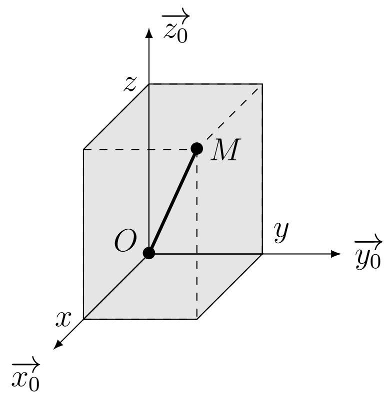
Éléments différentiels

Le calcul des aires dans $\mathbb{R}^2$ ou le calcul des volumes dans $\mathbb{R}^3$ se fait avec des intégrales nécessitant des éléments différentiels. Ils sont associés au système de coordonnées choisi pour paramétrer l'ensemble des points du domaine (surface ou volume). La solution la plus naturelle est d'utiliser un système de coordonnées cartésiennes associé à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera ici $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$. Mais deux autres systèmes de coordonnées sont aussi couramment employés et définis ci-après.

1 Coordonnées cartésiennes



Dans un système de coordonnées cartésiennes, la position d'un point M dans un repère $\mathcal{R}_0$, d'origine O, est définie par les trois coordonnées :

$$x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad z \in \mathbb{R}$$

de sorte que le vecteur position s'écrive :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{x_0} + y\overrightarrow{y_0} + z\overrightarrow{z_0}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, notée $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$.

1.1 Élément différentiel de volume

Au voisinage d'un point M, on définit l'élément différentiel de volume par

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \times \mathrm{d}y \times \mathrm{d}z$$

1.2 Élément différentiel de surface

Au voisinage d'un point M, on définit l'élément différentiel de surface

— de normale $\overrightarrow{x}$

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}y \times \mathrm{d}z$$

— de normale $\overrightarrow{y}$

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}z \times \mathrm{d}x$$

— de normale $\overrightarrow{z}$

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}x \times \mathrm{d}y$$

2 Coordonnées cylindriques

Dans un système de coordonnées cylindriques (ou polaires), la position d'un point M dans un repère $\mathcal{R}_0$, d'origine O, est définie par les trois coordonnées :

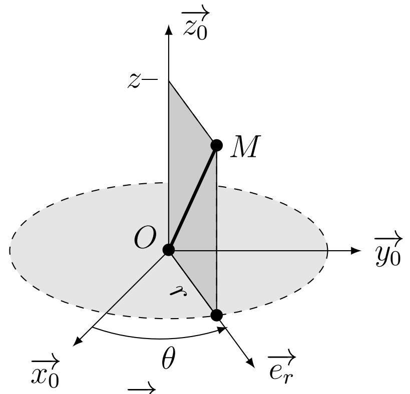
$$r \in \mathbb{R}^+, \quad \theta \in [0, 2\pi[\quad \text{et} \quad z \in \mathbb{R}$$

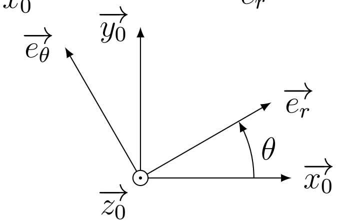
de sorte que le vecteur position s'écrive :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{z_0}, \qquad \overrightarrow{e_r} \overset{\text{déf.}}{=} \overrightarrow{e_r}(\theta)$$

dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{z_0})$. En projetant le vecteur radial $\overrightarrow{e_r}$, fonction de l'angle θ, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on peut établir le lien avec les coordonnées cartésiennes :

$$x = r\cos(\theta)\ , \qquad y = r\sin(\theta)\ , \qquad z = z$$

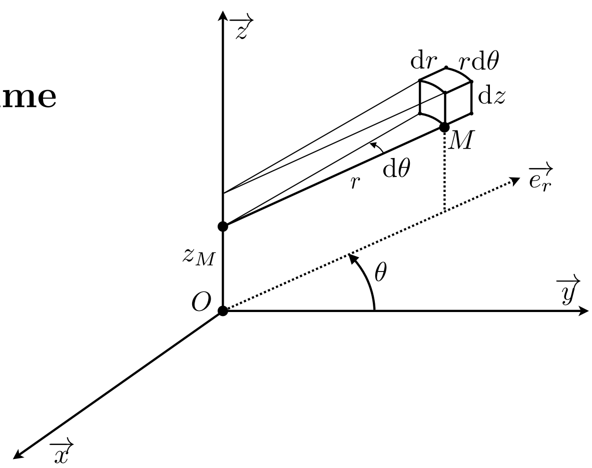




2.1 Élément differentiel de volume

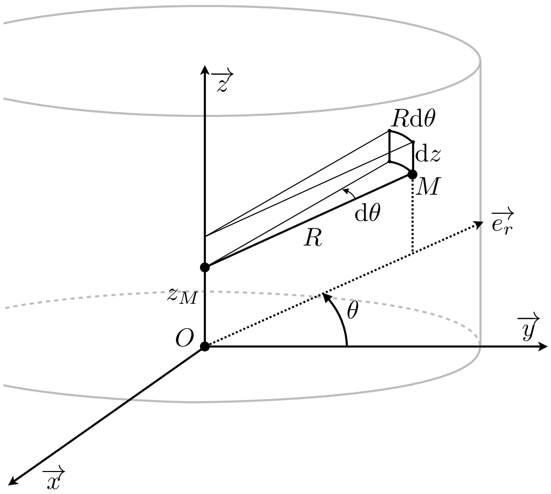
Au voisinage d'un point M, on définit l'élément différentiel de volume par

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}r \times r\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}z$$



2.2 Éléments différentiels de surface

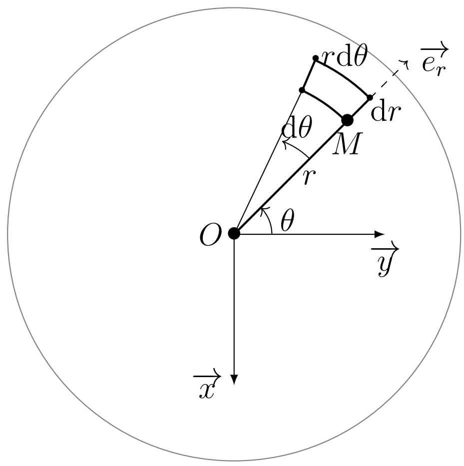
Surface cylindrique



Au voisinage d'un point M, on définit l'élément différentiel de surface de normale $\overrightarrow{e_r}$ (à R constant)

$$\mathrm{d}S = R\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}z$$

Surface annulaire



Au voisinage d'un point M, on définit l'élément différentiel de surface de normale $\overrightarrow{z}$ (à z constant)

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}r \times r\mathrm{d}\theta$$

3 Coordonnées sphériques

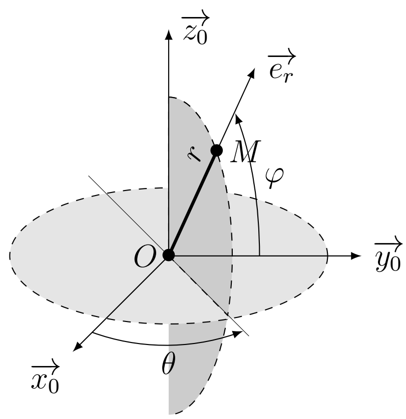
Dans un système de coordonnées sphériques, la position d'un point M dans un repère $\mathcal{R}_0$, d'origine O, est définie par les trois coordonnées :

$$r \in \mathbb{R}^+, \quad \theta \in [0, 2\pi[\quad \text{et} \quad \varphi \in [0, \pi]$$

de sorte que le vecteur position s'écrive :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}, \qquad \overrightarrow{e_r} \overset{\text{déf.}}{=} \overrightarrow{e_r}(\theta, \varphi)$$

dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$. En projetant le vecteur radial $\overrightarrow{e_r}$, fonction des angles θ et φ, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on peut établir le lien avec les coordonnées cartésiennes :

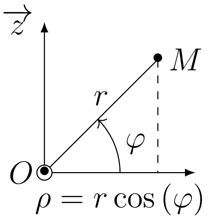


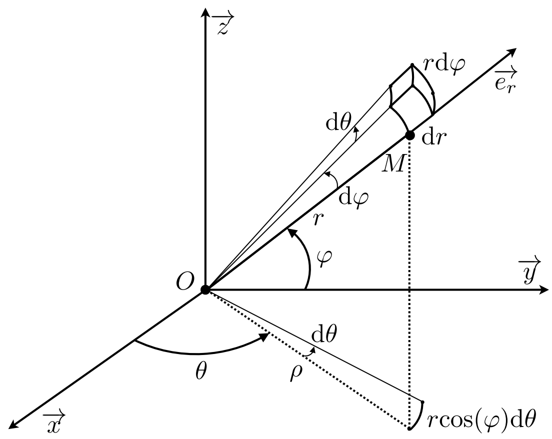
$$x = r\cos(\theta)\cos(\varphi)\ , \qquad y = r\sin(\theta)\cos(\varphi)\ , \qquad z = r\sin(\varphi)$$

3.1 Élément différentiel de volume

Au voisinage d'un point M, on définit l'élément différentiel de volume par

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}r \times r\cos(\varphi)\mathrm{d}\theta \times r\mathrm{d}\varphi$$





3.2 Éléments différentiels de surface

Au voisinage d'un point M, on définit l'élément différentiel de surface de normale $\overrightarrow{e_r}$ (à R constant)

$$\mathrm{d}S = R\cos(\varphi)\mathrm{d}\theta \times R\mathrm{d}\varphi$$