Applications linéaires : introduction

Cours de É. Bouchet – PCSI

5 février 2025

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.1 (Application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application de E dans F. On dit que f est une **application linéaire** de E dans F si elle vérifie : $\forall (x,y) \in E^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Proposition 1.2 (Valeur en 0)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Alors $f(0_E) = 0_F$.

Proposition 1.3 (Caractérisation d'une application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. La fonction f est une application linéaire de E dans F si et seulement si $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

Exercice 1. Montrer que l'application $P \mapsto P'$ est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2. Déterminer si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. La fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $f\left((x,y)\right) = x + y + 1$.
2. La fonction g définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $g\left((x,y)\right) = x + y$.
3. La fonction h définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $h\left((x,y)\right) = x \times y$.

Exercice 3. Montrer que l'application f définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, par $f(M) = M^\top$ est une application linéaire.

1.2 Opérations usuelles

Proposition 1.4 (Espace vectoriel des applications linéaires)

L'ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est un espace vectoriel. On le note $\mathcal{L}(E,F)$.

Proposition 1.5 (Composée de deux applications linéaires)

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f est une application linéaire de E dans F, et g est une application linéaire de F dans G, alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Proposition 1.6 (Distributivité de la composition)

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f et g sont des applications de E dans F, et h est une application linéaire de F dans G, alors $h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$.

Remarque. On savait déjà que si f est une application de E dans F, et g et h sont des applications de F dans G, alors $(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$, sans condition de linéarité.

1.3 Isomorphismes

Définition 1.7 (Isomorphisme)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F. On dit que f est un **isomorphisme** de E dans F lorsqu'elle est bijective de E dans F.

Exemple. L'application identité de E, notée id_E et définie par $x \mapsto x$ est un isomorphisme de E.

Proposition 1.8 (Réciproque d'un isomorphisme)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et f un isomorphisme de E dans F. Alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Proposition 1.9 (Composée d'isomorphismes)

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f est un isomorphisme de E dans F, et g est un isomorphisme de F dans G, alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E dans G, et on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

2 Noyau, image et rang

2.1 Noyau et image

Proposition 2.1 (Image directe d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et H un sous-espace vectoriel de E. Alors $f(H)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Remarque. On rappelle que $f(H) = \{f(x) | x \in H\}$.

Proposition 2.2 (Image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et G un sous-espace vectoriel de F. Alors $f^{-1}(G)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque. On rappelle que $f^{-1}(G) = \{x \in E | f(x) \in G\}$.

Définition 2.3 (Image d'une application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On appelle **image** de f, et on note $\mathrm{Im}(f)$, l'image directe de E par f.

Remarque. On a donc :

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{y \in F | \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)\}.$$

De plus, d'après les résultats précédents, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Exercice 4. Soit g l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $g((x, y)) = x + y$. Déterminer son image.

Proposition 2.4 (Image et surjectivité)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. La fonction f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Remarque. On peut également noter que $\mathrm{Im}(f) = \{0_F\}$ si et seulement si f est l'application nulle.

Définition 2.5 (Noyau d'une application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F. On appelle **noyau** de f, et on note $\mathrm{Ker}(f)$, l'image réciproque de $\{0_F\}$ par f.

Remarque. On a donc :

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E | f(x) = 0_F\}.$$

De plus, d'après les résultats précédents, $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 5. Soit g l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $g((x,y)) = x+y$. Déterminer son noyau.

Proposition 2.6 (Noyau et injectivité)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F. La fonction f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Remarque. On peut également noter que $\mathrm{Ker}(f) = E$ si et seulement si f est l'application nulle.

Exercice 6. On considère l'application linéaire $f : P \mapsto P'$ définie de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$. Trouver son noyau et son image. Est-elle injective ? surjective ?

Proposition 2.7 (Famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On suppose que E est de dimension finie et on note $(e_1, \ldots, e_n)$ une de ses familles génératrices. Alors :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

Remarque. C'est en particulier vrai lorsque $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

Exercice 7. Soit f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (4x-6y, 2x-3y)$. Montrer que c'est une application linéaire et déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

2.2 Rang

Définition 2.8 (Rang d'une application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On dit que f est **de rang fini** quand $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie. Dans ce cas, on appelle **rang** de f, et on note $\mathrm{rg}(f)$ la valeur :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(f(E)).$$

Remarque. La fonction nulle est la seule application de rang 0.

Remarque. $\mathrm{Im}(f) \subset F$ donc si F est de dimension finie, $\dim(\mathrm{Im}(u)) \leqslant \dim(F)$. On en déduit $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(F)$.

Remarque. Si E est un espace de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, de base $(e_1, \ldots, e_n)$. On a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ donc $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \leqslant n$, et en particulier $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(E)$.

Exercice 8. Soit f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (4x-6y, 2x-3y)$. Déterminer son rang.

Proposition 2.9 (Rang de la composée)

Soit E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors :

$$\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)).$$

Proposition 2.10 (Petit lemme)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire injective de E dans F. Alors l'image par f d'une famille libre de E est une famille libre de F.

Proposition 2.11 (Invariance du rang par composition par un isomorphisme)

Soit E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

- Si u est un isomorphisme, $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(v)$.
- Si v est un isomorphisme, $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u)$.

3 Endomorphismes

3.1 Définitions et opérations usuelles

Définition 3.1 (Endomorphisme)

Soit E un espace vectoriel. On appelle **endomorphisme** de E toute application linéaire de E dans E.

Définition 3.2 (Homothétie)

Soit E un espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle **homothétie** de rapport λ l'endomorphisme h de E défini par $\forall x \in E$, $h(x) = \lambda x$.

Remarque. On a alors $h = \lambda\, \mathrm{id}_E$, où id_E est l'application identité de E.

Proposition 3.3 (Espace vectoriel des endomorphismes)

L'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel E est un espace vectoriel. On le note $\mathcal{L}(E)$.

Définition 3.4 (Puissances d'un endomorphisme)

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $f^0 = \mathrm{id}_E$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{p+1} = f^p \circ f = f \circ f^p$.

Remarque. On a ainsi $f^0 = \mathrm{id}_E$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f \dots$

Remarque. Attention : la notation puissance se réfère habituellement à des produits, mais ici, il s'agit bien de compositions, pas de produits !

Exemple. L'application $f : P \mapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. On peut donc définir ses puissances : pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(P(X)) = P^{(n)}(X)$.

Proposition 3.5 (Formule du binôme de Newton)

Soit E un espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}.$$

3.2 Projecteurs et symétries

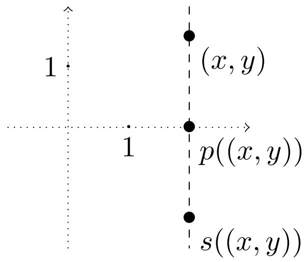
Dans toute cette partie, on notera E un espace vectoriel, et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Pour tout vecteur $x \in E$, on note (x_1, x_2) l'unique couple de $F_1 \times F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.

Définition 3.6 (Projecteur, symétrie)

On appelle **projecteur** sur F_1 parallèlement à F_2 l'application p définie par $\forall x \in E$, $p(x) = x_1$.
On appelle **symétrie** par rapport à F_1 parallèlement à F_2 l'application s définie par $\forall x \in E$, $s(x) = x_1 - x_2$.

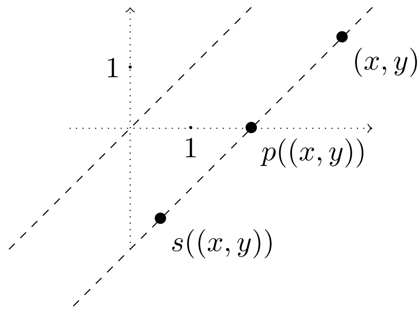
Exemple. $\mathbb{R}^2 = \operatorname{Vect}((1,0)) \oplus \operatorname{Vect}((0,1))$, avec $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) = (x,0) + (0,y)$.

— $p : (x,y) \mapsto (x,0)$ est le projecteur sur $\operatorname{Vect}((1,0))$ parallèlement à $\operatorname{Vect}((0,1))$.
— $s : (x,y) \mapsto (x,-y)$ est la symétrie par rapport à $\operatorname{Vect}((1,0))$ parallèlement à $\operatorname{Vect}((0,1))$.



Exemple. $\mathbb{R}^2 = \operatorname{Vect}((1,0)) \oplus \operatorname{Vect}((1,1))$, avec $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) = (x-y,0) + (y,y)$.

— $(x,y) \mapsto (x-y,0)$ est le projecteur sur $\operatorname{Vect}((1,0))$ parallèlement à $\operatorname{Vect}((1,1))$.
— $(x,y) \mapsto (x-2y,-y)$ est la symétrie par rapport à $\operatorname{Vect}((1,0))$ parallèlement à $\operatorname{Vect}((1,1))$.



Remarque. p est le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2 quand $p|_{F_1} = \mathrm{id}_E$ et $p|_{F_2} = 0$.
s est la symétrie par rapport à F_1, parallèlement à F_2 quand $s|_{F_1} = \mathrm{id}_E$ et $s|_{F_2} = -\mathrm{id}_E$.

Proposition 3.7 (Linéarité des projecteurs et symétries)

Les projecteurs et les symétries définis sur E sont des endomorphismes de E.

Proposition 3.8 (Caractéristiques d'un projecteur)

Soit p le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2. Alors $F_1 = \operatorname{Im}(p) = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ et $F_2 = \operatorname{Ker}(p)$.

Proposition 3.9 (Caractéristiques d'une symétrie)

Soit s la symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2. Alors $F_1 = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $F_2 = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Proposition 3.10 (Caractérisation des projecteurs)

Soit f un endomorphisme de E. La fonction f est un projecteur si et seulement si $f \circ f = f$.

Exercice 9. Soit f l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (4x - 6y, 2x - 3y)$.
Montrer que f est un projecteur, en précisant ses caractéristiques.

Proposition 3.11 (Caractérisation des symétries)

Soit f un endomorphisme de E. La fonction f est une symétrie si et seulement si $f \circ f = \mathrm{id}_E$.

3.3 Automorphismes

Définition 3.12 (Automorphisme, groupe linéaire de E)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On dit que f est un **automorphisme** de E lorsqu'elle est bijective de E dans E.
On appelle **groupe linéaire** de E et on note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Remarque. Pour être un automorphisme, il faut donc être à la fois un endomorphisme et un isomorphisme.

Exemple. Les symétries sont des automorphismes, les homothéties de rapport non nul aussi.

Proposition 3.13 (Propriétés des automorphismes)

Soit E un espace vectoriel. Alors :

- $\forall (u, v) \in GL(E)^2$, $u \circ v \in GL(E)$.
- $\forall u \in GL(E)$, $u \circ \mathrm{id}_E = u = \mathrm{id}_E \circ u$.
- $\forall u \in GL(E)$, $u^{-1} \in GL(E)$.

Remarque. Soit $u \in GL(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$. On peut définir u^k par : $u^k = \begin{cases} \mathrm{id}_E & \text{si } k = 0 \\ \underbrace{u \circ \ldots \circ u}_{k \text{ fois}} & \text{si } k > 0 \\ \underbrace{u^{-1} \circ \ldots \circ u^{-1}}_{-k \text{ fois}} & \text{si } k < 0 \end{cases}$