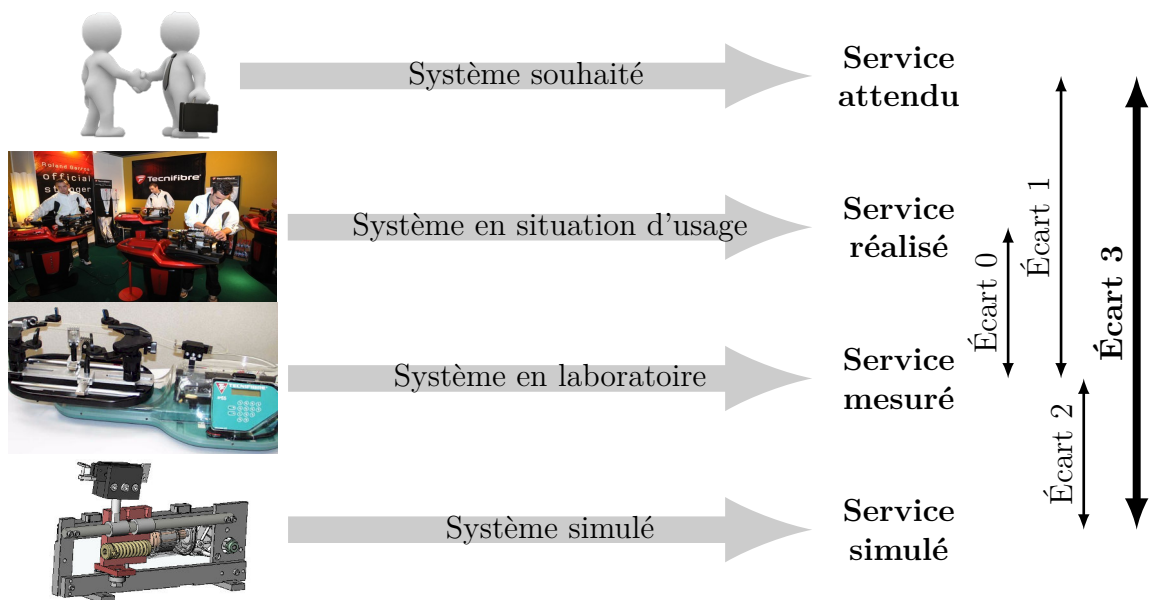


Modélisation des actions mécaniques

— *Éléments de correction des TDs* —



Écart 0 – évalue la fiabilité et la fidélité du système de laboratoire didactisé par rapport au système réel. Il répond aux questions « le système de laboratoire est-il représentatif du système réel ? Permet-il de l'étudier de manière fiable ? »

Écart 1 – évalue le respect du CDCF par le système réel sur prototype instrumenté en laboratoire. Il répond à la question « le système réalisé, répond-il au CDCF ? ».

Écart 2 – évalue la fiabilité du modèle et de ses hypothèses. Il répond à la question « le modèle est-il correct ? ».

Écart 3 – évalue, en phase de conception, le respect du CDCF à partir d'un modèle simulé. Il répond à la question « le modèle du système satisfait-il les exigences du CDCF ? ».

Activités de TD

Exercices

Exercice 1 – Dimensionnement d’un palier lisse	3
Exercice 2 – Abri à deux roues	7
Exercice 3 – Dimensionnement de clavette	13
Exercice 4 – Barrage du Mont-Saint-Michel	15
Exercice 5 – Voilier Alcyone	19
Exercice 6 – Barrière de Tamise	21
Exercice 7 – Carburateur	25



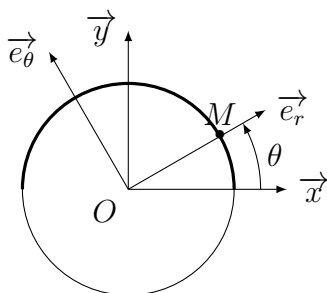
Nicolas Mesnier, lycée Jean Perrin, Lyon
Compléments & mises à jour sur le site des PCSI
<https://cahier-de-prepa.fr/pcsi-perrin>

— Version du 1^{er} avril 2025 —

Dimensionnement d'un palier lisse

Question 1.1. On étudie l'action de pression exercée par un palier lisse sur la surface d'un cylindre de rayon R et de longueur B

$$S = \left\{ M \mid \overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r(\theta) + z\vec{z}, \quad \theta \in [0, \pi], \quad z \in \left[\frac{-B}{2}, \frac{B}{2} \right] \right\}$$



telle qu'au voisinage d'un point $M \in S$, on puise construire l'élément différentiel de surface

$$dS = R d\theta dz$$

de normale \vec{e}_r .

Cas 1 : pression uniforme On se place dans le cas d'une répartition de pression uniforme où

$$\forall \theta \in [0, \pi], \quad p(\theta) = p_0$$

L'action mécanique élémentaire est définie par

$$d\overrightarrow{F}_{1 \rightarrow 2} = -p_0 R d\theta dz \vec{e}_r$$

d'où

$$\{d\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}_M = \begin{Bmatrix} -p_0 R d\theta dz \vec{e}_r \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Pour déterminer l'action mécanique globale, il est nécessaire d'intégrer les éléments de réduction de ce torseur en un point qui existe « vraiment », par exemple O . Ainsi, par changement de point, il vient :

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{M}_{O,1 \rightarrow 2} &= d\overrightarrow{M}_{M,1 \rightarrow 2} + d\overrightarrow{F}_{1 \rightarrow 2} \wedge \overrightarrow{MO} \\ &= -p_0 R d\theta dz \vec{e}_r \wedge -(R\vec{e}_r(\theta) + z\vec{z}) \\ &= -p_0 R z d\theta dz \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

Il vient alors sur la surface S :

— la résultante globale :

$$\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = \int_{-B/2}^{B/2} \int_0^\pi -p_0 R \vec{e}_r(\theta) d\theta dz = -p_0 R \left(\int_{-B/2}^{B/2} dz \right) \times \left(\int_0^\pi \vec{e}_r(\theta) d\theta \right)$$

avec

$$\int_{-B/2}^{B/2} dz = [z]_{-B/2}^{B/2} = B$$

et sachant $\vec{e}_r = \cos(\theta) \vec{x} + \sin(\theta) \vec{y}$, il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \vec{e}_r(\theta) d\theta &= \left(\int_0^\pi \cos(\theta) d\theta \right) \vec{x} + \left(\int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \right) \vec{y} \\ &= [\sin(\theta)]_0^\pi \vec{x} + [-\cos(\theta)]_0^\pi \vec{y} = 2\vec{y} \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = -p_0 2RB \vec{y}}$$

où le « $2RB$ » correspond à la surface projetée de normale \vec{y} du cylindre sur lequel s'applique la pression ;

— le moment global au point O :

$$\overrightarrow{M_{O,1 \rightarrow 2}} = \int_{-B/2}^{B/2} \int_0^\pi -p_0 R z \vec{e}_\theta(\theta) d\theta dz = -p_0 R \left(\underbrace{\int_{-B/2}^{B/2} z dz}_0 \right) \times \left(\int_0^\pi \vec{e}_\theta(\theta) d\theta \right)$$

d'où, sachant $z \mapsto z$ impaire :

$$\boxed{\overrightarrow{M_{O,1 \rightarrow 2}} = \vec{0}}$$

qui correspond au positionnement symétrique du point O .

Il vient finalement :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}_O = \begin{Bmatrix} -p_0 2RB \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

Cas 2 : pression sinus On se place dans le cas d'une répartition de pression sinusoïdale où

$$\forall \theta \in [0, \pi], \quad p(\theta) = p_{\max} \sin(\theta)$$

L'action mécanique élémentaire est définie par

$$d\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = -p_{\max} \sin(\theta) R d\theta dz \vec{e}_r$$

d'où

$$\{d\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}_M = \begin{Bmatrix} -p_{\max} \sin(\theta) R d\theta dz \vec{e}_r \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Par changement de point, il vient l'expression du moment élémentaire au point O :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{dM_{O,1\rightarrow 2}} &= \overrightarrow{dM_{M,1\rightarrow 2}} + \overrightarrow{dF_{1\rightarrow 2}} \wedge \overrightarrow{MO} \\ &= -p_{\max} \sin(\theta) R \, d\theta dz \, \vec{e}_r \wedge - (R\vec{e}_r(\theta) + z\vec{z}) \\ &= -p_{\max} \sin(\theta) R z \, d\theta dz \, \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

Il vient alors sur la surface S :

— la résultante globale :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_{1\rightarrow 2}} &= \int_{-B/2}^{B/2} \int_0^\pi -p_{\max} \sin(\theta) R \, \vec{e}_r(\theta) \, d\theta dz \\ &= -p_{\max} R \left(\int_{-B/2}^{B/2} dz \right) \times \left(\int_0^\pi \sin(\theta) \vec{e}_r(\theta) \, d\theta \right)\end{aligned}$$

avec

$$\int_{-B/2}^{B/2} dz = [z]_{-B/2}^{B/2} = B$$

et sachant $\vec{e}_r = \cos(\theta) \vec{x} + \sin(\theta) \vec{y}$, il vient :

$$\int_0^\pi \sin(\theta) \vec{e}_r(\theta) \, d\theta = \left(\int_0^\pi \frac{\sin(2\theta)}{2} \, d\theta \right) \vec{x} + \left(\int_0^\pi \sin^2(\theta) \, d\theta \right) \vec{y} = \frac{\pi}{2} \vec{y}$$

obtenu par linéarisation de $\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$, tout en sachant $\sin(2\theta)$ et $\cos(2\theta)$ sont π -périodiques. Finalement, il vient :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{1\rightarrow 2}} = -p_{\max} \frac{\pi}{2} R B \vec{y}}$$

où le « 2 » obtenu avec une pression uniforme est remplacé dans ce cas par $\pi/2 < 2$;

— le moment global au point O :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_{O,1\rightarrow 2}} &= \int_{-B/2}^{B/2} \int_0^\pi -p_{\max} \sin(\theta) R z \, \vec{e}_\theta(\theta) \, d\theta dz \\ &= -p_{\max} R \left(\underbrace{\int_{-B/2}^{B/2} z \, dz}_0 \right) \times \left(\int_0^\pi \sin(\theta) \vec{e}_\theta(\theta) \, d\theta \right)\end{aligned}$$

d'où, sachant $z \mapsto z$ impaire :

$$\boxed{\overrightarrow{M_{O,1\rightarrow 2}} = \vec{0}}$$

qui correspond (encore) au positionnement symétrique du point O .

Il vient finalement :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{matrix} o \\ \left(\begin{array}{l} -p_0 \frac{\pi}{2} RB \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right) \end{matrix}}$$

Question 1.2. En notant $F_1 = 2p_{\max}RB$ la norme de l'effort dans le cas d'une pression uniforme et $F_2 = \frac{\pi}{2}p_{\max}RB$ celle de l'effort dans le cas d'une répartition de pression sinusoïdale, il vient

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{4}{\pi} \approx 1,21 > 1$$

qui signifie que, pour une pression p_{\max} donnée, l'effort obtenu avec le second modèle est plus faible que celui obtenu avec le premier. De ce fait, comme le problème de dimensionnement consiste à déterminer, pour un arbre donné (R fixé), pour une charge donnée (F fixé), pour un matériau de palier lisse donné (p_{\max} fixé), la longueur B du palier lisse ; soit :

$$B_1 = \frac{F}{2Rp_{\max}} < B_2 = \frac{2F}{\pi Rp_{\max}}$$

Considérant que le cas de répartition sinusoïdale est plus proche du cas de charge réel, il vient que le modèle de pression uniforme conduit à un sous-dimensionnement de

$$\frac{B_1 - B_2}{B_2} = \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) \approx -21 \%$$

De ce fait, si on dimensionne le palier lisse pour le cas n° 1, comme le préconisent les constructeurs, car le calcul est plus simple (surface projetée), il est absolument nécessaire de tenir compte d'un coefficient de sécurité sur le niveau de pression admissible, ici noté p_{\max} . C'est ce qui est fait par les constructeurs.

Question 1.3. Considérant les recommandations des constructeurs de paliers lisses, telles que l'on ait :

$$\begin{cases} p = \frac{F}{2RB} \leq p_{\text{adm}} & (\text{résistance}) \\ V = R\omega \leq V_{\text{max}} & (\text{abrasion}) \\ pV \leq (pV)_{\text{max}} & (\text{échauffement}) \end{cases}$$

Il vient pour le seul critère d'échauffement :

$$\frac{F}{2RB} \times R\omega = \frac{\pi FN}{60B} \leq (pV)_{\text{max}} \iff B \geq \frac{\pi FN}{60(pV)_{\text{max}}}$$

Par application numérique en unités SI, avec $(pV)_{\text{max}} = 1,8 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \times \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, il vient :

$$B \geq \frac{\pi 1 \times 10^3 \times 500}{60 \times 1,8 \times 10^6} = \frac{5\pi}{108} \approx 14,5 \text{ mm}$$

La référence PCM101215E avec une longueur $B = 15 \text{ mm} > 14,5 \text{ mm}$ et un diamètre extérieur de 15 mm convient.

Abri à deux roues

2.1 Étude de l'action due à la pesanteur

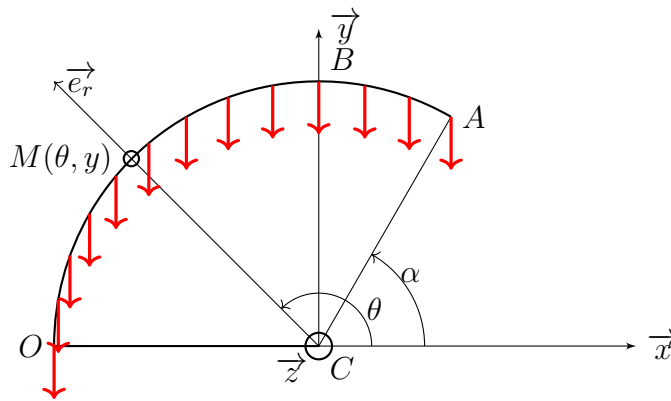
On étudie l'action de pesanteur exercée sur l'abri sous la forme d'une densité surfacique p_1 sur la surface d'un cylindre de rayon R et de longueur L

$$S_1 = \left\{ M \mid \overrightarrow{CM} = R\vec{e}_r(\theta) + z\vec{z}, \quad \theta \in [\alpha, \pi], \quad z \in \left[\frac{-L}{2}, \frac{L}{2} \right] \right\}$$

telle qu'au voisinage d'un point $M \in S_1$, on puise construire l'élément différentiel de surface

$$dS = R d\theta dz$$

de normale \vec{e}_r . La représentation de la densité surfacique de charge due au champ de pesanteur p_1 est fournie ci-dessous.



Question 2.1. L'action mécanique élémentaire est définie par

$$d\overrightarrow{F}_{\text{pes} \rightarrow 1} = -p_1 R d\theta dz \vec{y}$$

d'où

$$\boxed{\{d\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow 1}\}_M = \begin{Bmatrix} -p_1 R d\theta dz \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

Question 2.2. Pour déterminer l'action mécanique globale, il est nécessaire d'intégrer les éléments de réduction de ce torseur en un point qui existe « vraiment ». Il est demandé au point O . Ainsi, par changement de point, il vient :

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{M}_{O, \text{pes} \rightarrow 1} &= d\overrightarrow{M}_{M, \text{pes} \rightarrow 1} + d\overrightarrow{F}_{\text{pes} \rightarrow 1} \wedge \overrightarrow{MO} \\ &= -p_1 R d\theta dz \vec{y} \wedge - (R[\vec{x} + \vec{e}_r(\theta)] + z\vec{z}) \\ &= p_1 R (z\vec{x} - R(1 + \cos(\theta))\vec{z}) d\theta dz \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\{d\mathcal{T}_{\text{pes}\rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{l} -p_1 R \, d\theta dz \, \vec{y} \\ p_1 R (z \vec{x} - R(1 + \cos(\theta)) \vec{z}) \, d\theta dz \end{array} \right\}}$$

Question 2.3. Il vient alors sur la surface S_1 :

— la résultante globale :

$$\overrightarrow{F}_{\text{pes}\rightarrow 1} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{\alpha}^{\pi} -p_1 R \, \vec{y} \, d\theta dz = -p_1 R \left(\int_{-L/2}^{L/2} dz \right) \times \left(\int_{\alpha}^{\pi} d\theta \right) \vec{y}$$

avec $\int_{-L/2}^{L/2} dz = L$ et $\int_{\alpha}^{\pi} d\theta = \pi - \alpha$, il vient :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\text{pes}\rightarrow 1} = -p_1 (\pi - \alpha) RL \, \vec{y}}$$

— le moment global au point O :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M}_{O,\text{pes}\rightarrow 1} &= \int_{-L/2}^{L/2} \int_{\alpha}^{\pi} p_1 R (z \vec{x} - R(1 + \cos(\theta)) \vec{z}) \, d\theta dz \\ &= p_1 R \left(\underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} z \, dz}_0 \right) \times \left(\int_{\alpha}^{\pi} d\theta \right) \vec{x} - p_1 R^2 \left(\int_{-L/2}^{L/2} dz \right) \left(\int_{\alpha}^{\pi} (1 + \cos(\theta)) \, d\theta \right) \vec{z} \\ &= -p_1 R^2 L [\theta + \sin(\theta)]_{\alpha}^{\pi} \vec{z} = -p_1 R^2 L (\pi - \alpha - \sin(\alpha)) \vec{z} \end{aligned}$$

d'où nous avons exploité le caractère impair de $z \mapsto z$. Finalement, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{M}_{O,\text{pes}\rightarrow 1} = -p_1 R^2 L (\pi - \alpha - \sin(\alpha)) \vec{z}}$$

qui correspond au positionnement symétrique du point O où seul le basculement de l'abri autour de l'axe (O, \vec{z}) dans le sens $-$ est intuitif.

Il vient finalement :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{\text{pes}\rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{l} -p_1 (\pi - \alpha) RL \, \vec{y} \\ -p_1 R^2 L (\pi - \alpha - \sin(\alpha)) \vec{z} \end{array} \right\}}$$

2.2 Étude de l'action due à un vent horizontal

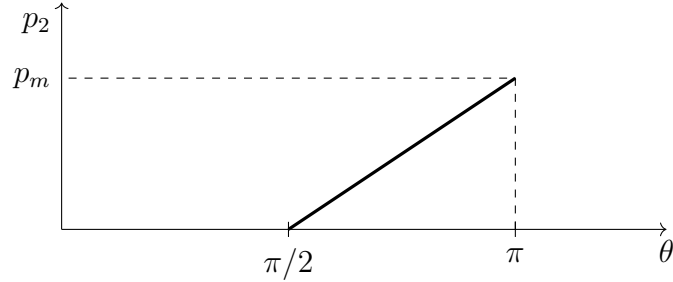
On étudie maintenant l'action du vent exercée sur l'abri sous la forme d'une densité surfacique p_2 sur la surface d'un cylindre de rayon R et de longueur L

$$S_2 = \left\{ M \mid \overrightarrow{CM} = R \vec{e}_r(\theta) + z \vec{z}, \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right], \quad z \in \left[\frac{-L}{2}, \frac{L}{2} \right] \right\}$$

telle qu'au voisinage d'un point $M \in S_2$, on puise construire l'élément différentiel de surface

$$dS = R d\theta dz$$

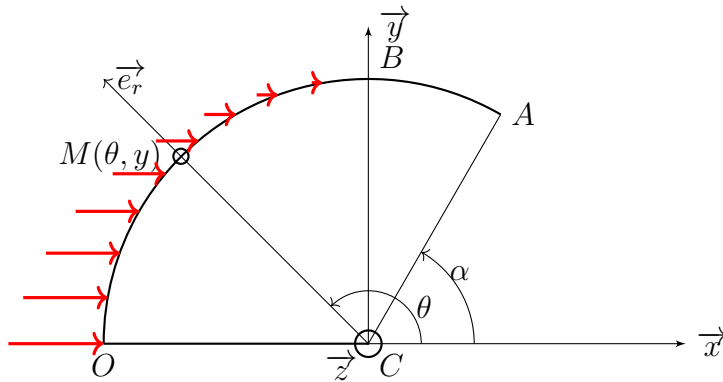
de normale \vec{e}_r . La densité surfacique de charge due au vent est supposée varier linéairement en θ sur le segment $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ sous la forme



telle que l'on ait :

$$\forall \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \quad p_2(\theta) = \frac{2p_m}{\pi} \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

On donne ci-dessous sa représentation.



Question 2.4. L'action mécanique élémentaire est définie par

$$d\overrightarrow{F_{\text{vent} \rightarrow 1}} = p_2(\theta) R d\theta dz \vec{x}$$

d'où

$$\boxed{\{d\mathcal{F}_{\text{vent} \rightarrow 1}\}_M = \left\{ \begin{array}{c} \frac{2p_m}{\pi} \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) R d\theta dz \vec{x} \\ 0 \end{array} \right\}}$$

Question 2.5. Par changement de point, il vient :

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{M_{O, \text{vent} \rightarrow 1}} &= d\overrightarrow{M_{M, \text{vent} \rightarrow 1}} + d\overrightarrow{F_{\text{vent} \rightarrow 1}} \wedge \overrightarrow{MO} \\ &= p_2(\theta) R d\theta dz \vec{x} \wedge - (R [\vec{x} + \vec{e}_r(\theta)] + z \vec{z}) \\ &= p_2(\theta) R (z \vec{y} - R \sin(\theta) \vec{z}) d\theta dz \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\{d\mathcal{T}_{\text{vent}\rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2p_m}{\pi} \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) R \, d\theta dz \, \vec{x} \\ \frac{2p_m}{\pi} \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) R (z\vec{y} - R \sin(\theta)\vec{z}) \, d\theta dz \end{array} \right\}}$$

Question 2.6. Il vient alors sur la surface S_2 :

— la résultante globale :

$$\overrightarrow{F}_{\text{vent}\rightarrow 1} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{2p_m}{\pi} \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) R \, \vec{x} \, d\theta dz = \frac{2p_m}{\pi} R \left(\int_{-L/2}^{L/2} dz \right) \times \left(\int_{\pi/2}^{\pi} \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) d\theta \right) \vec{x}$$

avec $\int_{-L/2}^{L/2} dz = L$ et

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \theta \, d\theta = \left[\frac{\theta^2}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8}$$

il vient :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\text{vent}\rightarrow 1} = \frac{p_m \pi R L}{4} \vec{x}}$$

— le moment global au point O :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M}_{O, \text{vent}\rightarrow 1} &= \int_{-L/2}^{L/2} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{2p_m}{\pi} \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) R (z\vec{y} - R \sin(\theta)\vec{z}) \, d\theta dz \\ &= \frac{2p_m}{\pi} R \left(\underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} z \, dz}_0 \right) \times \left(\int_{\pi/2}^{\pi} \dots d\theta \right) \vec{y} \\ &\quad - \frac{2p_m}{\pi} R^2 \left(\int_{-L/2}^{L/2} dz \right) \left(\int_{\pi/2}^{\pi} \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \sin(\theta) \, d\theta \right) \vec{z} \end{aligned}$$

d'où nous avons exploité le caractère impair de $z \mapsto z$. Par simple changement de variable

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \sin(\theta) \, d\theta = \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \theta \cos(\theta) \, d\theta$$

et par intégration par parties

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \theta \cos(\theta) \, d\theta = [\theta \sin(\theta)]_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(\theta) \, d\theta = \frac{\pi}{2} - [-\cos(\theta)]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi}{2} - 1$$

il vient :

$$\boxed{\overrightarrow{M}_{O, \text{vent}\rightarrow 1} = -\frac{2p_m}{\pi} R^2 L \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \vec{z}}$$

qui correspond au positionnement symétrique du point O où seul le basculement de l'abri autour de l'axe (O, \vec{z}) dans le sens $-$ est intuitif.

Il vient finalement :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{\text{vent} \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} \frac{p_m \pi R L}{4} \vec{x} \\ -\frac{2p_m}{\pi} R^2 L \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \vec{z} \end{Bmatrix}}$$

2.3 Étude de la toiture soumise aux actions du vent et de la pesanteur

Question 2.7. Par cours, le torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison pivot d'axe (O, \vec{z}) est :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{01} \vec{x} + Y_{01} \vec{y} + Z_{01} \vec{z} \\ L_{01} \vec{x} + M_{01} \vec{y} \end{Bmatrix}$$

En tenant compte de la symétrie des deux poteaux par rapport au plan (O, \vec{x}, \vec{y}) , il vient :

$$\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}^{\textcircled{1}}\}_{A_1} = \begin{Bmatrix} F_2 \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}^{\textcircled{2}}\}_{A_2} = \begin{Bmatrix} F_2 \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

par changement de point sachant $\overrightarrow{AA_1} = -\overrightarrow{AA_2}$, il vient :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}^{\textcircled{1}}\}_O &= \begin{Bmatrix} F_2 \vec{y} \\ F_1 \left(R(1 + \cos \alpha) \vec{z} - \frac{L}{2} \vec{x} \right) \end{Bmatrix} \\ \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}^{\textcircled{2}}\}_O &= \begin{Bmatrix} F_2 \vec{y} \\ F_1 \left(R(1 + \cos \alpha) \vec{z} + \frac{L}{2} \vec{x} \right) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Question 2.8. Pour déterminer les actions mécaniques effectivement transmises par les liaisons, il est nécessaire d'isoler l'abri **1** puis de réaliser un bilan exhaustif des actions mécaniques extérieures exercées sur **1** :

- l'action de la pesanteur ;
- l'action du vent ;
- la liaison pivot d'axe (O, \vec{z}) avec le bâti **0** ;
- les deux liaisons sphère-plan de normales (A_1, \vec{y}) et (A_2, \vec{y}) .

L'abri **1** est en équilibre dans un référentiel supposé galiléen et on lui applique le principe fondamental de la statique, tel que :

$$\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow 1}\} + \{\mathcal{T}_{\text{vent} \rightarrow 1}\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}\} + \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}^{\textcircled{1}}\} + \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}^{\textcircled{2}}\} = \{0\}$$

L'équation de résultante en projection dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ conduit à :

$$\begin{aligned} / \vec{x} : \quad & \frac{p_m \pi R L}{4} + X_{01} = 0 \\ / \vec{y} : \quad & -p_1 (\pi - \alpha) R L + Y_{01} + 2F_2 = 0 \\ / \vec{z} : \quad & Z_{01} = 0 \end{aligned}$$

L'équation de moment au point O en projection dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ conduit à :

$$/(O, \vec{x}) : L_{01} = 0$$

$$/(O, \vec{y}) : M_{01} = 0$$

$$/(O, \vec{z}) : -p_1 R^2 L (\pi - \alpha - \sin(\alpha)) - \frac{2p_m}{\pi} R^2 L \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + 2F_2 R (1 + \cos \alpha) = 0$$

où l'on peut remarquer que seules 3 des 6 équations sont non triviales et que l'on aurait pu procéder à une résolution plane directement. Quoi qu'il en soit, de l'équation de moment autour de l'axe (O, \vec{z}) , on tire :

$$F_2 = \frac{p_1 (\pi - \alpha - \sin(\alpha)) + \frac{2p_m}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)}{2(1 + \cos \alpha)} RL$$

De l'équation de résultante dans la direction \vec{x} , on tire :

$$X_{01} = -\frac{p_m \pi RL}{4}$$

et de celle dans la direction \vec{y} , on trouve après substitution de l'expression de F_2 :

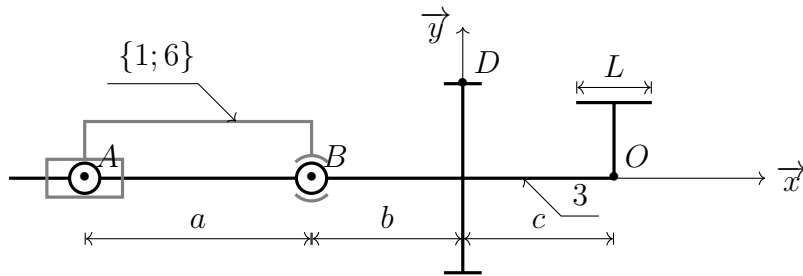
$$Y_{01} = \frac{p_1 ((\pi - \alpha) \cos \alpha + \sin(\alpha)) - \frac{2p_m}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)}{1 + \cos \alpha} RL$$

Il vient finalement pour la liaison pivot :

$$\left\{ \mathcal{T}_{0 \rightarrow 1} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{p_m \pi RL}{4} \vec{x} + \frac{p_1 ((\pi - \alpha) \cos \alpha + \sin(\alpha)) - \frac{2p_m}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)}{1 + \cos \alpha} RL \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right.$$

Dimensionnement de clavette

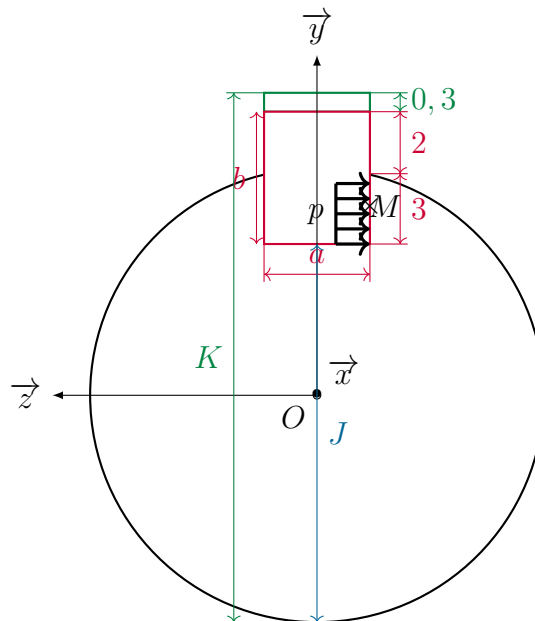
Question 3.1. Pour dimensionner la clavette permettant de transmettre l'action mécanique apportée par le moteur entre le moyeu **2** et l'arbre **3**, on commence par isoler l'arbre **3**. On modélise le contact des paliers lisses entre le bâti $\{1,6\}$ et l'arbre **3** par une liaison sphérique de centre B et une liaison sphère-cylindre de centre A et d'axe (A, \vec{x}) . Le modèle cinématique retenu est donné ci-dessous.



On modélise le contact de la roue **4**, un engrenage à denture droite avec un angle de pression de 20° , par un glisseur

$$\{\mathcal{T}_{4 \rightarrow 3}\}_D = \begin{Bmatrix} F_{43} (\cos(20^\circ) \vec{z} - \sin(20^\circ) \vec{y}) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

au point D , le milieu de la ligne de contact sur le rayon primitif $R_3 = 25 \text{ mm}$. Pour modéliser l'action mécanique de la clavette, on suppose une pression uniforme p dans la rainure et on utilise le paramétrage suivant :



On a ainsi, pour tout point de la surface

$$S = \left\{ M \mid \overrightarrow{OM} = x \overrightarrow{y} + y \overrightarrow{y} - \frac{a}{2} \overrightarrow{z}, \quad x \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right], \quad y \in [J - R, R] \right\}$$

de surface élémentaire $dS = dx dy$, l'action mécanique élémentaire

$$d\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 3}} = -p \overrightarrow{z} \, dx dy$$

Comme on cherche à dimensionner la clavette, c'est-à-dire déterminer sa longueur L en fonction de l'effort transmis F_{43} , il est intéressant de supposer que l'arbre **3** est en équilibre dans un référentiel galiléen et de lui appliquer le principe fondamental de la statique. En exploitant la mobilité de l'arbre **3** par rapport au bâti **1**, il vient pour l'équation de moment autour de l'axe (O, \overrightarrow{x}) :

$$\underbrace{\overrightarrow{M_{O,1 \rightarrow 3}} \cdot \overrightarrow{x}}_{=0} + \overrightarrow{M_{O,4 \rightarrow 3}} \cdot \overrightarrow{x} + \overrightarrow{M_{O,2 \rightarrow 3}} \cdot \overrightarrow{x} = 0 \quad (1)$$

Par changement de point, il vient :

$$\overrightarrow{M_{O,4 \rightarrow 3}} \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{M_{D,4 \rightarrow 3}} \cdot \overrightarrow{x} + (\overrightarrow{F_{4 \rightarrow 3}} \wedge \overrightarrow{DO}) \cdot \overrightarrow{x} = R_3 F_{43} \cos(20^\circ)$$

Pour l'action de la clavette, partant du moment élémentaire au point O :

$$d\overrightarrow{M_{O,2 \rightarrow 3}} \cdot \overrightarrow{x} = d\overrightarrow{M_{M,2 \rightarrow 3}} \cdot \overrightarrow{x} + (d\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 3}} \wedge \overrightarrow{MO}) \cdot \overrightarrow{x} = -py \, dx dy$$

il vient par intégration sur la surface S :

$$\overrightarrow{M_{O,2 \rightarrow 3}} \cdot \overrightarrow{x} = \int_{J-R}^R \int_{-L/2}^{L/2} -py \, dx dy = -pL \left[\frac{y}{2} \right]_{J-R}^R = -p \frac{LJ(2R - J)}{2}$$

Reprenant alors l'équation (1), il vient finalement :

$$R_3 F_{43} \cos(20^\circ) - p \frac{LJ(2R - J)}{2} = 0 \iff p = \frac{2R_3 F_{43} \cos(20^\circ)}{LJ(2R - J)}$$

Le critère de dimensionnement étant

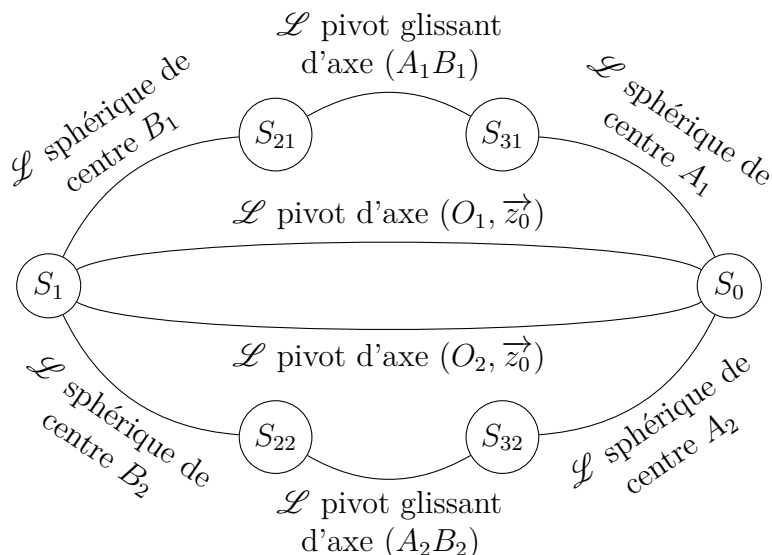
$$p = \frac{2R_3 F_{43} \cos(20^\circ)}{LJ(2R - J)} \leq p_{\text{mat}} = 60 \text{ MPa} \iff \boxed{L \geq \frac{2R_3 F_{43} \cos(20^\circ)}{J(2R - J)p_{\text{mat}}}}$$

Par application numérique, il vient :

$$L \geq \frac{2 \times 25 \times 2\,000 \cos(20^\circ)}{12 \times 3 \times 60} \approx 43,5 \text{ mm}$$

Barrage du Mont-Saint-Michel

Question 4.1. D'après le schéma cinématique 3D donné, on identifie 2 fois 4 liaisons, synthétisées par le graphe de structure suivant.



conduisant à $\gamma = 3$ cycles indépendants. Par cours, on sait que :

- chacune des 4 liaisons sphériques a un torseur d'actions mécaniques transmissibles de la forme :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 22}\}_{A_1} = \begin{Bmatrix} X_{022}\vec{x}_0 + Y_{022}\vec{y}_0 + Z_{022}\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

ici donné arbitrairement dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ (alors qu'en isolant l'ensemble $\{21, 22\}$ on trouve que la seule inconnue est suivant \vec{x}_{21});

- chacune des 2 liaisons pivot d'axe (O, \vec{z}_0) a un torseur d'actions mécaniques transmissibles de la forme :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}\}_O = \begin{Bmatrix} X_{01}\vec{x}_0 + Y_{01}\vec{y}_0 + Z_{01}\vec{z}_0 \\ L_{01}\vec{x}_0 + M_{01}\vec{y}_0 \end{Bmatrix}$$

- chacune des 2 liaisons pivot glissant, par exemple d'axe (A_1, \vec{x}_{21}) , a un torseur d'actions mécaniques transmissibles de la forme :

$$\{\mathcal{T}_{21 \rightarrow 31}\}_{A_1} = \begin{Bmatrix} Y_{2131}\vec{y}_{21} + Z_{2131}\vec{z}_{21} \\ M_{2131}\vec{y}_{21} + N_{2131}\vec{z}_{21} \end{Bmatrix}$$

4.1 Action de l'eau sur la vanne

Question 4.2. On étudie l'action de l'eau sur la vanne **1**. Cette action mécanique s'exerce sur la surface d'un cylindre de rayon R_1 et de longueur L

$$S = \left\{ P \mid \overrightarrow{OP} = R_1 \vec{n}(\alpha) + z \vec{z}, \quad \alpha \in [\alpha_1, 0], \quad z \in \left[\frac{-L}{2}, \frac{L}{2} \right] \right\}$$

telle qu'au voisinage d'un point $P \in S$, on puisse construire l'élément différentiel de surface

$$dS = R_1 d\alpha dz$$

de normale \vec{n} . La pression de l'eau est une fonction de la profondeur y définie comme

$$y = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{y}_0 = R_1 \sin(\alpha)$$

telle que l'on ait :

$$\forall \alpha \in [\alpha_1, 0], \quad p(\alpha) = p \circ y(\alpha) = -\rho g R_1 \sin(\alpha) \geq 0$$

On définit alors l'action mécanique élémentaire exercée par l'eau sur la vanne **1** comme

$$d\overrightarrow{F_{\text{eau} \rightarrow 1}} = -p(\alpha) \vec{n}(\alpha) dS = \rho g R_1^2 \sin(\alpha) \vec{n}(\alpha) d\alpha dz$$

Question 4.3. Par définition, l'action mécanique élémentaire est un glisseur d'axe central (P, \vec{n}) . Cette droite ne contient le point O que si la coordonnée z est nulle. Ainsi, pour toute coordonnée $z \neq 0$, le point O n'appartient pas à l'axe central et donc le moment élémentaire induit au point O n'est pas nul mais est proportionnel à z :

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{M_{O, \text{eau} \rightarrow 1}} &= d\overrightarrow{M_{P, \text{eau} \rightarrow 1}} + d\overrightarrow{F_{\text{eau} \rightarrow 1}} \wedge \overrightarrow{PO} \\ &= -p(\alpha) \vec{n}(\alpha) dS \wedge - (R_1 \vec{n}(\alpha) + z \vec{z}) \\ &= -p(\alpha) z \vec{t}(\alpha) dS \end{aligned}$$

avec $\vec{t} = \vec{z} \wedge \vec{n}$. Comme $z \mapsto z$ est impaire, son intégration entre des bornes symétriques est nulle et conduit bien à un moment global nul au point O .

Question 4.4. Pour déterminer l'action mécanique globale, il est nécessaire d'intégrer l'effort élémentaire sur la surface S . Il vient alors :

$$\overrightarrow{F_{\text{eau} \rightarrow 1}} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{\alpha_1}^0 \rho g R_1^2 \sin(\alpha) \vec{n}(\alpha) d\alpha dz$$

Faisant attention à exprimer $\vec{n}(\alpha) = \cos(\alpha) \vec{x}_0 + \sin(\alpha) \vec{y}_0$ dans la base canonique, il vient :

$$\overrightarrow{F_{\text{eau} \rightarrow 1}} = \rho g R_1^2 \left(\int_{-L/2}^{L/2} dz \right) \left(\int_{\alpha_1}^0 \sin(\alpha) \cos(\alpha) d\alpha \vec{x}_0 + \int_{\alpha_1}^0 \sin^2(\alpha) d\alpha \vec{y}_0 \right)$$

On reconnaît dans la première intégrale en α

$$\int_{\alpha_1}^0 \sin(\alpha) \cos(\alpha) d\alpha = \int_{\alpha_1}^0 \frac{\sin(2\alpha)}{2} d\alpha = \left[\frac{-\cos(2\alpha)}{4} \right]_{\alpha_1}^0 = \frac{\cos(2\alpha_1) - 1}{4} = \frac{-\sin^2(\alpha_1)}{2}$$

Procédant par linéarisation de $\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$ pour la seconde intégrale en α , il vient :

$$\int_{\alpha_1}^0 \sin^2(\alpha) \, d\alpha = \int_{\alpha_1}^0 \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \, d\alpha = \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin(2\alpha)}{4} \right]_{\alpha_1}^0 = \frac{\sin(2\alpha_1)}{4} - \frac{\alpha_1}{2}$$

Finalement, par assemblage des différentes contributions, il vient :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{\text{eau} \rightarrow 1}} = \frac{\rho g R_1^2 L}{2} \left[-\sin^2(\alpha_1) \overrightarrow{x_0} + \left(\frac{\sin(2\alpha_1)}{2} - \alpha_1 \right) \overrightarrow{y_0} \right]}$$

Avec $\alpha_1 = \frac{-\pi}{3}$, on a :

$$\frac{-\sin^2(\alpha_1)}{2} = \frac{-3}{8} < 0 \implies \overrightarrow{F_{\text{eau} \rightarrow 1}} \cdot \overrightarrow{x_0} = \frac{-3\rho g R_1^2 L}{8} < 0$$

et

$$\frac{\sin(2\alpha_1)}{4} - \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} > 0 \implies \overrightarrow{F_{\text{eau} \rightarrow 1}} \cdot \overrightarrow{y_0} = \frac{\rho g R_1^2 L}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) > 0$$

qui est conforme à la vision intuitive, sachant que pour chaque action mécanique élémentaire, on a :

$$\forall \alpha \in \left[\frac{-\pi}{3}, 0 \right], \quad d\overrightarrow{F_{\text{eau} \rightarrow 1}} \cdot \overrightarrow{x_0} < 0 \quad \text{et} \quad d\overrightarrow{F_{\text{eau} \rightarrow 1}} \cdot \overrightarrow{y_0} > 0$$

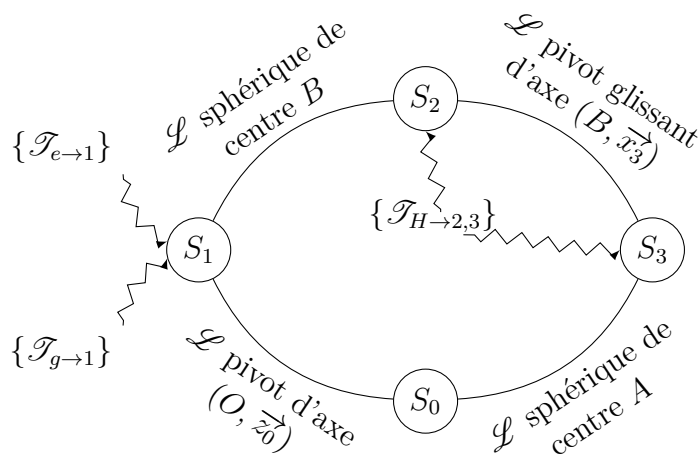
d'où la cohérence du résultat global obtenu par somme sur S .

Par applications numériques, on trouve :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{\text{eau} \rightarrow 1}} \cdot \overrightarrow{x_0} \approx -1,65 \times 10^6 \text{ N} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{F_{\text{eau} \rightarrow 1}} \cdot \overrightarrow{y_0} \approx 1,35 \times 10^6 \text{ N}}$$

4.2 Action de maintien en position fermée

Question 4.5. Reprenant le graphe de structure global réalisé à la question 4.1 en n'en gardant « qu'une moitié », il vient :



Question 4.6. En supposant négligeables les variations de pression dans le vérin induites par le champ de pesanteur par rapport au niveau de pressions mises en jeu, on peut supposer la pression du fluide uniforme. Ainsi l'action mécanique globale développée par le vérin est un glisseur d'axe central celui de sa tige et de résultante

$$\overrightarrow{F_{H \rightarrow 2}} = -p_H S_H \vec{x}_2$$

où S_H est la section du vérin qui dépend de la chambre du vérin alimenté et donc de son sens de montage et du signe de $\overrightarrow{F_{H \rightarrow 2}} \cdot \vec{x}_2$.

Question 4.7. Pour déterminer l'action mécanique développée par le vérin, il peut être utile d'isoler la vanne **1** puis d'écrire l'équation d'équilibre statique en moment autour de l'axe (O, \vec{z}_0) correspondant à la mobilité de la liaison pivot. Ainsi, après avoir isolé l'ensemble $\{2, 3, \text{huile}\}$ soumis à deux glisseurs et donc tel que l'axe central de $\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\}$ soit la droite (B, \vec{x}_2) , et sachant $\overrightarrow{M_{O, \text{eau} \rightarrow 1}} = \vec{0}$, il vient que l'équation de moment autour de la droite (O, \vec{z}_0) se limite à :

$$\overrightarrow{M_{O, \text{pes} \rightarrow 1}} \cdot \vec{z}_0 + \overrightarrow{M_{O, 2 \rightarrow 1}} \cdot \vec{z}_0 = 0$$

qui permet bien de déterminer l'action mécanique développée par le vérin car $\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$. On remarque avant de poursuivre qu'elle ne dépend que de l'action mécanique induite par le champ de pesanteur d'axe central (G_1, \vec{y}_0) et de résultante $\overrightarrow{F_{\text{pes} \rightarrow 1}} = -m_1 g \vec{y}_0$, celle de l'eau étant donc reprise entièrement par la liaison pivot avec le bâti **0**.

Question 4.8. Pour mettre en œuvre la stratégie, il suffit de calculer deux projections de moment au point O ; soit :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O, \text{pes} \rightarrow 1}} \cdot \vec{z}_0 &= \overrightarrow{M_{G_1, \text{pes} \rightarrow 1}} \cdot \vec{z}_0 + \left(\overrightarrow{F_{\text{pes} \rightarrow 1}} \wedge \overrightarrow{G_1 O} \right) \cdot \vec{z}_0 \\ &= (-m_1 g \vec{y}_0 \wedge -(c \vec{x}_1 + d \vec{y}_1)) \cdot \vec{z}_0 \\ &= m_1 g (d \sin(\beta) - c \cos(\beta)) \end{aligned}$$

et, sachant $\vec{x}_2 = \vec{x}_0$ donné,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O, 2 \rightarrow 1}} \cdot \vec{z}_0 &= \overrightarrow{M_{B, 2 \rightarrow 1}} \cdot \vec{z}_0 + \left(\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}} \wedge \overrightarrow{BO} \right) \cdot \vec{z}_0 \\ &= (-p_H S_H \vec{x}_0 \wedge -(a \vec{x}_1 + b \vec{y}_1)) \cdot \vec{z}_0 \\ &= p_H S_H (a \sin(\beta) + b \cos(\beta)) \end{aligned}$$

Finalement, on trouve :

$$p_H = \frac{m_1 g (c \cos(\beta) - d \sin(\beta))}{S_H (a \sin(\beta) + b \cos(\beta))}$$

Voilier Alcyone

Question 5.1. On cherche à modéliser l'action mécanique élémentaire exercée par les pressions aérodynamiques sur la surface d'un cylindre de base un cercle de centre O et de rayon r , de hauteur L :

$$S = \left\{ M \mid \overrightarrow{OM} = r\vec{n}(\alpha) + z\vec{z}, \quad \alpha \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, L] \right\}$$

d'élément différentiel de surface $dS = rd\alpha dz$. L'action mécanique élémentaire

$$d\overrightarrow{F}_{v \rightarrow c} = -\frac{1}{2}\rho V_0^2 \left[1 - \left(\frac{\omega r}{V_0} - 2 \sin(\alpha) \right)^2 \right] \vec{n} r d\alpha dz$$

Par intégration sur la surface S , il vient la résultante globale :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F}_{v \rightarrow c} &= \int_0^L \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\rho V_0^2 \left[1 - \left(\frac{\omega r}{V_0} - 2 \sin(\alpha) \right)^2 \right] \vec{n}(\alpha) r \, d\alpha dz \\ &= -\frac{1}{2}\rho V_0^2 r L \int_0^{2\pi} \left[1 - \left(\frac{\omega r}{V_0} - 2 \sin(\alpha) \right)^2 \right] (\cos(\alpha)\vec{x} + \sin(\alpha)\vec{y}) \, d\alpha \\ &= -\frac{1}{2}\rho V_0^2 r L \left(\left[1 - \left(\frac{\omega r}{V_0} \right)^2 \right] \left[\int_0^{2\pi} \cos(\alpha) \, d\alpha \vec{x} + \int_0^{2\pi} \sin(\alpha) \, d\alpha \vec{y} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\omega r}{V_0} \left[\int_0^{2\pi} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \, d\alpha \vec{x} + \int_0^{2\pi} \sin^2(\alpha) \, d\alpha \vec{y} \right] \right. \\ &\quad \left. - 4 \left[\int_0^{2\pi} \sin^2(\alpha) \cos(\alpha) \, d\alpha \vec{x} + \int_0^{2\pi} \sin^3(\alpha) \, d\alpha \vec{y} \right] \right) \end{aligned}$$

que l'on peut ségréger, par linéarité, en une somme de six intégrales. Sachant \cos et \sin 2π -périodique et de valeur moyenne nulle, on a :

$$\int_0^{2\pi} \cos(\alpha) \, d\alpha = \int_0^{2\pi} \sin(\alpha) \, d\alpha = 0$$

De même, sachant $\alpha \mapsto \sin(\alpha) \cos(\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{2}$ π -périodiques et de valeur moyenne nulle, on a :

$$\int_0^{2\pi} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \, d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(2\alpha)}{2} \, d\alpha = 0$$

Par suite, par linéarisation :

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\alpha) \, d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \, d\alpha = \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin(2\alpha)}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi$$

ou par primitivation directe

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\alpha) \cos(\alpha) \, d\alpha = \left[\frac{\sin^3(\alpha)}{3} \right]_0^{2\pi} = 0$$

ou les deux méthodes combinées

$$\int_0^{2\pi} \sin^3(\alpha) \, d\alpha = \int_0^{2\pi} \sin(\alpha) (1 - \cos^2(\alpha)) \, d\alpha = \left[\frac{\cos^3(\alpha)}{3} - \cos(\alpha) \right]_0^{2\pi} = 0$$

d'où, finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{v \rightarrow c}} = -2\pi \rho V_0 \omega L r^2 \overrightarrow{y}}$$

Sachant que le navire possède deux rotors de hauteur $L = 8$ m suffisamment éloignés pour que l'on suppose ne pas interférer au niveau des pressions aérodynamiques et donc tels que l'on puisse déduire par simple somme l'effort de poussée : 28 650 N.

Question 5.2. Pour des raisons de symétrie évidentes, on peut montrer que l'action globale des pressions aérodynamiques sur un cylindre est un glisseur d'axe central (I, \overrightarrow{y}) , avec I tel que $\overrightarrow{OI} = \frac{L}{2} \overrightarrow{z}$. En effet, partant du moment élémentaire au point I :

$$d\overrightarrow{M_{I, v \rightarrow c}} = d\overrightarrow{F_{v \rightarrow c}} \wedge \overrightarrow{MI} = -\frac{1}{2} \rho V_0^2 \left[1 - \left(\frac{\omega r}{V_0} - 2 \sin(\alpha) \right)^2 \right] \overrightarrow{t}(\alpha) r z d\alpha dz$$

avec $\overrightarrow{IM} = r \overrightarrow{n} + z \overrightarrow{z}$, $\overrightarrow{t} = \overrightarrow{z} \wedge \overrightarrow{n}$ et $z \in [-L/2, L/2]$, il vient :

$$\overrightarrow{M_{I, v \rightarrow c}} = \left(\int_{-L/2}^{L/2} z \, dz \right) \times \dots = \overrightarrow{0}$$

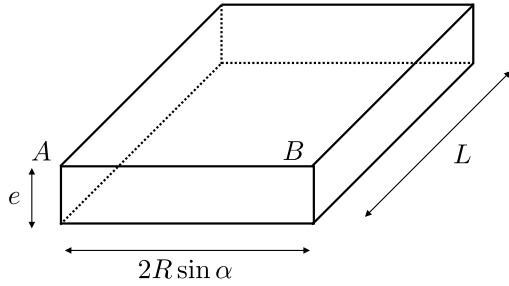
car $z \mapsto z$ impaire. Il vient alors par simple changement de point le moment global en O :

$$\overrightarrow{M_{O, v \rightarrow c}} = \overrightarrow{M_{I, v \rightarrow c}} + \overrightarrow{F_{v \rightarrow c}} \wedge \overrightarrow{IO} = \pi \rho V_0 \omega L^2 r^2 \overrightarrow{x}$$

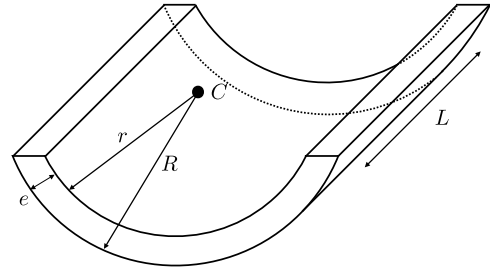
Par application numérique, il vient un moment de 114 600 N·m.

Barrière de Tamise

Question 6.1. Pour déterminer la masse de la porte, on peut la décomposer en deux volumes élémentaires V_1 et V_2 complémentaires tels que le volume de la porte total soit $V = V_1 + V_2$.



$$V_1 = 2eRL \sin \alpha$$



$$V_2 = \alpha(R^2 - (R - e)^2)L$$

Sachant $e \ll R$ et $e \ll L$, il est raisonnable de se limiter au premier ordre en e tel que :

$$V_2 = \alpha 2eRL + o(e^2) \approx 2eRL\alpha$$

Finalement, supposant la porte constituée d'un matériau uniforme et homogène de masse volumique μ , il vient sa masse :

$$m = 2\mu eRL (\alpha + \sin(\alpha))$$

Question 6.2. Sachant que la porte possède deux plans de symétrie $(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ et $(C, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ alors son centre d'inertie appartient à la droite (C, \vec{y}_1) , intersection de ces deux plans. On cherche donc la coordonnée

$$\overrightarrow{CG} \cdot \vec{y}_1 = \frac{1}{m} \int_{M \in V} \mu \overrightarrow{CM} \cdot \vec{y}_1 dV$$

Partitionnant le volume V en deux volumes complémentaires V_1 et V_2 identiques à ceux de la question 6.1, il vient :

$$m \overrightarrow{CG} \cdot \vec{y}_1 = \int_{M \in V_1} \mu \overrightarrow{CM} \cdot \vec{y}_1 dV + \int_{M \in V_2} \mu \overrightarrow{CM} \cdot \vec{y}_1 dV$$

que l'on peut noter

$$m \overrightarrow{CG} \cdot \vec{y}_1 = m_1 \overrightarrow{CG}_2 \cdot \vec{y}_1 + m_2 \overrightarrow{CG}_2 \cdot \vec{y}_1$$

Pour le volume V_1 , la position du centre de gravité est évident :

$$\overrightarrow{CG}_2 \cdot \vec{y}_1 = -R \cos(\alpha) + \frac{e}{2} \approx -R \cos(\alpha)$$

Pour le volume V_2 , que l'on peut modéliser comme un arc

$$\mathcal{A} = \left\{ M \mid \overrightarrow{CM} = R\vec{e}_r(\theta), \quad \theta \in \left[\frac{-\pi}{2} - \alpha, \frac{-\pi}{2} + \alpha \right] \right\}$$

avec une densité linéique $dm = \mu eLR d\theta$, telle que l'on ait :

$$\begin{aligned} m_2 \overrightarrow{CG_2} \cdot \vec{y}_1 &= \int_{M \in V_2} \mu \overrightarrow{CM} \cdot \vec{y}_1 dV = \int_{-\pi/2-\alpha}^{-\pi/2+\alpha} \mu eLR^2 \vec{e}_r \cdot \vec{y}_1 d\theta \\ &= \mu eLR^2 \int_{-\pi/2-\alpha}^{-\pi/2+\alpha} \sin(\theta) d\theta = \mu eLR^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} -\cos(\theta) d\theta \\ &= -2\mu eLR^2 \sin(\alpha) \end{aligned}$$

Finalement, il vient :

$$\boxed{\overrightarrow{CG} \cdot \vec{y}_1 = -R \sin \alpha \frac{1 + \cos(\alpha)}{\alpha + \sin(\alpha)} \approx -8,4 \text{ m}}$$

Question 6.3. La pression de l'eau qui s'exerce sur la porte en un point M est donnée par :

$$p(y) = \mu_0 g y, \quad y = h + \overrightarrow{MC} \cdot \vec{y}_0$$

Cette pression agit à droite sur la surface d'un cylindre de rayon R et de longueur L

$$S_1 = \left\{ M \mid \overrightarrow{CM} = R\vec{e}_r(\theta) + z\vec{z}_0, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2} - \alpha, \theta_{\max} \right], z \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right] \right\}$$

d'élément différentiel de surface $dS_1 = R d\theta dz$, telle que l'action mécanique élémentaire soit :

$$d\overrightarrow{F_{e \rightarrow p}} = -\mu_0 g (h + R \sin(\theta_1 + \theta)) \vec{e}_r R d\theta dz$$

et sur une surface plane de longueur L et de largeur L_1

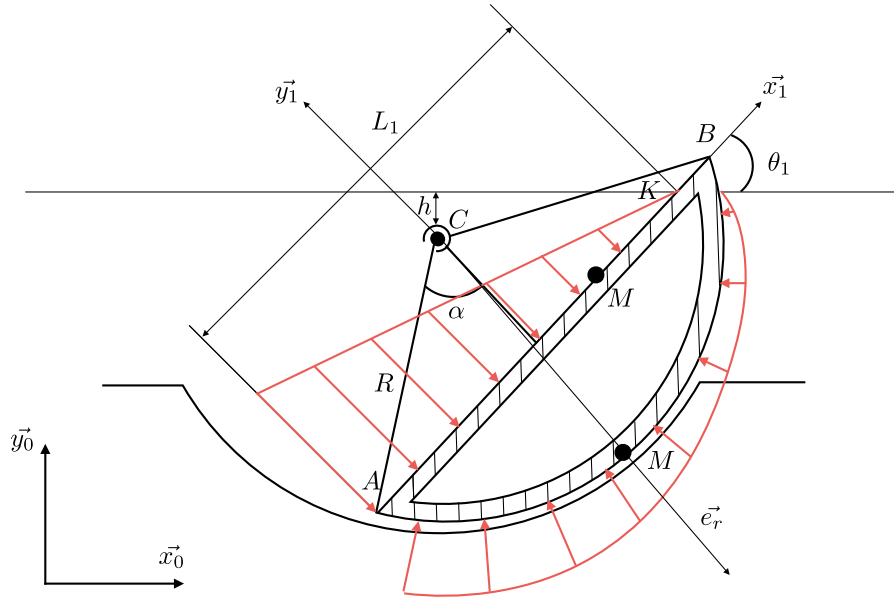
$$S_2 = \left\{ M \mid \overrightarrow{CM} = x\vec{x}_1 - R \cos(\alpha)\vec{y}_1 + z\vec{z}_0, \quad \theta \in [-R \sin(\alpha), L_1 - R \sin(\alpha)], z \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right] \right\}$$

d'élément différentiel de surface $dS_2 = dx dz$, telle que l'action mécanique élémentaire soit :

$$d\overrightarrow{F_{e \rightarrow p}} = \mu_0 g (h + x \sin(\theta_1) - R \cos(\alpha) \cos(\theta_1)) \vec{y}_1 dx dz$$

nulle quand $x = L_1 - R \sin(\alpha)$, d'où

$$d\overrightarrow{F_{e \rightarrow p}} = -\mu_0 g (L_1 - R \sin(\alpha) - x) \sin(\theta_1) \vec{y}_1 dx dz$$



Sur la surface S_1 , il vient le moment élémentaire au point C :

$$d\overrightarrow{M}_{C,e \rightarrow p} = d\overrightarrow{F}_{e \rightarrow p} \wedge \overrightarrow{MC} = -\mu_0 g z (h + R \sin(\theta_1 + \theta)) \vec{e}_\theta R d\theta dz$$

or comme $z \mapsto z$ est impaire, son intégrale sur le segment $[-L/2, L/2]$ est nulle ; donc

$$\overrightarrow{M}_{C,e \rightarrow p} = \int_{M \in S_1} d\overrightarrow{M}_{C,e \rightarrow p} = \vec{0}$$

Sur la surface S_2 , il vient le moment élémentaire au point C :

$$d\overrightarrow{M}_{C,e \rightarrow p} = d\overrightarrow{F}_{e \rightarrow p} \wedge \overrightarrow{MC} = -\mu_0 g (L_1 - R \sin(\alpha) - x) \sin(\theta_1) (x \vec{z}_0 - z \vec{x}_1) dx dz$$

or comme $z \mapsto z$ est impaire, son intégrale sur le segment $[-L/2, L/2]$ est nulle ; donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M}_{C,e \rightarrow p} &= \int_{M \in S_2} -\mu_0 g (L_1 - R \sin(\alpha) - x) \sin(\theta_1) x \vec{z}_0 dx dz \\ &= -\mu_0 g \left(\int_{-L/2}^{L/2} dz \right) \sin(\theta_1) \left(\int_{-R \sin(\alpha)}^{L_1 - R \sin(\alpha)} (L_1 - R \sin(\alpha)) x - x^2 dx \right) \vec{z}_0 \\ &= \mu_0 g L \sin(\theta_1) \left[\frac{(L_1 - R \sin(\alpha))^3 + (R \sin(\alpha))^3}{3} \right. \\ &\quad \left. - (L_1 - R \sin(\alpha)) \frac{(L_1 - R \sin(\alpha))^2 - (R \sin(\alpha))^2}{2} \right] \vec{z}_0 \end{aligned}$$

qui, après développement se simplifie comme :

$$\boxed{\overrightarrow{M}_{C,e \rightarrow p} = \frac{\mu_0 g L \sin(\theta_1) L_1^2}{6} (3R \sin(\alpha) - L_1) \vec{z}_0}$$

qui correspond bien au moment que l'on peut déterminer intuitivement dans le cas $L_1 = 2R \sin(\alpha)$ avec

$$\overrightarrow{M_{C,e \rightarrow p}} = \mu_0 g \underbrace{2R \sin(\alpha) \sin(\theta_1)}_{y_{\max}} \times \underbrace{R \sin(\alpha) L}_{\text{demie-surface}} \times \underbrace{\frac{R \sin(\alpha)}{3}}_{\text{dist. axe central}} \vec{z}_0$$

Question 6.4. Pour déterminer le couple moteur permettant d'actionner la porte, il est nécessaire de :

1. isoler la porte **1** ;
2. réaliser le bilan des actions mécaniques extérieures (à **1**) :
 - liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_0) avec le bâti, telle que sa mobilité induise :

$$\overrightarrow{M_{C,\text{bâti} \rightarrow p}} \cdot \vec{z}_0 = 0$$

- action de la pression de l'eau (sur S_2 , puisque le moment en C induit par l'action sur S_1 est nul) ;
- action de la pesanteur, qui est un glisseur d'axe central (C, \vec{y}_0) et donc

$$\overrightarrow{M_{C,\text{bâti} \rightarrow p}} = -mg \vec{y}_0 \wedge GC$$

- action du moteur modélisée par un couple

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{z}_0 \end{array} \right\}_*$$

3. On suppose que **1** est en équilibre dans un référentiel galiléen et on lui applique le principe fondamental de la statique. En particulier, l'équation de moment autour de l'axe (C, \vec{z}_0) donne :

$$\overrightarrow{M_{C,\text{bâti} \rightarrow p}} \cdot \vec{z}_0 + \overrightarrow{M_{C,e \rightarrow p}} \cdot \vec{z}_0 + C_m = 0$$

d'où

$$C_m = g \sin(\theta_1) \left[mR \sin(\alpha) \frac{1 + \cos(\alpha)}{\alpha + \sin(\alpha)} - \frac{\mu_0 L L_1^2}{6} (3R \sin(\alpha) - L_1) \right]$$

Carburateur

Question 7.1. Pour déterminer l'action mécanique exercée par la pression de l'eau sur le flotteur, on découpe sa surface extérieure en :

- un disque de centre O et de rayon r

$$S_1 = \left\{ M \mid \overrightarrow{OM} = \xi \vec{e}_r(\theta), \quad \xi \in [0, r], \quad \theta \in [0, 2\pi] \right\},$$

d'élément différentiel de surface $dS_1 = \xi \, d\xi \, d\theta$, sur laquelle s'exerce l'action mécanique élémentaire

$$d\overrightarrow{F}_{e \rightarrow f}^{(1)} = \rho g h \vec{z} \, \xi \, d\xi \, d\theta$$

Par intégration sur la surface S_1 , il vient l'action mécanique globale :

$$\overrightarrow{F}_{e \rightarrow f}^{(1)} = \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho g h \xi \, d\theta \, d\xi \vec{z} = \rho g h \times 2\pi \times \frac{r^2}{2} \vec{z} = \pi \rho g h r^2 \vec{z}$$

- un tronc de cône de demi-angle au sommet α , de rayon de base r et de hauteur h tel que

$$S_2 = \left\{ M \mid \overrightarrow{OM} = z \vec{z} + R(z) \vec{e}_r(\theta), \quad z \in [0, h], \quad \theta \in [0, 2\pi] \right\}$$

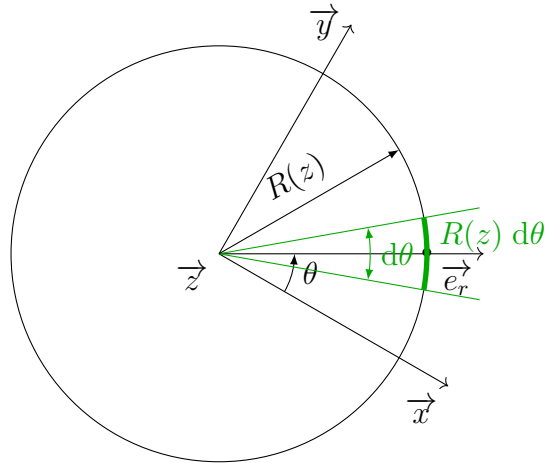
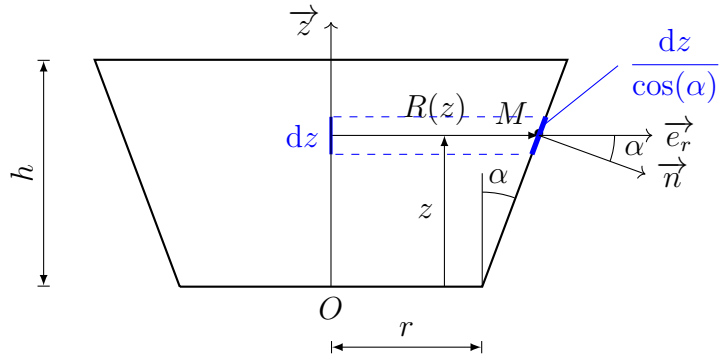
avec

$$R : z \mapsto r + \tan(\alpha)z$$

tel qu'au voisinage d'un point M , l'action mécanique élémentaire soit

$$d\overrightarrow{F}_{e \rightarrow f}^{(2)} = -\rho g (h - z) \vec{n} \, dS_2$$

On construit l'élément différentiel de surface au voisinage du point M tel qu'une variation d'angle $d\theta$ induise une variation de longueur d'arc $R(z)d\theta$ et qu'une variation de hauteur dz induise une variation de longueur de génératrice $\frac{dz}{\cos(\alpha)}$ comme illustré ci-après.



Il vient alors par produit l'élément différentiel de surface

$$dS_2 = R(z) d\theta \times \frac{dz}{\cos(\alpha)} = \frac{r + \tan(\alpha)z}{\cos(\alpha)} d\theta dz$$

Sachant que $\vec{n} = \cos(\alpha)\vec{e}_r - \sin(\alpha)\vec{z}$ et que

$$\int_0^{2\pi} \vec{e}_r d\theta = \int_0^{2\pi} \vec{e}_\theta d\theta = \vec{0}$$

par intégration sur la surface S_2 , il vient l'action mécanique globale :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_{e \rightarrow f}^{\textcircled{2}}} &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \rho g (h - z) \tan(\alpha) (r + \tan(\alpha)z) d\theta dz \vec{z} \\ &= 2\pi \rho g \tan(\alpha) \int_0^h (hr + z(h \tan(\alpha) - r) - z^2 \tan(\alpha)) dz \vec{z} \\ &= 2\pi \rho g \tan(\alpha) \left(h^2 r + \frac{h^2}{2} (h \tan(\alpha) - r) - \frac{h^3}{3} \tan(\alpha) \right) \vec{z} \\ &= \pi \rho g h^2 \tan(\alpha) \left(r + \frac{h}{3} \tan(\alpha) \right) \vec{z} \end{aligned}$$

Finalement, il vient par somme

$$\overrightarrow{F_{e \rightarrow f}} = \overrightarrow{F_{e \rightarrow f}^{\textcircled{1}}} + \overrightarrow{F_{e \rightarrow f}^{\textcircled{2}}} = \pi \rho g \left[hr^2 + h^2 \tan(\alpha) \left(r + \frac{h}{3} \tan(\alpha) \right) \right] \vec{z}$$

Pour des raisons de symétrie de révolution de la géométrie et de l'action mécanique exercée par la pression de l'eau, le torseur d'action mécanique globale est un glisseur d'axe central la droite (O, \vec{z}) .

Question 7.2. Pour appliquer le principe d'Archimède, il est nécessaire de déterminer le volume d'eau déplacé, correspondant au volume immergé. Partant du fait que, pour une altitude $z \in [0, h]$ donnée, l'aire est égale à :

$$A(z) = \pi R^2(z) = \pi (r + \tan(\alpha)z)^2$$

il vient par intégration sur le segment $[0, h]$, le volume :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(z) \, dz = \int_0^h \pi (r + \tan(\alpha)z)^2 \, dz \\ &= \pi \frac{(r + \tan(\alpha)h)^3 - r^3}{3 \tan(\alpha)} = \pi \left(r^2 h + r h^2 \tan(\alpha) + \frac{h^3 \tan^2(\alpha)}{3} \right) \\ &= \pi \left[h r^2 + h^2 \tan(\alpha) \left(r + \frac{h}{3} \tan(\alpha) \right) \right] \end{aligned}$$

qui, multiplié par ρg , conduit à la même expression de l'effort que celle trouvée à la question précédente.