

# Probabilités

Cours de É. Bouchet – PCSI

5 février 2025

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Expériences aléatoires</b>	<b>2</b>
1.1	Contexte et vocabulaire probabiliste . . . . .	2
1.2	Système complet d'événements . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Espaces probabilisés finis</b>	<b>3</b>
2.1	Définition et premier exemple . . . . .	3
2.2	Détermination d'une probabilité . . . . .	4
2.3	Propriétés . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Probabilités conditionnelles</b>	<b>5</b>
3.1	Définition . . . . .	5
3.2	Formule des probabilités composées . . . . .	5
3.3	Formule des probabilités totales . . . . .	5
3.4	Formule de Bayes . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Indépendance d'événements</b>	<b>6</b>
4.1	Indépendance de deux événements . . . . .	6
4.2	Indépendance d'une famille finie d'événements . . . . .	7

# 1 Expériences aléatoires

## 1.1 Contexte et vocabulaire probabiliste

### Définition 1.1 (Expérience aléatoire, univers)

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat n'est pas connu à l'avance. L'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience est noté  $\Omega$  et est appelé **l'univers** de l'expérience.

### Définition 1.2 (Événement)

Soit  $\Omega$  un univers fini. On appelle **événement** tout élément de  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

**Remarque.** Dans le cas d'un univers fini (seul cas envisagé en PCSI), un événement est un sous-ensemble de  $\Omega$ .

**Exercice 1.** On lance un dé à six faces. On note  $A$  l'événement "obtenir un 6" et  $B$  l'événement "obtenir un nombre pair". Déterminer l'univers associé, puis les écritures ensemblistes de  $A$  et  $B$ .

**Exercice 2.** On lance deux dés : un rouge et un noir. On note  $A$  l'événement "obtenir un double 6",  $B$  l'événement "obtenir un double" et  $C$  l'événement "obtenir au moins un 6". Déterminer l'univers associé, puis les écritures ensemblistes de  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

**Exercice 3.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On lance une pièce  $n$  fois, avec la convention que 1 représente pile et 0 face. On note  $A$  l'événement "n'obtenir que des piles",  $B$  l'événement "obtenir un pile au second lancer" et  $C$  l'événement "obtenir au moins un pile". Déterminer l'univers associé, puis les écritures ensemblistes de  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

**Exercice 4.** Soit  $(n, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$ . On effectue  $n$  tirages successifs avec remise d'une boule, dans une urne de  $N$  boules numérotées de 1 à  $N$ . On note  $A$  l'événement "ne jamais obtenir la boule  $N$ " et  $B$  l'événement "toujours tirer le même numéro". Déterminer l'univers associé, puis les écritures ensemblistes de  $A$  et  $B$ .

**Remarque.** Le vocabulaire des événements est lié à celui des ensembles :

Vocabulaire des événements	Vocabulaire des ensembles	Notation
<b>événement élémentaire</b>	singleton	$\{\omega\}$ , avec $\omega \in \Omega$
<b>événement contraire</b> de $A$	complémentaire de $A$	$\bar{A} = \Omega \setminus A$
<b>événement certain</b>	ensemble $\Omega$	$\Omega$
<b>événement impossible</b>	ensemble vide	$\emptyset$
les événements $A$ et $B$ sont réalisés	on est dans l'intersection de $A$ et $B$	$A \cap B$
les événements $A$ ou $B$ sont réalisés	on est dans la réunion de $A$ et $B$	$A \cup B$
les événements $A$ et $B$ sont <b>incompatibles</b>	les ensembles $A$ et $B$ sont disjoints	$A \cap B = \emptyset$
l'événement $A$ implique l'événement $B$	l'ensemble $A$ est inclus dans l'ensemble $B$	$A \subset B$

**Exemple.** Soit  $\Omega$  un univers fini,  $B$  un événement et  $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  une famille d'événements.

- $\bigcup_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} A_i$  correspond à l'événement : au moins un des événements  $A_i$  est réalisé ( $A_1$  ou  $A_2$  ou ... ou  $A_n$ ).
- $\bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} A_i$  correspond à l'événement : les événements  $A_i$  sont tous réalisés ( $A_1$  et  $A_2$  et ... et  $A_n$ ).
- $\overline{\bigcup_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} A_i} = \bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \bar{A}_i$  correspond à l'événement : aucun des événements  $A_i$  n'est réalisé.
- $\overline{\bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} A_i} = \bigcup_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \bar{A}_i$  correspond à l'événement : au moins un des événements  $A_i$  n'est pas réalisé.

5.  $\bigcup_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (B \cap A_i) = B \cap \left( \bigcup_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} A_i \right)$  correspond à l'événement : l'événement  $B$  est réalisé, ainsi qu'au moins un des événements  $A_i$ .
6.  $\bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (B \cup A_i) = B \cup \left( \bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} A_i \right)$  correspond à l'événement : l'événement  $B$  est réalisé ou tous les événements  $A_i$  sont réalisés.

## 1.2 Système complet d'événements

### Définition 1.3 (Système complet d'événements)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Omega$  un univers fini et  $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ . On dit que  $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est un **système complet d'événements** de  $\Omega$  lorsque :

- les événements  $A_i$  sont deux à deux incompatibles :  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$ .
- les événements  $A_i$  recouvrent l'univers :  $\bigcup_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} A_i = \Omega$ .

**Remarque.** Cela correspond (en vocabulaire ensembliste) à la notion de partition d'un ensemble.

**Remarque.** De manière évidente,

- $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$  est un système complet d'événements de  $\Omega$ .
- Si  $A \subset \Omega$  alors  $(A, \overline{A})$  est un système complet d'événements de  $\Omega$ .

**Exemple.** Soit  $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket$  l'univers associé à un lancer de dé.

- $(\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\})$  est un système complet d'événements de  $\Omega$ .
- $(\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\})$  est un système complet d'événements de  $\Omega$ .
- $(\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\})$  est un système complet d'événements de  $\Omega$ .
- $(\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6\})$  est un système complet d'événements de  $\Omega$ .

### Proposition 1.4 (Décomposition d'un événement sur un système complet d'événements)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Omega$  un univers fini et  $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  un système complet d'événements. Tout événement  $B$  peut se décomposer comme  $B = \bigcup_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (B \cap A_i)$ , où les événements  $B \cap A_i$  sont incompatibles deux à deux.

**Remarque.** Ce résultat est pratique quand on cherche à faire apparaître des disjonctions de cas.

## 2 Espaces probabilisés finis

### 2.1 Définition et premier exemple

#### Définition 2.1 (Probabilité)

Soit  $\Omega$  un univers fini. On appelle **probabilité** toute application  $P$  définie de  $\mathcal{P}(\Omega)$  dans  $[0, 1]$ , vérifiant  $P(\Omega) = 1$  et telle que si  $A$  et  $B$  sont deux événements incompatibles alors  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

**Remarque.** On montre ensuite par récurrence que pour toute famille d'événements  $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  deux à deux incompatibles,

$$P \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

En particulier, si  $(A_1, \dots, A_n)$  est un système complet d'événements de  $\Omega$ ,  $\sum_{i=1}^n P(A_i) = P \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) = P(\Omega) = 1$ .

### Définition 2.2 (Espace probabilisé)

Si  $P$  est une probabilité, on dit que  $(\Omega, P)$  est un **espace probabilisé**.

### Définition 2.3 (Probabilité uniforme)

Soit  $\Omega$  un univers fini. L'application  $P$  qui à un événement  $A$  associe  $\frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$  est une probabilité, appelée **probabilité uniforme**.

**Remarque.** La relation  $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$  est rencontrée au lycée sous la forme  $\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}$ . On parle aussi de situation d'équiprobabilité (car tous les événements élémentaires ont la même probabilité).

**Exemple.** On lance un dé équilibré. La probabilité d'obtenir le numéro  $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$  est alors  $\frac{\text{Card}(\{i\})}{\text{Card}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)} = \frac{1}{6}$ .

**Exemple.** Une urne contient  $n \in \mathbb{N}^*$  boules identiques numérotées de 1 à  $n$ . On en tire une au hasard : la probabilité que ce soit la boule numéro  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  est alors  $\frac{\text{Card}(\{i\})}{\text{Card}(\llbracket 1, n \rrbracket)} = \frac{1}{n}$ .

**Exercice 5.** On lance deux dés équilibrés de couleurs différentes (un noir et un rouge), quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 6 ?

## 2.2 Détermination d'une probabilité

### Définition 2.4 (Distribution de probabilités)

Soit  $E$  un ensemble fini. On appelle **distribution de probabilités** sur  $E$  toute famille d'éléments de  $\mathbb{R}_+$  indexée par  $E$  et dont la somme est égale à 1.

**Exemple.** Soit  $E = \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose  $\forall i \in E, p_i = \frac{1}{n}$ . Alors  $(p_i)_{i \in E}$  forme une distribution de probabilités.

### Proposition 2.5 (Détermination d'une probabilité sur les événements élémentaires)

Soit  $\Omega$  un univers fini et  $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$  une distribution de probabilités sur  $\Omega$ .  
Il existe une et une seule probabilité  $P$  sur  $\Omega$  telle que  $\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) = p_\omega$ .

**Remarque.** On a au passage montré que pour tout événement  $A, P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ .

**Exercice 6.** On lance un dé pipé à 6 faces qui donne 1 avec probabilité  $\frac{1}{4}$  et chacune des autres faces avec probabilité  $\frac{3}{20}$ . Calculer la probabilité d'obtenir une face impaire.

## 2.3 Propriétés

### Proposition 2.6 (Lien avec les opérations sur les événements)

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé et  $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ . Alors :

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ ,
- $P(\emptyset) = 0$ ,
- Si  $A \subset B$ , alors  $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ ,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

### Proposition 2.7 (Croissance de $P$ )

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé.  $P$  est une application croissante (au sens de l'inclusion) :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, \quad A \subset B \implies P(A) \leq P(B).$$

**Exercice 7.** On effectue une succession de pile ou face. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $A_n$  l'événement "il y a au moins un pile dans les  $n$  premiers lancers" et  $u_n = P(A_n)$ . Montrer que la suite  $u$  est convergente.

### 3 Probabilités conditionnelles

#### 3.1 Définition

**Définition 3.1** (Probabilité conditionnelle)

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé et soit  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$  tel que  $P(B) \neq 0$ . On définit un nouvel espace probabilisé  $(\Omega, P_B)$  en posant :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

On appelle  $P_B$  la **probabilité conditionnelle** relative à  $B$  et  $P_B(A)$  la probabilité de  $A$  sachant  $B$ .

**Remarque.** On utilise parfois la notation  $P(A|B)$  à la place de  $P_B(A)$ .

**Remarque.** Soit  $A$  et  $B$  deux événements avec  $P(B) \neq 0$ . Alors  $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$ . Le conditionnement donne donc une méthode pour calculer certaines probabilités d'intersections.

**Remarque.** Quand  $P(B) = 0$ , on ne sait pas définir  $P_B(A)$ . On décide par convention que  $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$  reste quand même vraie. Cette convention se justifie car si  $P(B) = 0$ , la croissance de  $P$  donne les inégalités  $0 \leq P(A \cap B) \leq P(B)$ , donc  $P(A \cap B) = 0$ .

**Exercice 8.** Un sac contient cinq boules : trois noires et deux blanches. On y tire deux boules successivement sans remise. Quelle est la probabilité qu'elles soient noires toutes les deux ?

#### 3.2 Formule des probabilités composées

**Proposition 3.2** (Formule des probabilités composées)

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  une famille d'événements. Alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

**Exercice 9.** On tire trois fois de suite, sans remise, dans une urne composée de 7 boules blanches et 6 rouges. Pour  $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ , on pose  $B_i$  = "le  $i$ -ème tirage donne une boule blanche" et  $R_i$  = "le  $i$ -ème tirage donne une boule rouge". Calculer  $P(B_1 \cap B_2 \cap R_3)$ .

#### 3.3 Formule des probabilités totales

**Proposition 3.3** (Formule des probabilités totales)

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(A_1, \dots, A_n)$  un système complet d'événements. Alors pour tout événement  $B$ ,

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P_{A_i}(B).$$

**Remarque.** En particulier soit  $A$  et  $B$  deux événements. Comme  $(A, \bar{A})$  est un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B).$$

**Exercice 10.** On considère trois urnes  $U_1, U_2$  et  $U_3$ . On choisit une urne au hasard, et on pioche une boule dedans. On suppose que  $\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ , l'urne  $U_i$  contient  $i$  boules blanches et 3 boules noires. Quelle est la probabilité que la boule piochée soit noire ?

### 3.4 Formule de Bayes

#### Proposition 3.4 (Formule de Bayes)

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé et soit  $A, B$  deux événements tels que  $P(B) \neq 0$ . Alors :

$$P_B(A) = \frac{P(A) P_A(B)}{P(B)} = \frac{P(A) P_A(B)}{P(A) P_A(B) + P(\bar{A}) P_{\bar{A}}(B)}.$$

**Exercice 11.** Un laboratoire propose un test de dépistage d'une maladie, qui touche une personne sur 100 000 :

- lorsque le test est appliqué à une personne malade, le test est positif dans 99,8% des cas.
- lorsqu'il est appliqué à une personne saine, il est négatif dans 99,6% des cas.

Sachant que le test est positif, quelle est la probabilité que la personne soit réellement malade ?

## 4 Indépendance d'événements

### 4.1 Indépendance de deux événements

#### Définition 4.1 (Indépendance de deux événements)

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé et soit  $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ . On dit que  $A$  et  $B$  sont **indépendants** lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) P(B).$$

**Remarque.** ATTENTION, ne pas confondre INDÉPENDANCE et INCOMPATIBILITÉ :

- L'indépendance ne peut se juger qu'en rapport à la probabilité.  $A$  et  $B$  sont indépendants pour  $P$  lorsque  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .
- L'incompatibilité est une notion ensembliste, qui ne dépend pas de la probabilité.  $A$  et  $B$  sont incompatibles lorsque  $A \cap B = \emptyset$  et on a alors (mais c'est une conséquence) :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

**Exercice 12.** On dispose de deux pièces, une équilibrée et une truquée. On lance un dé équilibré à 6 faces :

- si on obtient le chiffre 1, on lance deux fois la pièce équilibrée ;
- si on obtient un chiffre différent de 1, on lance deux fois la pièce truquée (pile avec probabilité  $\frac{1}{3}$ ).

On note  $A$  = "obtenir pile au premier lancer de la pièce",  $B$  = "obtenir pile au second lancer de la pièce" et  $C$  = "le lancer du dé donne le chiffre 1". Étudier l'indépendance de  $A$  et  $B$  pour  $P$  et  $P_C$ .

#### Proposition 4.2 (Indépendance et probabilité conditionnelle)

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé et soit  $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$  tels que  $P(A) \neq 0$ . Les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si  $P(B) = P_A(B)$ .

#### Proposition 4.3 (Complémentaire et indépendance)

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé et soit  $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $A$  et  $B$  sont indépendants.
- $A$  et  $\bar{B}$  sont indépendants.
- $\bar{A}$  et  $B$  sont indépendants.
- $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont indépendants.

**Remarque.** Ce résultat se généralisera sans difficulté au cas de  $n$  événements.

## 4.2 Indépendance d'une famille finie d'événements

### Définition 4.4 (Indépendance d'une famille d'événements)

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé et soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $(A_i)_{i \in [1, n]}$  est une **famille d'événements (mutuellement indépendants)** si pour tout  $J \subset [1, n]$ ,  $P\left(\bigcap_{k \in J} A_k\right) = \prod_{k \in J} P(A_k)$ .

**Remarque.** ATTENTION : vérifier  $P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n P(A_k)$  n'est pas suffisant. Pas plus qu'il ne suffit de vérifier que les événements sont indépendants deux à deux.

**Exercice 13.** On effectue un lancer de pile ou face. Déterminer une famille d'événements  $(A, B, C)$  qui vérifient  $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ , mais qui ne forment pas une famille d'événements mutuellement indépendants.

**Exercice 14.** On lance deux fois une pièce équilibrée. Déterminer une famille d'événements  $(A, B, C)$  qui sont indépendants deux à deux, mais qui ne forment pas une famille d'événements mutuellement indépendants.