

$$\text{(direction)} \quad \overrightarrow{dT_{1 \rightarrow 2}} \wedge \overrightarrow{V_{M,2/1}} = \vec{0} \quad (2a)$$

$$\text{(sens)} \quad \overrightarrow{dT_{1 \rightarrow 2}} \cdot \overrightarrow{V_{M,2/1}} \leq 0 \quad (2b)$$

$$\text{(norme)} \quad \|\overrightarrow{dT_{1 \rightarrow 2}}\| = f \|\overrightarrow{dN_{1 \rightarrow 2}}\| \quad (2c)$$

avec  $f$  le coefficient de frottement en  $M$  entre  $S_1$  et  $S_2$ . Il correspond à la tangente du demi-angle au sommet  $\varphi$  du cône de frottement tel que  $f = \tan(\varphi)$ , de sorte que l'action élémentaire de contact  $\overrightarrow{dF_{1 \rightarrow 2}}$  au point  $M$  soit située sur le cône de frottement en  $M$  dans la direction opposée à  $\overrightarrow{V_{M,2/1}}$ .

1. COULOMB, C. A. *Théorie des machines simples*, 1821. [\[Lire sur Gallica\]](#)

## 2. Contact adhérent

Si les deux solides n'ont pas de mouvement relatif, la vitesse de glissement est nulle ( $\overrightarrow{V_{M,2/1}} = \overrightarrow{0}$ ) et il n'y a donc pas de glissement entre les solides  $S_1$  et  $S_2$ . Dans ce cas, on ne connaît pas la direction de l'effort élémentaire de contact  $\overrightarrow{dF_{1 \rightarrow 2}}$  mais l'on sait seulement qu'il se situe à l'intérieur d'un cône de demi-angle au sommet  $\varphi_a$ , appelé cône d'adhérence. On introduit alors le coefficient d'adhérence  $f_a = \tan \varphi_a$ . Dans ce cas, les lois de Coulomb s'écrivent :

$$\|\overrightarrow{dT_{1 \rightarrow 2}}\| \leq f_a \|\overrightarrow{dN_{1 \rightarrow 2}}\|$$

Pour calculer  $\|\overrightarrow{dT_{1 \rightarrow 2}}\|$  et ainsi déterminer complètement  $\overrightarrow{dT_{1 \rightarrow 2}}$ , il est nécessaire de se placer à la limite de glissement de sorte à se ramener au cas précédent (figure 12b).

Nous avons illustré de façon schématique et sous forme globale les deux situations décrites par les lois de Coulomb et la situation de limite de glissement sur la figure 12.

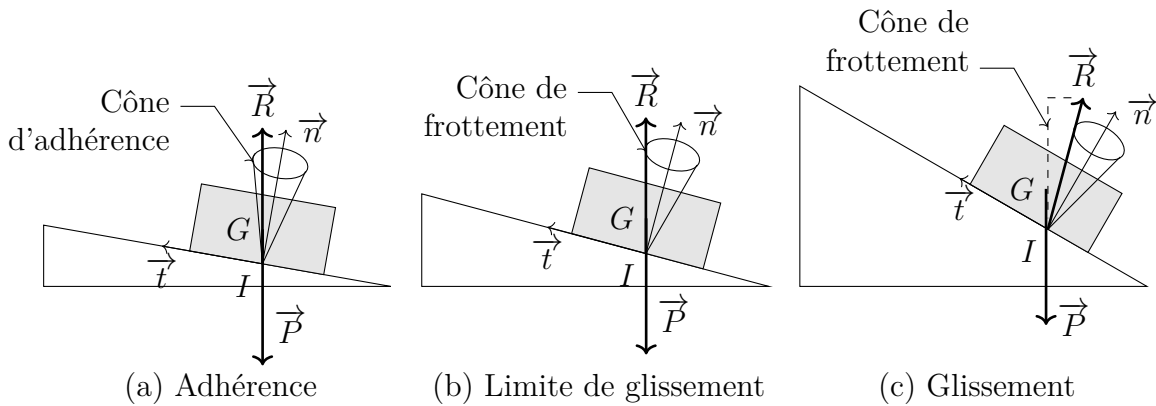


FIGURE 12 – Position des problèmes de contacts avec frottement.

### Remarque 5.1 (Coefficient de frottement ou d'adhérence ?)

Il a été constaté de façon expérimentale et sur de nombreux couples de matériaux que les coefficients d'adhérence  $f_a$  et de frottement  $f$  sont très proches :  $f_a$  est légèrement supérieur à  $f$ . Aussi, dans la pratique, il est courant de ne considérer qu'un seul type de coefficient : le coefficient de frottement.

## 5.2.2 Paramètres influant les coefficients d'adhérence et de frottement

Le coefficient d'adhérence et le coefficient de frottement sont déterminés expérimentalement. Ils dépendent essentiellement :

- des matériaux utilisés au niveau du contact ;
- de la forme et de la rugosité des surfaces de contact ;
- de la lubrification ;
- de la déformation locale induite par la pression de contact ;
- de la vitesse de glissement et de l'échauffement de l'interface associé.

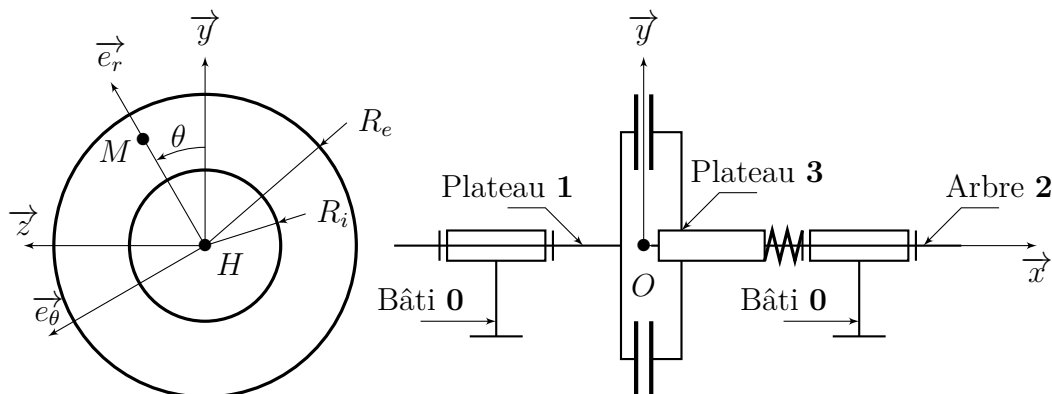
Tous ces paramètres font que les valeurs des coefficients d'adhérence ou de frottement sont des valeurs « moyennes » à manipuler avec précaution. Nous donnons dans la table 3 quelques valeurs de ces coefficients pour des interfaces usuelles.

TABLE 3 – Valeurs des coefficients d'adhérence et de frottement d'interfaces usuelles.

| Matières en contact<br>(avec rugosités favorables et des vitesses inférieures à 0,5 m/s) |                        | Coefficient d'adhérence $f_a$ |                | Coefficient de frottement $f$ |                |
|--|------------------------|-------------------------------|----------------|-------------------------------|----------------|
|  |                        | $f_a$ à sec                   | $f_a$ lubrifié | $f$ à sec                     | $f$ lubrifié   |
| Acier  | Acier                  | 0,2                           | 0,11           | 0,09                          | 0,07           |
|  | Fonte                  | 0,12                          | 0,09           | 0,1                           | 0,06           |
|  | Bronze                 | 0,2                           | 0,1            | 0,17                          | 0,06           |
|  | Aluminium              | 0,5                           | 0,3            | 0,4                           | 0,1            |
|  | Nylon                  | 0,18                          |                | 0,15                          | 0,1            |
|  | Palier lisse auto-lub. |                               | 0,06           |                               | 0,04           |
|  | PTFE                   | 0,15                          |                | 0,08                          | 0,05           |
|  | Caoutchouc (courroie)  | 0,5                           |                |                               |                |
|  | Bois (chêne)           | 0,65                          | 0,3            | 0,26                          | 0,08           |
|  | Garniture de frein     |                               |                | 0,4                           | 0,2 (à éviter) |
|  | Polyamide              | 0,4                           |                | 0,36                          |                |
|  | Glace                  | 0,027                         |                | 0,014                         |                |
| Fonte  | Bronze                 | 0,23                          | 0,14           | 0,21                          | 0,1            |
|  | Fonte                  | 0,24                          | 0,14           | 0,21                          | 0,1            |
| Bronze   | Bronze                 | 0,2                           | 0,1            | 0,18                          | 0,07           |
| Plastique  | Plastique              |                               |                |                               |                |
| Pneumatique  | Route                  | 0,6                           | 0,3 (Pluie)    |                               |                |
| Bois   | Bois                   | 0,5                           | 0,4            | 0,3                           | 0,2            |

### Exemple 5.1 (Couple transmissible par un embrayage)

On considère un embrayage constitué d'un plateau (1) en rotation par rapport au bâti (0). La transmission du couple est assurée par contact avec le plateau (3) en liaison glissière avec l'arbre (2), lui-même en liaison pivot avec le bâti et sur lequel est exercé un effort axial.



On note :

- $R_i$  et  $R_e$  : rayons intérieurs et extérieurs de la zone de friction ;
- $N$  l'effort axial (presseur) suivant l'axe  $(O, \vec{x})$  ;
- $f$  le coefficient de frottement de l'interface garniture–disque ;
- $\vec{\Omega}_{3/1} = \omega \vec{x}$  la vitesse de rotation du plateau (3) par rapport au plateau (1) ;
- $p$  la pression de contact, pas forcément uniforme.

On considère une répartition uniforme de pression  $p(r) = p$  où la coordonnée  $r \in [R_1; R_2]$  permet de repérer la position d'un point  $M$ , tel que  $\vec{OM} = r \vec{e}_r + a \vec{x}$ .

### 5.3 Modélisation du frottement visqueux

Dans le cas de deux solides en mouvement l'un par rapport à l'autre, on a  $\vec{V}_{M,2/1} \neq \vec{0}$ . Comme le contact est dissipatif, la direction de l'effort tangentiel  $\vec{dT}_{1 \rightarrow 2}$  est opposée à la vitesse de glissement  $\vec{V}_{M,2/1} \neq \vec{0}$  et on a

$$\vec{dT}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{V}_{M,2/1} \leq 0$$

Si la norme de l'effort tangentiel (s'opposant au mouvement relatif des deux solides) dépend de leur vitesse relative, alors le frottement est dit visqueux. On a donc :

$$\vec{dT}_{1 \rightarrow 2} = -f \left( \|\vec{V}_{M,2/1}\| \right) \vec{V}_{M,2/1}$$

où  $f$  est une fonction traduisant le frottement visqueux entre  $S_1$  et  $S_2$ . En pratique, on distinguera plusieurs régimes selon la vitesse relative du contact :

- régime laminaire, à faible vitesse, avec une force proportionnelle à la vitesse, telle que :

$$\vec{dT}_{1 \rightarrow 2} = -\mu \vec{V}_{M,2/1}$$

où  $\mu$  est le coefficient de frottement visqueux, constant ;

- régime turbulent, à vitesse plus élevée, avec une force proportionnelle au carré de la vitesse, avec une relation de la forme :

$$\vec{dT}_{1 \rightarrow 2} = -k \|\vec{V}_{M,2/1}\| \vec{V}_{M,2/1}$$

On parle de frottement quadratique. Par exemple, dans le cas d'un écoulement dans un fluide de masse volumique  $\rho$ , on a  $k = \frac{\rho}{2} C_x dS$ ,  $C_x$  est le coefficient de traînée, fonction de la géométrie (le plus souvent mesuré en soufflerie) ;

- aux vitesses les plus élevées (mais inférieures à la vitesse du son  $\sim 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ), avec des relations de la forme :

$$\vec{dT}_{1 \rightarrow 2} = -k \left( \|\vec{V}_{M,2/1}\| \right)^{n-1} \vec{V}_{M,2/1}, \quad n \geq 2$$

\* \*  
\*