Modélisation et étude des équilibres statiques

N. Mesnier
Lycée Jean Perrin, Lyon

2024–2025

Contexte & objectifs

Contexte

- les actions mécaniques sont au cœur des systèmes mécaniques ;
- elles permettent de les **maintenir à l'équilibre** ou de créer des mouvements ;
- leur modélisation est indispensable à leur dimensionnement ou leur étude.

Objectifs du cours

- savoir étudier un problème d'équilibre statique pour :
- dimensionner les actionneurs en fonctionnement statique ou quasi-statique ;
- déterminer les actions mécaniques effectivement transmises par les différentes liaisons d'un mécanisme afin de les dimensionner.

Plan du cours

1 2 3

Introduction

« statique »

Étude des équilibres
des systèmes matériels
dans un référentiel galiléen.

3 notions :

- système matériel ;
- référentiel galiléen ;
- équilibre.

« statique »

Étude des équilibres
des systèmes matériels
dans un référentiel galiléen.

3 notions :

- système matériel ;
- référentiel galiléen ;
- équilibre.

Objet de la « statique »

Système matériel

- ensemble de particules de type fluide (liquide ou gaz) ou solide ;
- un solide seul ;
- un ensemble de solides liés ;
- un solide déformable suivant une loi connue (par exemple les ressorts) ;
- un solide déformable dans une configuration particulière (par exemple un fil tendu) ;
- un un volume de liquide ou de gaz.

Dans ce cours :

solide ou ensemble de solides « rigides »

Objet de la « statique »

Système matériel

- ensemble de particules de type fluide (liquide ou gaz) ou solide ;
- un solide seul ;
- un ensemble de solides liés ;
- un solide déformable suivant une loi connue (par exemple les ressorts) ;
- un solide déformable dans une configuration particulière (par exemple un fil tendu) ;
- un un volume de liquide ou de gaz.

Dans ce cours :

solide ou ensemble de solides « rigides »

Objet de la « statique »

Référentiel galiléen

L'existence de référentiels galiléens est postulée par la première loi de Newton.

Définition (Référentiel galiléen)

Un référentiel galiléen, ou inertiel, est un référentiel dans lequel un objet isolé, c'est-à-dire sur lequel ne s'exerce aucune force ou sur lequel la résultante des forces est nulle, est en mouvement de translation rectiligne uniforme.

Ces référentiels sont indispensables à l'étude des équilibres des systèmes matériels puisqu'ils sont eux-mêmes supposés en équilibre.

Trois lois de Newton (1687)

- 1re loi

  Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état.

- 2e loi

  L'altération du mouvement est proportionnelle à la force qui lui est imprimée ; et cette altération se fait en ligne droite dans la direction de la force.

- 3e loi

  Pour chaque action, il existe une réaction égale et opposée : l'action est toujours égale à la réaction ; c'est-à-dire que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales, et dans des directions contraires.

Notion d'équilibre

Définition (Équilibre)

Un solide S (ou un ensemble de solides Σ) est dit en équilibre dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ si sa quantité de mouvement est invariable au cours du temps.

Quantité de mouvement d'un solide = torseur cinétique $\{\mathscr{C}_{S/\mathcal{R}_g}\}$:

- de résultante $m\overrightarrow{V_{G,S/\mathcal{R}_g}}$;
- le moment au point G tient compte des quantités de mouvement de rotation autour des trois axes passant par G.

Condition d'équilibre du solide :

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\mathscr{C}_{S/\mathcal{R}_g}\}\right|_{\mathcal{R}_g} = \{0\}$$

Notion d'équilibre statique

Définition (Équilibre statique)

Un solide S (ou un ensemble de solides Σ) est dit en équilibre statique (ou strict) dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ si la position de tous les points de S (ou de Σ) dans ce référentiel est invariable au cours du temps.

$$\text{Équilibre strict } /\mathcal{R}_g \iff \text{système immobile } /\mathcal{R}_g$$

La condition d'équilibre statique est donc plus stricte que la seule notion d'équilibre puisqu'elle requiert un torseur cinétique identiquement nul :

$$\text{ÉQUILIBRE STATIQUE :} \qquad \{\mathscr{C}_{S/\mathcal{R})}\} = \{0\}$$

Notion d'équilibre quasi-statique

Si la norme des composantes du torseur dynamique est négligeable devant celle de la somme des actions mécaniques extérieures auxquelles il est soumis, il est possible de faire une approximation :

Équilibre quasi-statique

- Étude quasi-statique
  - consiste à négliger les variations de quantité de mouvement par rapport aux actions mécaniques ;
  - cas des « mouvements lents » ;
  - menée comme une étude de statique alors même que le système est en mouvement $/\mathcal{R}_g$.

1 2 3

Principe fondamental de la statique

Notion d'isolement, actions mécaniques extérieures

Soit un système matériel Σ en équilibre statique dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$.
Pour étudier l'équilibre d'un système matériel Σ, il est nécessaire de :

1. l'isoler afin de définir sa frontière $\partial\Sigma$ et son complément $\bar{\Sigma}$;
2. réaliser un bilan exhaustif des actions mécaniques extérieures exercées sur Σ ;
3. modéliser l'ensemble des actions mécaniques extérieures par un torseur des actions mécaniques extérieures :

$$\left\{\mathscr{T}_{\overline{\Sigma}\to\Sigma}\right\} = \sum_{i=1}^{n} \left\{\mathscr{T}_{\overline{\Sigma}_i\to\Sigma}\right\}$$

   où $\overline{\Sigma}_i$, $i \in [\![1;n]\!]$, représente une des n parties du système extérieur $\overline{\Sigma}$ exerçant une action mécanique sur Σ ;
4. la somme des torseurs doit toujours être réalisée en un même et unique point ; par exemple en un point A :

$$\left\{\mathscr{T}_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}\right\} = \sum_{i=1}^{n} {}_{A}\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{F_{\bar{\Sigma}_i\to\Sigma}} \\ \overrightarrow{M_{A,\bar{\Sigma}_i\to\Sigma}} \end{array}\right\}$$

Notion d'isolement, actions mécaniques extérieures

On n'isole jamais un bâti !

Il est impossible d'effectuer le bilan des actions mécaniques extérieures à un bâti lié à la terre.

On pourra donc isoler tout système matériel hors bâti.

Principe fondamental de la statique

Définition (Principe fondamental de la statique)

Le torseur des actions mécaniques extérieures à un système Σ) en équilibre (statique) dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ est identiquement nul.

$$\left\{\mathscr{T}_{\overline{\Sigma}\to\Sigma}\right\} = \{0\}$$

Deux équations vectorielles :

- une équation de résultante :

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_{\overline{\Sigma}_i\to\Sigma}} = \overrightarrow{0}$$

  aussi appelée théorème de la résultante statique ;
- une équation de moment en un point, par exemple A :

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_{A,\overline{\Sigma}_i\to\Sigma}} = \overrightarrow{0}$$

  aussi appelée théorème du moment statique au point considéré.

Actions mutuelles

Théorème (Actions mutuelles)

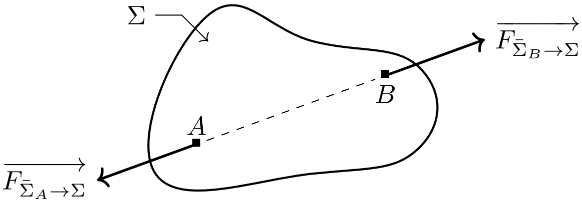
Le torseur des actions mécaniques exercées par un système S_1 sur un système S_2 est opposé au torseur des actions mécaniques exercées par le système S_2 sur le système S_1.

$$\{\mathscr{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\} = -\{\mathscr{T}_{S_2 \rightarrow S_1}\}$$

Système soumis à deux glisseurs

Proposition (Système soumis à deux glisseurs)

Si un système matériel est soumis aux seules actions mécaniques de deux glisseurs, alors ils sont directement opposés, c'est-à-dire qu'ils partagent le même axe central et sont de norme identique mais de directions opposées.

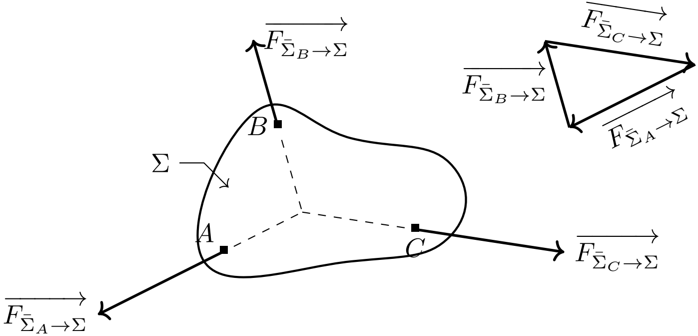


Système soumis à trois glisseurs

Proposition (Système soumis à trois glisseurs)

Si un système matériel est soumis aux seules actions mécaniques de trois glisseurs, alors leurs axes centraux sont coplanaires et

- *concourants (si deux des axes centraux sont sécants) ;*
- *ou parallèles (si deux des axes centraux sont parallèles).*



1 2 3

Résolution d'un problème de statique

Résolution d'un problème de statique

- Objectif d'une étude statique

déterminer puis de résoudre les équations
liant les actions mécaniques s'exerçant sur chaque solide
$\Longrightarrow$ déterminer les actions mécaniques inconnues.

- Point de départ : **graphe de structure**
  - une masse sur le solide de référence associé à un référentiel galiléen ;
  - les liaisons entre les différents solides, leurs mobilités et le nombre d'inconnues scalaires associées ;
  - les actions mécaniques extérieures à chaque solide.
- 2 approches de résolution
  - méthode systématique ;
  - stratégie de résolution.

Méthode systématique

Pour chaque solide, la démarche est la suivante :

1. isoler un solide S et établir le bilan (exhaustif) des actions mécaniques extérieures appliquées sur S ;
2. écrire le torseur global associé à chaque action mécanique extérieure ;
3. réduire en un point quelconque (mais commun) tous les torseurs d'actions mécaniques ;
4. appliquer le principe fondamental de la statique au solide isolé et écrire les équations de résultante et de moment au point choisi ;
5. projeter les deux équations vectorielles dans une base orthonormée pour obtenir un système de 6 équations scalaires à résoudre ;
6. résoudre le système.

Avant de tenter de résoudre le système ainsi formé, il est important de vérifier qu'il y ait autant d'équations « utiles » que d'inconnues.

Stratégie de résolution (1/2)

Définition (Stratégie de résolution)

On appelle stratégie de résolution le choix d'une suite ordonnancée de solides ou de systèmes de solides à isoler pour résoudre un problème de statique donné.

stratégie de résolution $\Longleftrightarrow$ succession d'étapes

Une étape est caractérisée par :

- le solide ou l'ensemble de solides isolé ;
- les actions mécaniques supposées connues ;
- les actions mécaniques que cette étape permet de déterminer et avec quelle(s) équation(s).

Stratégie de résolution (2/2)

Il n'existe pas une unique stratégie mais certaines sont beaucoup plus efficaces que d'autres.

Idées clés pour élaborer une stratégie

- ne jamais perdre de vue la ou les actions mécaniques imposées et l'**action mécanique recherchée** ;
- repérer les solides ou systèmes de solides soumis à **2 glisseurs**
  $\Longrightarrow$ *ils permettent de réduire le nombre d'inconnues*
- repérer les solides ou systèmes de solides soumis à **3 glisseurs** ;
- exploiter utilement les **mobilités des liaisons** dont on ne cherche pas à déterminer les actions mécaniques transmises.

Méthodes de résolution

- résolution analytique ;
- résolution graphique (pb plan).

Résolution analytique

La méthode de résolution analytique est basée sur :

1. un bilan des actions mécaniques extérieures au système isolé avec, pour chacune, son torseur associé ;
2. l'écriture des équations de résultante ou de moment aux points « utiles » pour déterminer la ou les inconnues ;
3. la résolution de l'équation ou du système d'équations scalaires.

Résolution graphique

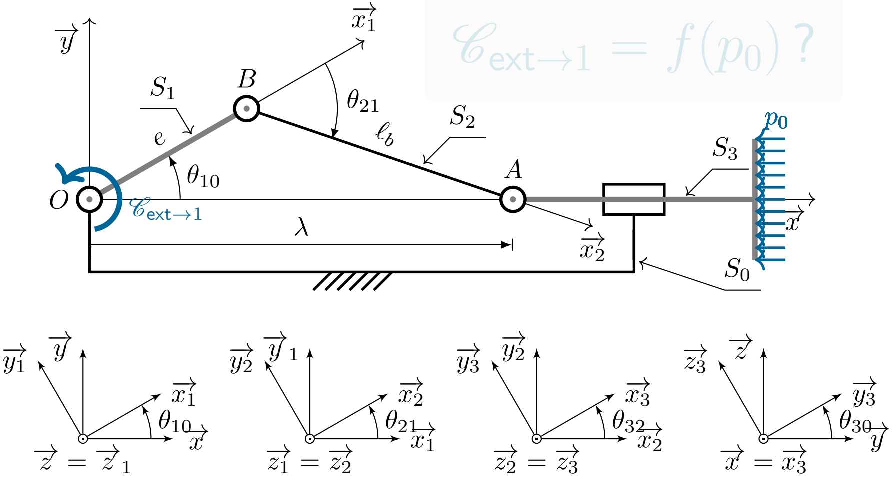
Démarche de résolution (problèmes plans)

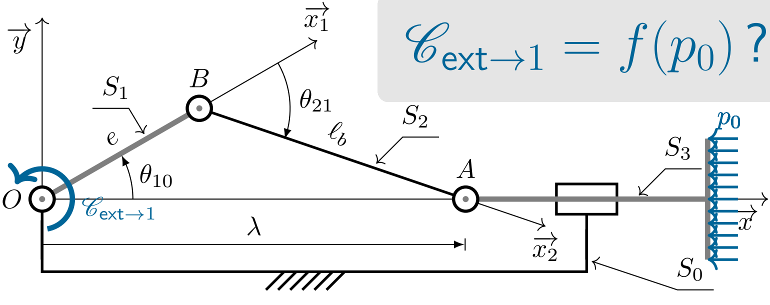
- trouver un solide ou un ensemble de solides soumis à trois glisseurs avec au maximum trois inconnues scalaires ou, à défaut, les systèmes soumis à deux glisseurs ;
- appliquer le principe fondamental de la statique au système isolé et résoudre, au moins partiellement, le problème ;
- connaissant les nouvelles relations issues des résolutions partielles précédentes, reprendre l'algorithme général en cherchant de nouveau les systèmes soumis à trois glisseurs.

Il est obligatoire de ne jamais perdre de vue la (ou les) action(s) mécanique(s) imposée(s) et l'action mécanique recherchée.

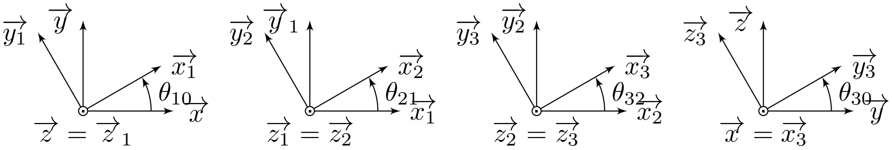
Exemple : Moteur thermique d'aéromodélisme

$$\mathscr{C}_{\text{ext}\to 1} = f(p_0)\ ?$$





$$\mathscr{C}_{\text{ext}\to 1} = f(p_0)\,?$$



N. Mesnier, lycée Jean Perrin, Lyon