Probabilités

Exercice 1 (★). Soit A, B et C trois évènements d'un même espace probabilisé (Ω, P). Simplifier les évènements suivants :

1. $A \cap (A \cap B)$
2. $A \cup (A \cap B)$
3. $A \cap (A \cap B \cap C)$
4. $B \cup (A \cap B \cap C)$
5. $\overline{A} \cap (A \cap B)$
6. $\overline{A} \cap (A \cup B)$

Résultat attendu :

1. $A \cap B$
2. A
3. $A \cap B \cap C$
4. B
5. $\emptyset$
6. $\overline{A} \cap B$

Exercice 2 (★). Soit A, B et C trois évènements d'un même espace probabilisé (Ω, P). À l'aide d'opérations sur les ensembles, exprimer les événements suivants en fonction de A, B et C :

1. $A_1 =$ "l'un au moins des trois évènements se réalise"
2. $A_2 =$ "A se réalise, mais pas B et C"
3. $A_3 =$ "un et un seul des trois évènements se réalise"
4. $A_4 =$ "au moins deux des trois évènements se réalisent"
5. $A_5 =$ "exactement deux des trois évènements se réalisent"
6. $A_6 =$ "aucun des trois évènements ne se réalise"
7. $A_7 =$ "deux au plus se réalisent"

Résultat attendu :

1. $A_1 = A \cup B \cup C$
2. $A_2 = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
3. $A_3 = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$
4. $A_4 = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
5. $A_5 = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$
6. $A_6 = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
7. $A_7 = \overline{A \cap B \cap C}$

Exercice 3 (★). Un étudiant connaît une proportion $p \in]0,1[$ du programme. Lors du contrôle, si l'étudiant ne connaît pas la réponse, il répond au hasard parmi 3 choix possibles. La réponse à une question étant bonne, quelle est la probabilité que l'étudiant connaisse effectivement la réponse ?
Résultat attendu : La probabilité vaut $\frac{3p}{2p+1}$, par formule des probabilités totales et formule de Bayes.

Exercice 4 (★). Trois urnes contiennent des boules noires et blanches.
- L'urne U_1 contient 3 noires et 2 blanches.
- L'urne U_2 contient 4 noires et 6 blanches.
- L'urne U_3 contient 1 noires et 4 blanches.

On choisit au hasard une urne et on y pioche une boule.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ?
2. Sachant qu'elle est blanche, quelle est la probabilité que l'urne utilisée ait été U_1 ?

Résultat attendu : Les probabilités valent $\frac{3}{5}$ (formule des probabilités totales) et $\frac{2}{9}$ (formule de Bayes).

Exercice 5 (★). Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, qu'on tire successivement sans remise. Soit $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer la probabilité que la i-ème boule tirée porte le numéro i
Résultat attendu : La probabilité vaut $\frac{1}{n}$, par formule des probabilités composées et télescopage.

Exercice 6 (★★). Une urne contient 3 boules rouges et 3 boules blanches. On tire deux boules au hasard, que l'on met dans un sac. Puis on tire au hasard une de ces deux boules.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?
2. Sachant qu'elle l'est, quelle est la probabilité que la boule encore dans le sac le soit aussi ?

Résultat attendu : Les probabilités recherchées valent $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{5}$.

Exercice 7 (★★). Pour monter un appareil, on utilise des pièces provenant de deux fournisseurs A et B. La fiabilité (probabilité de fonctionnement sans défaillance) d'un tel appareil durant une année est de 0.9 s'il est monté uniquement avec des pièces du fournisseur A ; de 0.7 s'il est monté uniquement avec des pièces du fournisseur B ; et de 0.8 s'il est monté avec un mélange des pièces des deux fournisseurs A et B. De plus, les pièces du fournisseur A sont utilisées dans 80% des appareils et celles du fournisseur B dans 50% des appareils. Un appareil est extrait au hasard de la chaîne de montage. Calculer la fiabilité de l'appareil pour une période d'un an.
Résultat attendu : La probabilité recherchée vaut $\frac{83}{100}$.

Exercice 8 (★). On lance $n \in \mathbb{N}^*$ fois une pièce dont la probabilité de donner pile est $p \in]0,1[\setminus \{\frac{1}{2}\}$.

1. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. On pose E_k l'événement « le premier pile est au k-ième lancer ». Calculer $P(E_k)$.
2. Soit E l'événement « on tire au moins un pile ». En utilisant la question précédente, calculer $P(E)$.

Résultat attendu : On trouve $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P(E_k) = (1-p)^{k-1}p$ et $P(E) = 1-(1-p)^n$.

Exercice 9 (★). Dans une usine, un service contrôle les colis destinés à la livraison. Pour chaque colis, ce contrôle est effectué indépendamment par deux personnes. Chaque contrôleur détecte un colis non conforme dans 90 pour cent des cas. On sait d'autre part que 5 pour cent des colis en moyenne sont non conformes.
On note A l'événement "le colis n'est pas conforme" et C_i l'événement "le contrôleur numéro i détecte la non conformité du colis".

1. Quelle est la probabilité qu'un colis soit non conforme et ne soit pas détecté ?
2. Quelle est la probabilité qu'un colis soit non conforme et soit détecté ?
3. Quelle est la probabilité qu'un colis soit déclaré bon pour la livraison ?

Résultat attendu :

1. $\frac{5}{10000}$
2. $\frac{495}{10000}$
3. $\frac{9505}{10000}$

Exercice 10 (★). On lance n fois une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir au plus une fois face ?
Résultat attendu : La probabilité vaut $\frac{1+2n}{2^n}$.

Exercice 11 (★★). On dispose de deux dés A et B.
— Le dé A a 4 faces rouges et 2 blanches.
— Le dé B a 2 faces rouges et 4 blanches.
On commence par choisir aléatoirement un de ces deux dés : A avec probabilité $\frac{1}{3}$ et B avec probabilité $\frac{2}{3}$. Une fois le dé choisi, on effectue plusieurs lancers, sans changer de dé.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une face rouge au premier lancer ?
2. On a obtenu rouge aux 2 premiers lancers. Quelle est la probabilité d'avoir utilisé le dé A ?
3. On a obtenu rouge aux n premiers lancers. Quelle est la probabilité d'avoir utilisé le dé A ? Comment se comporte cette probabilité lorsque $n \to +\infty$?
4. On a obtenu rouge aux n premiers lancers. Quelle est la probabilité d'obtenir rouge au $(n+1)$-ème ? Comment se comporte cette probabilité lorsque $n \to +\infty$?

Résultat attendu :

1. $\frac{4}{9}$
2. $\frac{2}{3}$
3. $\frac{2^n}{2^n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
4. $\frac{1}{3}\frac{2^n+1}{2^{n-1}+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3}$

Exercice 12 (★★). A chaque repas, un lion mange soit un zèbre avec une probabilité $\frac{1}{3}$, soit une gazelle avec une probabilité $\frac{2}{3}$. On suppose que les compositions des repas du lion sont indépendantes.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut calculer la probabilité u_n qu'en n repas, le lion n'ait jamais mangé deux gazelles consécutives. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n.$$

En déduire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de u_n en fonction de n.
Résultat attendu : On montre la relation en utilisant la formule des probabilités totales. Les formules de suites récurrentes linéaires doubles donnent alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.

Exercice 13 (★★★). Dans une file d'attente de $n \geqslant 2$ personnes, résultant de la distribution au hasard de ces personnes, se trouvent deux amis Jean et Paul. Soit $m \in [\![0, n-2]\!]$, quelle est la probabilité que Jean soit séparé de Paul par m personnes ? Quel est le nombre de personnes le plus probable qui séparent Jean et Paul ?
Résultat attendu : La probabilité que Jean soit séparé de Paul par m personnes vaut $\frac{2(n-m-1)}{n(n-1)}$. Cette valeur est maximale pour $m = 0$.

Exercice 14 (Type DS)**.** On considère un mobile qui se déplace sur les sommets d'un triangle A_1, A_2 et A_3. On suppose qu'initialement le mobile se trouve en A_1. Ensuite les déplacements s'effectuent de la manière suivante : si le mobile est en A_i,

— il passe en A_j $(j \neq i)$ avec la probabilité $\frac{2}{5}$ dans les deux cas.

— il reste en A_i avec la probabilité $\frac{1}{5}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les événements : U_n ="après n déplacements le mobile se trouve en A_1" ; V_n ="après n déplacements le mobile se trouve en A_2" ; W_n ="après n déplacements le mobile se trouve en A_3". On pose $u_n = P(U_n)$, $v_n = P(V_n)$ et $w_n = P(W_n)$.

1. Déterminer u_0, v_0 et w_0.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5^n}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.
4. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^n pour $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire pour tout entier naturel n l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.
6. Quelles sont les limites des suites (u_n), (v_n) et (w_n) ?

Résultat attendu :

1. Le mobile est initialement en A_1, donc $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $w_0 = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, (U_n, V_n, W_n) forme un système complet d'événements. Donc par formule des probabilités totales, $P(U_{n+1}) = P(U_n)P_{U_n}(U_{n+1}) + P(V_n)P_{V_n}(U_{n+1}) + P(W_n)P_{W_n}(U_{n+1})$.
   Les probabilités de transition fournies dans l'énoncé donnent donc $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n + \frac{2}{5}w_n$. De même, en appliquant la formule à V_{n+1} puis W_{n+1}, on trouve $v_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}v_n + \frac{2}{5}w_n$ puis $w_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n + \frac{1}{5}w_n$.
   Il ne reste plus qu'à passer à l'écriture matricielle pour obtenir $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrons par récurrence la propriété $P(n)$: « $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5^n}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ ».
   — $\frac{1}{5^0}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^0\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = 1I_3\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$, donc $P(0)$ est vraie.
   — Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie. D'après la question précédente,
   $$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{5^n}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5^{n+1}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{n+1}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.$$
   Donc $P(n+1)$ est vraie.
   D'où le résultat demandé.
4. $J^0 = I_3$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrons par récurrence la propriété $P(n)$: « $J^n = 3^{n-1}J$ ».
   — $3^{1-1}J = 1J = J^1$ donc $P(1)$ est vraie.
   — Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P(n)$ est vraie. Un premier calcul donne $J^2 = 3J$. On en déduit :
   $$J^{n+1} = J^n \times J = 3^{n-1}J \times J = 3^{n-1} \times 3J = 3^nJ = 3^{(n+1)-1}J.$$
   Donc $P(n+1)$ est vraie.
   Donc $J^0 = I_3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J^n = 3^{n-1}J$.
5. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, on remarque que $M = 2J - I_3$. De plus, $(2J) \times (-I_3) = -2J = (-I_3) \times (2J)$, donc par formule du binôme de Newton (puis en utilisant la question précédente) : $\forall n \in \mathbb{N}$,
   $$M^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2J)^k(-I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k(-1)^{n-k}J^k = (-1)^nI_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}6^k(-1)^{n-k}\right)J.$$
   Donc $M^n = (-1)^nI_3 + \frac{1}{3}\left(5^n - (-1)^n\right)J$.
   Donc d'après la question 3, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5^n}M^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5^n}\left(\frac{5^n-(-1)^n}{3}+(-1)^n\right) \\ \frac{1}{5^n}\frac{5^n-(-1)^n}{3} \\ \frac{1}{5^n}\frac{5^n-(-1)^n}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2(-1)^n}{3\times5^n} \\ \frac{1}{3}-\frac{(-1)^n}{3\times5^n} \\ \frac{1}{3}-\frac{(-1)^n}{3\times5^n} \end{pmatrix}.$$
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{3} + \frac{2(-1)^n}{3\times5^n}$, $v_n = \frac{1}{3} - \frac{(-1)^n}{3\times5^n}$ et $w_n = \frac{1}{3} - \frac{(-1)^n}{3\times5^n}$.
6. Par la question précédente et comme $\left|\frac{-1}{5}\right| < 1$, (u_n), (v_n) et (w_n) tendent vers $\frac{1}{3}$.