Applications linéaires : introduction

Exercice 1 (★). Soit $a \in \mathbb{R}$. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (3x_1 + x_2, 2x_1 - x_2) \end{array}$
2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (x_3, x_1, a) \end{array}$
3. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) + P'(0) \end{array}$
4. $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & 1 + P' \end{array}$
5. $v : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^2 \end{array}$
6. $w : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (3^n u_{n+2})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$

Résultat attendu :

1. Oui
2. Seulement si $a = 0$
3. Oui
4. Non
5. Non
6. Oui

Exercice 2 (★). Soit a un réel. Parmi les applications suivantes, déterminer (éventuellement en fonction des valeurs de a) celles qui sont linéaires :

1. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, a) \end{array}$
2. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (ax, ay) \end{array}$
3. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + a, y + a) \end{array}$

Résultat attendu :

1. Oui ssi $a = 0$
2. Oui pour tout a
3. Oui ssi $a = 0$

Exercice 3 (★★). Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ et $x \in E$. Traduire les phrases suivantes.

1. $x \in \mathrm{Ker}(u)$.
2. $x \in \mathrm{Im}(v)$.
3. $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$.
4. $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$.
5. $x \in \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$.
6. $x \in \mathrm{Ker}(v) + \mathrm{Im}(u)$.
7. $x \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}_E) + \mathrm{Im}(v)$.
8. $x \in \mathrm{Ker}(u^2) \cap \mathrm{Im}(u + v)$.

Résultat attendu :

1. $u(x) = 0$
2. $\exists z \in E$ tq $x = v(z)$
3. $u(x) = 0$ et $v(x) = 0$
4. $u(x) = 0$ et $\exists z \in E,\ x = u(z)$
5. $\exists (a, b) \in E^2$ tq $x = a + b$, $u(a) = 0$ et $v(b) = 0$
6. $\exists (a, z) \in E^2$ tq $x = a + u(z)$ et $v(a) = 0$
7. $\exists (a, z) \in E^2$ tq $x = a + v(z)$ avec $u(a) + a = 0$
8. $u^2(x) = 0$ et $\exists z \in E$ tq $x = (u + v)(z)$

Exercice 4 (★). Montrer que les applications suivantes sont linéaires et déterminer une base de leurs noyaux.

1. $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y, y + z) \end{array}$
2. $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (P(0), P'(-1)) \end{array}$

Résultat attendu :

1. $((1, 1, -1))$ est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$
2. $(X^2 + 2X)$ est une base de $\mathrm{Ker}(\psi)$

Exercice 5 (★). Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^5$ définie pour tous α, β réels par

$$f((\alpha, \beta)) = (\alpha + 2\beta, \alpha, \alpha + \beta, 3\alpha + 5\beta, -\alpha + 2\beta).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et préciser leur dimensions.
3. f est-elle surjective ? injective ?

Résultat attendu :

1. On revient à la définition.
2. $\mathrm{Ker}(f) = \{(0, 0)\}$ est de dimension 0. $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 1, 3, -1), (2, 0, 1, 5, 2)\right)$ est de dimension 2.
3. f est injective, mais pas surjective.

Exercice 6 (★). Soit f définie de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ par $f(P(X)) = P'(X) + P(1)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base du noyau de f.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_1[X]$.

Résultat attendu :

1. On revient à la définition.
2. Une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est $(X-2)$.
3. On montre que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 7 (★★). Déterminer une application linéaire u de sorte que l'ensemble F soit le noyau de u :

1. $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{t \mapsto C \mid C \in \mathbb{R}\}$ (ensemble des fonctions constantes)
2. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in E | x = 2y\}$
3. $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in E | P'(1) = 0 \text{ et } P(2) = P''(0)\}$
4. $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, F est l'ensemble des suites géométriques de raison 3

Résultat attendu : Les fonctions proposées sont des exemples, d'autres peuvent également convenir.

1. $\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f - f(0) \end{array}$
2. $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x - 2y \end{array}$
3. $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (P'(1), P(2) - P''(0)) \end{array}$
4. $\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ (u_n) & \mapsto & (u_{n+1} - 3u_n) \end{array}$

Exercice 8 (★★). Soient $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 1$ deux entiers. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p))$ est une famille libre alors $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est une famille libre.
Résultat attendu : On revient à la définition d'une famille libre et on compose par f pour conclure.

Exercice 9 (★★). Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \iff \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}.$$

Résultat attendu : On montre successivement les deux implications, en utilisant des doubles inclusions pour les égalités d'ensembles.

Exercice 10 (★★). Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \iff \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = E.$$

Résultat attendu : On montre successivement les deux implications, en utilisant des doubles inclusions pour les égalités d'ensembles.

Exercice 11 (★). On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x - y, 0, z).$$

1. Déterminer le noyau et l'image de f et donner une base de chacun d'eux.
2. Montrer que f est un projecteur, dont on précisera les caractéristiques.

Résultat attendu :

1. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1, 1, 0))$, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 0, 1))$, et ces familles génératrices sont des bases.
2. f est le projecteur sur $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 0, 1))$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1, 1, 0))$.

Exercice 12 (★). Soit $\varphi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$ avec $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$.
Montrer que φ_A est une symétrie, et en déterminer les éléments caractéristiques.

Résultat attendu : $\mathrm{Ker}(\varphi_A - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{Ker}(\varphi_A + \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, et φ_A est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(\varphi_A - \mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(\varphi_A + \mathrm{id})$.

Exercice 13 (★). On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 | a - b + c = 0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right).$$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Calculer le projeté d'un vecteur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G.

Résultat attendu :

1. Le plus simple au vu de la suite est de raisonner par analyse-synthèse.
2. Le projeté de (a,b,c) sur F parallèlement à G est $(b-c, -a+2b-c, -a+b)$.

Exercice 14 (★★). On fixe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ non nul. On considère l'application f qui à tout polynôme P associe le polynôme $f(P)$ égal au reste dans la division euclidienne de P par Q.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$.
2. Montrer qu'il s'agit d'un projecteur et expliciter ses noyau et image.

Résultat attendu :

1. On utilise le théorème de division euclidienne, en faisant bien attention au degré du reste.
2. Les conditions sur le degré donnent $f \circ f = f$. $\mathrm{Ker}(f) = \{S(X)Q(X) | S(X) \in \mathbb{R}[X]\}$, et si $n = \deg(Q)$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (un antécédent d'un polynôme P étant alors lui-même).

Exercice 15 (Type DS)**.** Soit $u=(2,1,-1)$, $v=(1,-1,3)$, $w=(3,3,-5)$ et $F=\text{Vect}(u,v,w)$.

1. Déterminer une base de F.
2. Montrer que $f:(\alpha,\beta,\gamma)\mapsto(3\alpha+\gamma,\alpha-\beta+\gamma,-3\alpha-3\beta+\gamma)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
4. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
5. A-t-on $\mathbb{R}^3=\text{Ker}(f)\oplus\text{Im}(f)$?
6. Les vecteurs u, v, w sont-ils des éléments de $\text{Im}(f)$?
7. Déterminer une base et la dimension de $F\cap\text{Im}(f)$.

Résultat attendu :

1. On remarque que $u=\frac{v+w}{2}$, donc $F=\text{Vect}(v,w)$. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on suppose que $av+bw=0$. Donc $a(1,-1,3)+b(3,3,-5)=(0,0,0)$, ce qui donne $(a+3b,-a+3b,3a-5b)=(0,0,0)$. En identifiant les coefficients, on trouve $a+3b=0$, $-a+3b=0$ et $3a-5b=0$. Sommer les deux premières donne $6b=0$ et $a=3b$, donc $a=b=0$. Donc (v,w) est une famille libre, donc (v,w) est une base de F.
   Rmq : il était possible de retirer un autre vecteur que u, on obtenait alors une base différente.
2. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$,
   $$\begin{aligned}f\left(\lambda(x,y,z)+(a,b,c)\right)&=f((\lambda x+a,\lambda y+b,\lambda z+c))\\&=(3\lambda x+3a+\lambda z+c,\lambda x+a-\lambda y-b+\lambda z+c,-3\lambda x-3a-3\lambda y-3b+\lambda z+c)\\&=\lambda f((x,y,z))+f((a,b,c)).\end{aligned}$$
   Donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit $A=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,
   $$A\in\text{Ker}(f)\Leftrightarrow\begin{cases}3x+z=0\\x-y+z=0\\-3x-3y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+z=0\\-2x-y=0\\-6x-3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=-3x\\y=-2x\end{cases}\Leftrightarrow A=x(1,-2,-3)\Leftrightarrow A\in\text{Vect}((1,-2,-3)),$$
   où on a effectué $L_2\leftarrow L_2-L_1$ et $L_3\leftarrow L_3-L_1$, puis constaté que L_3 était multiple de L_2.
   Donc $\text{Ker}(f)=\text{Vect}((1,-2,-3))$. Comme $(1,-2,-3)\neq(0,0,0)$, c'est une famille génératrice et libre de $\text{Ker}(f)$, donc une base de $\text{Ker}(f)$.
4. On a $\text{Im}(f)=\text{Vect}(f((1,0,0)),f((0,1,0)),f((0,0,1)))=\text{Vect}((3,1,-3),(0,-1,-3),(1,1,1))$ (puisque $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$). Or $(3,1,-3)=2(0,-1,-3)+3(1,1,1)$.
   Donc $\text{Im}(f)=\text{Vect}((0,-1,-3),(1,1,1))$ et la famille $((0,-1,-3),(1,1,1))$ est génératrice de $\text{Im}(f)$ (on pouvait aussi faire le choix d'éliminer un autre vecteur).
   Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on suppose que $a(0,-1,-3)+b(1,1,1)=(0,0,0)$. Alors par identification des deux premiers coefficients, $b=0$ et $-a+b=0$, donc $a=b=0$. Donc la famille est libre. Donc $((0,-1,-3),(1,1,1))$ est une base de $\text{Im}(f)$.
   Rmq : le théorème du rang (prochain chapitre) donnera $\text{rg}(f)=\dim(\mathbb{R}^3)-\dim(\text{Ker}(f))=3-1=2$, ce qui permettra de conclure sans montrer la liberté, en constatant que la famille $((0,-1,-3),(1,1,1))$ est génératrice de $\text{Im}(f)$ et à $\dim(\text{Im}(f))=2$ éléments, donc une base.
5. Montrons que la juxtaposition des bases obtenues aux questions précédentes est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, on suppose que $a(1,-2,-3)+b(0,-1,-3)+c(1,1,1)=(0,0,0)$. L'identification des coefficients donne $a+c=0$, $-2a-b+c=0$, $-3a-3b+c=0$, donc $a=-c$, $3c-b=0$ et $4c-3b=0$. Donc $a=-c$, $b=3c$ et $4c-9c=0$. Donc $a=b=c=0$. Donc la famille $((1,-2,-3),(0,-1,-3),(1,1,1))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$. Or c'est une famille à $3=\dim(\mathbb{R}^3)$ éléments. Donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Donc $\mathbb{R}^3=\text{Ker}(f)\oplus\text{Im}(f)$.
6. On rappelle que $((0,-1,-3),(1,1,1))$ est une base de $\text{Im}(f)$ (même si on pouvait aussi raisonner par recherche d'antécédents, ce qui donnerait des calculs similaires).
   - $u=(2,1,-1)=(0,-1,-3)+2(1,1,1)$, donc $u\in\text{Im}(f)$.
   - Supposons que $v\in\text{Im}(f)$. Donc $\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tq$\cdot$ $v=a(0,-1,-3)+b(1,1,1)$. Par identification des coefficients, $b=1$, $b-a=-1$ et $b-3a=3$. Donc $b=1$, $a=2$ et $a=\frac{-2}{3}$: absurde. Donc $v\notin\text{Im}(f)$.
   - Supposons que $w\in\text{Im}(f)$. Donc $\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tq $w=a(0,-1,-3)+b(1,1,1)$. Par identification des coefficients, $b=3$, $b-a=3$ et $b-3a=-5$. Donc $b=3$, $a=0$ et $a=\frac{8}{3}$: absurde. Donc $w\notin\text{Im}(f)$.
7. On sait que $F\cap\text{Im}(f)\subset F$. Or $v\in F$ et $v\notin F\cap\text{Im}(f)$, donc ces ensembles ne sont pas égaux. Donc $\dim(F\cap\text{Im}(f))<\dim(F)=2$, on en déduit $\dim(F\cap\text{Im}(f))\leqslant 1$.
   Par ailleurs $u\in F\cap\text{Im}(f)$ et $u\neq(0,0,0)$, donc $\dim(F\cap\text{Im}(f))\geqslant 1$.
   Donc $\dim(F\cap\text{Im}(f))=1$ et u est une base de $F\cap\text{Im}(f)$.
   Variante calculatoire : partir de $A\in F\cap\text{Im}(f)$, le traduire en utilisant les bases obtenues aux questions précédentes, et se ramener à une résolution de système linéaire.